

非線形係留浮体の有限振幅動揺特性の解析

滝川 清*・古田英樹**・外村隆臣***

1. はじめに

波浪中の浮体動揺は、荒天時波浪下あるいは浮体共振運動の条件下の様に動揺が大となる場合には、波、浮体および係留系の運動に有限振幅性が出現し、各運動の相互の非線形干渉効果を考慮する必要がある。しかしながら、従来より浮体問題に関しては、微小振幅波による浮体の微小な運動を仮定した取扱いが多数で、相互運動の有限振幅性に関する研究は殆ど見受けられない。

先に著者らは、流体と浮体との連成運動系とした相互運動の有限振幅運動系を FEM 解析する方法（滝川・田淵, 1980）を示し、さらにこれに粘性に起因する非線形抗力を考慮した解析（滝川・田淵, 1986）を行い、相互運動系における有限振幅性の特性を検討している。本報告は、浮体がチェーンやケーブル等の非線形係留索で係留される場合を対象とし、その解析手法と適用計算を行い有限振幅動揺特性について報告するものである。

2. 有限要素法による係留浮体の有限振幅運動解析

2.1 流体運動の解析

図-1 に示す浅海域に係留または浮遊した任意形状浮体があるとき、この流体域での運動について考える。浮体運動に関し粘性に起因した抗力は考えるが、流体運動は速度ポテンシャル $\phi(x, y, t)$ を有するものとして扱う。境界面は、自由表面 S_1 、不透過境界 S_2 、仮想境界

S_3 および浮体没水表面 S_4 より構成される。流体の運動は変動領域 $V(\eta)$ でラプラス式を満たす移動境界値問題であり、流体運動の支配方程式は以下のように表現される。

$$\text{解析領域 } V(\eta) ; \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{自由表面 } S_1 ; \frac{\partial \phi}{\partial n} = n_y \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{不透過境界 } S_2 ; \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{仮想境界 } S_3 ; \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{浮体没水表面 } S_4 ; \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi'}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 n は各境界上での外向法線方向、 n_y は n の y 軸方向余弦である。式 (5) の $\bar{\phi}$ は解析領域外部での速度ポテンシャルを意味し、式 (6) の右辺は浮体没水表面の法線方向の速度成分である。

この移動境界値問題に対して変分原理から次式のある時刻 t における汎関数 χ を停留にする条件として解析することができる。

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \iint_{V(\eta)} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dV + \frac{g}{2} \int_{S_1} \eta^2 dS_1 \\ & + \int_{S_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \eta dS_1 - \int_{S_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \phi dS_1 \\ & - \int_{S_3} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right) \phi dS_3 - \int_{S_4} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial n} \right) \phi dS_4 \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ただし、変分を受ける独立量は ϕ , η のみであって、 $(\partial \phi / \partial t)$, $(\partial \eta / \partial t)$, $(\partial \bar{\phi} / \partial n)$, $(\partial \phi' / \partial n)$ は変分を取るに際して定数と見なされる。解析としては、有限要素法を適用して上式の離散化および変分原理の適用を行えばよい。

自由表面 S_1 は未知の水面変動量 η の関数であり、非線形の水表面条件を満足させる必要がある。このため次の増分法を導入して線形化を図る。すなわちある時刻 t での第 n 近似解が既知であるとし、その $n+1$ 近似解を

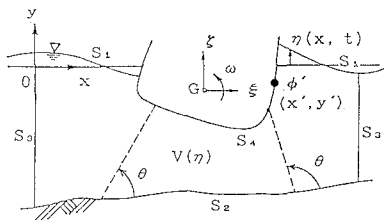


図-1 解析領域

* 正会員 工博 熊本大学教授 工学部土木環境工学科
 ** 正会員 工修 熊本県立玉名工業高等学校教諭
 *** 正会員 熊本大学技官 工学部土木環境工学科

$$\left. \begin{aligned} \phi^{n+1} &= \phi^n + d\phi \equiv \phi_0 + d\phi \\ \eta^{n+1} &= \eta^n + d\eta \equiv \eta_0 + d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

と表す。これを用いて高次の $d\phi$, $d\eta$ に関する項を無視すると $d\phi$, $d\eta$ を未知量とした線形の連立方程式を得ることができる。

時間項に関しては次式の Heaviside 関数を用いた差分法を適用する。添字 k は時刻 $t - \Delta t$ での値を意味する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{\theta \cdot \Delta t} (\phi^{n+1} - \phi^k) - \frac{1-\theta}{\theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^k \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $0 \leq \theta \leq 1$ である。 $(\partial \eta / \partial t)$ に関しても同様の時間差分を適用する。

境界 S_0 は流体中に設けた左右の仮想境界で、境界が開放されている場合には、この内外で流体運動は連続でなければならない。ここでは流体運動の連続条件として、 S_0 上で mass-flux および energy-flux の連続性を計算の時刻ごとに満足させる方法を用いる。 S_0 上での流速分布を水面変動量の関数として取扱う手法で、Dean の流れ関数法の第 1 項を用いた事に相当するものである。この詳細は文献(滝川・岩垣・中川, 1983; 滝川・金, 1989; 滝川・三池・古田, 1991)に示してある。

2.2 非線形相互運動系の解析

a) 浮体没水面上の条件 流体の運動は浮体没水面 S_4 上での速度条件 $(\partial \phi' / \partial n)$ が求まると計算できる。いま、浮体静止の重心座標を $G(\bar{y}_G, \bar{x}_G)$ 、静止位置からの水平、鉛直および回転の各変位をそれぞれ ξ , ζ , ω とする。没水表面の座標はこれら変位量の関数であり ϕ' は一般に次式の形で表現できる。

$$\phi'(x', y', t) = \phi'(f(\xi, \zeta), g(\zeta, \omega), t) \dots\dots\dots (10)$$

浮体静止のとき重心から $(\bar{x}, \bar{y})$ だけ離れた点は浮体運動により点 (x', y') に移動すると次式で表わされる。

$$\begin{aligned} x' &= \bar{x}_G + \xi + \bar{x} \cos \omega - \bar{y} \sin \omega \equiv x'_0 + dx' \\ y' &= \bar{y}_G + \zeta + \bar{x} \sin \omega + \bar{y} \cos \omega \equiv y'_0 + dy' \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

これに増分法を用いて、第 $n+1$ 近似解を第 n 近似解 ξ_0 , ζ_0 , ω_0 とその増分量 $d\xi$, $d\zeta$, $d\omega$ で表わすと結局次式を得る。

$$\begin{aligned} dx' &= d\xi - (\bar{x} \sin \omega_0 + \bar{y} \cos \omega_0) d\omega \\ dy' &= d\zeta + (\bar{x} \cos \omega_0 - \bar{y} \sin \omega_0) d\omega \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

これより没水表面の ϕ' と浮体運動の有限な変位量との関係が得られ、没水表面上の速度 $(\partial \phi' / \partial n)$ は次式で表現できる。

$$\partial \phi' / \partial n = (\partial x' / \partial t) \cdot l_x + (\partial y' / \partial t) \cdot l_y \dots\dots\dots (13)$$

ここに l_x , l_y は没水表面の法線方向余弦である。上式に式 (12) を代入すると $(\partial \phi' / \partial n)$ は浮体重心の運動速度 $d\xi/dt$, $d\zeta/dt$, $d\omega/dt$ の関数として表現できる。従って浮体重心の変位量 $(d\xi, d\zeta, d\omega)$ を新たな未知量として、上述の関係を以下に述べる浮体運動方程式

と同時に解けばよい。なお浮体形状の幾何学的条件は計算結果から $x' = x'_0 + dx'$, $y' = y'_0 + dy'$ とする事によって同時に満足される。

b) 浮体運動方程式 係留浮体の運動は、 M を浮体質量、 I を浮体重心に関する慣性能率として

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \int_{S_4} p_H dS_4 - F_H + F_{DH} \\ M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \int_{S_4} p_V dS_4 - F_V + F_{DV} - (M \cdot g + T_V) \\ I \frac{d^2 \omega}{dt^2} &= \int_{S_4} p_M dS_4 - F_M + F_{DM} \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

と表現できる。ここに、 F_H , F_V , F_M は係留索反力項である。 T_V は静止状態での索張力の鉛直成分である。 p_H , p_V は、流体圧の水平、鉛直方向成分であり、 p_M は流体圧の浮体重心に作用するモーメントである。また、 F_{DH} , F_{DV} , F_{DM} は粘性に起因する非線形抗力 (F_D) の各方向成分を意味する。

浮体の没水表面 (x', y') に垂直に働く流体圧 p は ϕ' を用いて表現でき次式で計算される。

$$p(x', y') = -\rho \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2) + g y' \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに $\phi_x = (\partial \phi / \partial x)$, $\phi_y = (\partial \phi / \partial y)$ である。上式を用いると、 $p_H = p \cdot l_x$, $p_V = p \cdot l_y$, $p_M = p \cdot e$ (e は重心と点 (x', y') の偏心距離) と表現できる。

粘性に起因する抗力項 F_D は、水粒子速度 u と浮体運動速度 v の相対速度 $V = (u - v)$ の 2 乗に比例するものとして次式で評価する。

$$F_D = \rho \cdot C_D \cdot S \cdot V |V| / 2 \dots\dots\dots (16)$$

ここに C_D は抗力係数、 S は投影面積を意味する。この詳細は文献(滝川・田淵, 1986)を参照されたい。

c) 非線形係留索反力 係留索反力はバネ等の線形係留索である場合には、そのバネ定数を K として図-1 に示す取付角 θ に対して、図を参考にすると

$$\begin{aligned} F_H &= K \cdot \Delta l \cdot \cos \theta, & F_V &= K \cdot \Delta l \cdot \sin \theta \\ F_M &= (y_G - y_A) \cdot F_H + (x_A - x_G) \cdot F_V \end{aligned} \dots\dots\dots (17)$$

と表現できる。 Δl は係留索の取付点 (x_A, y_A) の関数として表し解析する。

係留索がケーブル等の非線形係留索である場合には、索取付点の変位と索反力および索そのものの挙動が非線形となり、計算ステップごとに非線形な索の解析が必要である。ここではカタナリー理論および Lumped-mass-method により解析する。

i) カテナリー理論 浮体運動による係留索取付点の変位と索張力は静的釣り合い式であるカタナリー理論から算出するが、索取付点の変位そのものが有限で未知であるためこのままでは解析することができない。ここでは増分法を用いて線形化を行う。図-2 に示すように、係留索取付点 A と浮体重心 G の位置に関し、あ

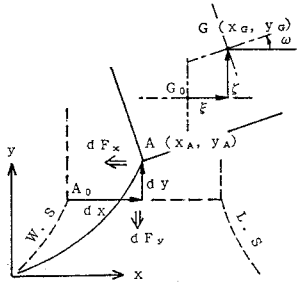


図-2 ケーブルと浮体運動の座標系

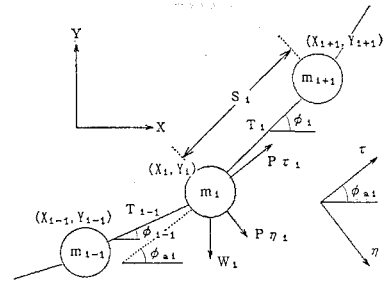


図-3 集中質量に働く外力と座標系

る時刻 t での第 n 近似解が既知であるとしてこの第 $n+1$ 近似解をそれぞれの増分を用いて表現すると、この時の係留索反力は次式で表現できる。

$$F(x_0+dx, y_0+dy) = F(x_0, y_0) + dF(dx, dy) \quad (18)$$

第 n 近似解の回りに Taylor 展開して第 1 項までを取ると、取付点 A の変位 (dx, dy) と係留索反力の増分 (dF_x, dF_y) は次式で関係付けられる。

$$\left. \begin{aligned} dF_x &= C_{xx} \cdot dx + C_{yx}^* \cdot dy \\ dF_y &= C_{xy}^* \cdot dx + C_{yy} \cdot dy \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに、 C_{xx} 等はカテナリー理論から導かれる線形バネ定数であり詳細は文献(小田, 1980など)を参照されたい。また $C_{yx}^* = C_{xy}^*$ であり、*印は Weather side (W. S) と Lee side (L. S) で符号が異なることを意味する。これ等の線形バネ定数は強い係留状態と緩やかな係留状態とで異なり解析の際にはこれを考慮しなければならない。式(14)中の索反力は

$$\begin{aligned} F_H &= (F_x)_0 + dF_x, & F_V &= (F_y)_0 + dF_y \\ F_M &= (y_G - y_A) \cdot F_H + (x_A - x_G) \cdot F_V \end{aligned} \quad (20)$$

と計算される。 $(F_x)_0, (F_y)_0$ は第 n 近似値である。取付点の変位 (dx, dy) は式(12)のように浮体重心の変位量で表現できるので、結局、索反力は $d\xi, d\zeta, d\omega$ の関数でありこれを解析することができる。

ii) Lumped-Mass-Method 荒天時あるいは浮体共振点近傍など浮体動揺が大である場合には、係留索そのものの動揺および係留索に働く抗力が無視できなくなり動的解析を行う必要がある。カテナリー理論から係留索の動揺を算出する手法(山崎・他, 1990)も見受けられるが、ここでは図-3に示すように、係留索を線要素に分割して、各要素に集中質量を持つ質点系の運動として取扱う有限要素法による動的解析を行う。

図を参考にして、 i 番目の集中質量に関する運動方程式および幾何学的条件式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} T_i \cos \phi_i - T_{i-1} \cos \phi_{i-1} + p_{xi} &= m_i \ddot{x}_i \\ T_i \sin \phi_i - T_{i-1} \sin \phi_{i-1} + p_{yi} - W_i &= m_i \ddot{y}_i \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 - S_i^2(1 + T_i/AE) = 0 \equiv \phi_i \quad (22)$$

ここに p_{xi}, p_{yi} は質点に働く流体力の x, y 方向成分で、係留系の局所座標 (τ, η) の流体力 p_i, p_i と

$$\begin{aligned} p_{xi} &= p_{\tau i} \cos \phi_{ai} + \phi_{\eta i} \sin \phi_{ai} \\ p_{yi} &= p_{\tau i} \sin \phi_{ai} + p_{\eta i} \cos \phi_{ai} \end{aligned} \quad (23)$$

の関係がある。式(21)の加速度項を時間差分し、式(22)を張力 T について整理すると、最終的に張力を補正する次式が導かれる。

$$\{-\phi_i\} = [\partial \phi_i / \partial T_{i-1}, \partial \phi_i / \partial T_i, \partial \phi_i / \partial T_{i+1}] \begin{Bmatrix} dT_{i-1} \\ dT_i \\ dT_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

ある時刻 t における索取付点の位置を境界条件として与え、係留索に関する第 n 近似解を用いて上式より張力補正を行い第 $n+1$ 近似解を逐次求めていく。

3. 計算結果と考察

実験および計算の対象とした浮体模型および実験条件は図-4、図-5に示す2次元矩形断面浮体で、それぞれ線形バネ係留およびチェーン係留したものである。

図-6は図-5のチェーン係留浮体に $T=1.61s$ の波を入射したとき浮体鉛直運動振幅 ζ と入射波振幅 a との比 ζ/a の時間変動を示したものである。浮体運動の共振点近傍の条件下であるが、実験結果はVTR画像より読取ったもの、また計算結果は本法の係留索をカテナリー理論で近似解析する手法によるものである。計算

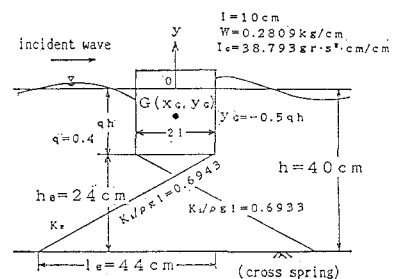


図-4 係留浮体模型(バネ係留)

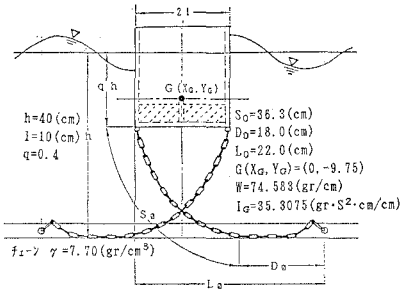


図-5 係留浮体模型 (チェーン係留)

では浮体運動の抗力項を無視 ($C_D=0$) したために、実験値よりも多少大となっているが、良好な結果が得られている。

図-7 は、係留索の動的解析 (Lumped-Mass-Method) の検証を行ったもので、チェーン上端を強制振動した時の張力の時間変化を位相平均した実験結果と計算結果を示したものである。チェーンは全長 $s=115$ cm, 単位重量 2.317 gf/cm を水深 $h=53.3$ cm に設置し上端を水平方向に振幅 1.6 cm で正弦振動した場合である。チェーンの動的解析に際し抗力係数は索の法線方向成分のみを考慮して、抗力係数 $C_D=1.8$, 付加質量係数 $C_m=2.0$ として計算した。解析結果は実験値よりやや小さくなっているが、抗力係数の値によっても異なった結果となる点を考慮すると、ほぼ妥当な結果が得られる事が確認できる。

図-8 は、浮体近傍の流速分布をある時刻ごとに示したものでチェーン係留浮体を対象に本法の計算手法による結果である。係留索はカタナリー理論より逐次計算した。水面変動および浮体運動にも有限振幅性が出現し、チェーンには強い係留状態 (図中アンカー部で N.T の記号) や緩い係留状態が現われ、また流況も隅角部を中心に巻き込みが顕著になるが、これらの結果は実験状況を良く再現している。

図-9 はバネ係留浮体の重心の運動比 ($\xi/a, \zeta/a, \omega/a$) を時間軸上にプロットしたもので $\sigma^2 h/g=2.0$ の規則波中での運動の計算結果である。入射波の波形勾配 H/L が小さい場合、各方向の運動とも入射波周期に対応した正弦的変動となるが、 H/L が大となると相互運動の有限振幅性が出現し、鉛直運動比は低減し、水平および回転運動には長周期の変動成分が現われる。

図-10 は、図-9 と同様の係留浮体に、 $(\sigma^2 h/g)_{1/3}=2.0$ に相当する B. S-光易型スペクトルをもつ不規則波が入射する場合の浮体重心の運動比の時間変動の計算結果である。入射波特性に対応して複雑な運動となるが、 H/L が大となると規則波中と同様に水平、回転運動に長周期の変動成分が生じる。線形理論に基づく浮体運動

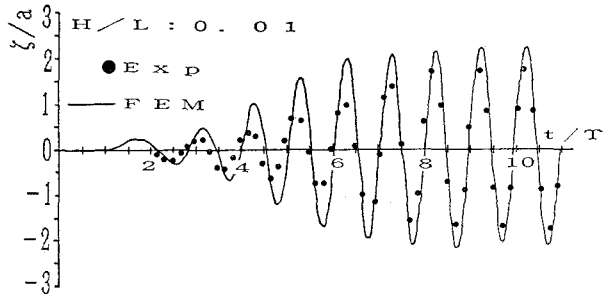


図-6 浮体鉛直運動振幅比 (チェーン係留)

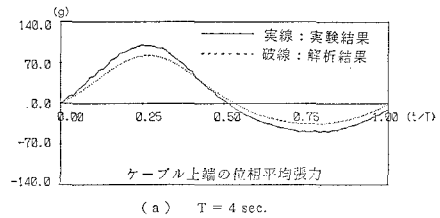


図-7 チェーン上端の張力変動

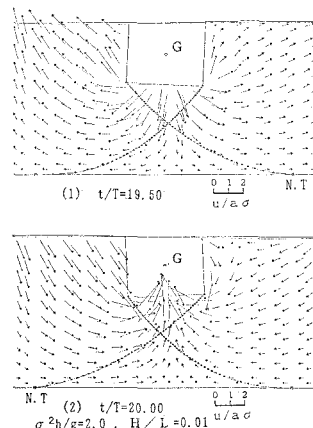


図-8 浮体運動と流速分布

の計算では、漂流力は規則波中では定常力としてのみ作用するとされるが、本法の様に、いわゆるポテンシャルの高次解を考慮した有限振幅運動解析を行うと、規則波中においても漂流力は長周期の変動成分を有することがわかる。

図-11 は、図-10 の不規則波中での結果から、浮体運動の各成分のスペクトルを示したものである。縦軸は運動比のパワースペクトル、横軸は入射の有義波の周波数 f_m との比で示してある。 H/L が大となると鉛直運動では共振点近傍 ($f/f_m=1.0$) でピーク値の低減が見られ、また水平および回転運動では新たに周波数 0 および長周期の成分が表われ、 H/L の増加と共にそのピー

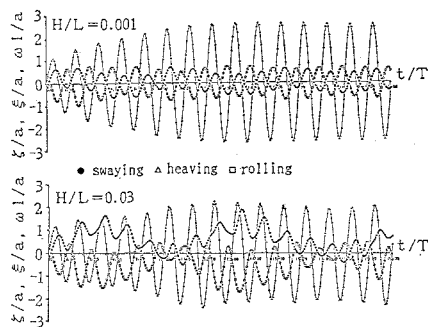


図-9 規則波中での浮体重心の運動

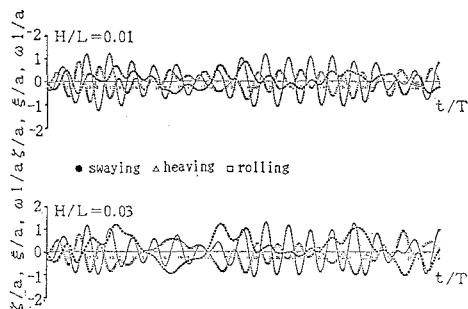
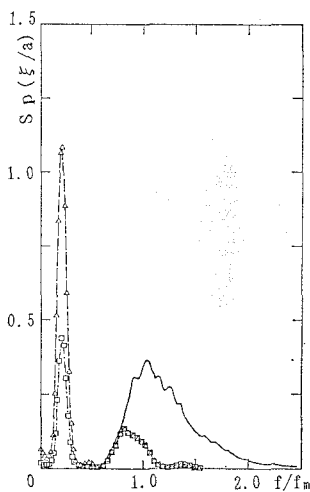
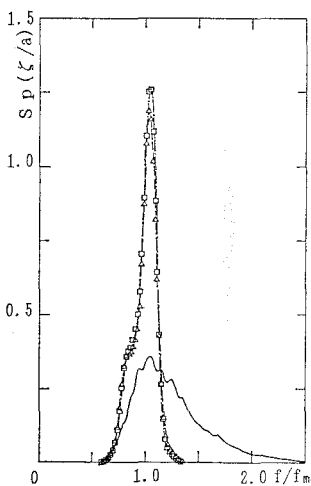


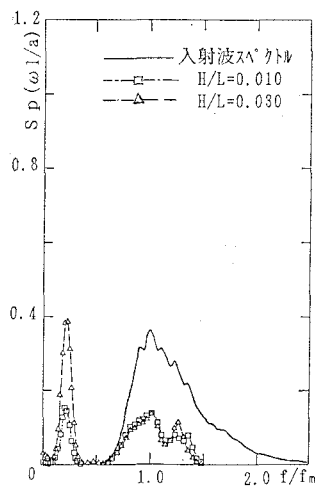
図-10 不規則波中での浮体重心の運動



(a) 水平運動スペクトル



(b) 鉛直運動スペクトル



(c) 回転運動スペクトル

図-11 浮体運動のスペクトル

ク値も増加する。これらは定常漂流および変動漂流を意味するものである。以上のように、波と浮体との連成した有限振幅運動解析を行うと、運動特性をより厳密に評価することができる。

4. おわりに

荒天時下や浮体共振条件下など係留浮体の動揺が大となる場合に対し、係留索の非線形性を考慮して、波一浮体一係留系の連成運動に対するFEM解析手法を示した。適用計算によって、従来より明確な議論ができなかった規則波および不規則波中での有限振幅動揺特性について幾つかの興味ある結果を示すことができた。なお、本研究の一部は平成3年度文部省科学研究費一般研究B（代表：熊本大学工学部、三池亮次）によったことを付記する。

参考文献

- 小田一紀(1980): 浮遊構造物の係留問題, 水工学夏期研修会講義集, B-2, 土木学会水理委員会。
- 滝川 清・田淵幹修(1980): 有限要素法による波動解析について——運動する境界面を有する場合, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 1-5。
- 滝川 清・岩垣雄一・中川政博(1983): 有限要素法による斜面上の波の碎波変形と内部機構の解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 20-24。
- 滝川 清・田淵幹修(1986): 浮体の有限振幅運動と非線形抗力について, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 551-555。
- 滝川 清・金南 亨(1989): 有限振幅波動解析における有限要素法と境界要素法について, 第3回計算力学シンポジウム, pp. 213-220, 日科技連。
- 滝川 清・三池亮次・古田英樹(1992): 係留浮体の有限振幅動揺特性解析, 第41回応用力学連合会予稿集, pp. 97-100。
- 山崎 晶・小田 晃・加来謙一・新田良典(1990): 係留索の動的挙動を考慮した浮体動揺と係留鎖張力の計算方法, 土木学会論文集417号, II-13, pp. 237-244。