

透過潜堤による平面二次元非線形波浪変形の計算法

Eric Cruz Cruz*, 芝 和彦**, 磯部雅彦***, 渡辺 晃****

1. 序 論

近年, 波浪制御構造物の一種である透過潜堤が, 景観面や環境面への優位性から脚光を浴びるようになった. 透過潜堤の波浪制御効果を評価するためには, 潜堤周辺における波浪変形の解析が必要である. その際, 波の分裂現象を伴う非線形効果を見落とすと, 波高やエネルギー分布の予測にさへも大きな誤差が生じてしまうことが明らかにされている. そこで, 本研究では, 潜堤背後を含む平面波浪場の精度よい予測を行い, 潜堤の波浪制御効果を明らかにすることを目的とする.

著者ら (1991) は透過潜堤上における非線形波動方程式を提案したが, そこでは1次元問題のみを取り扱った. そこで, まず非線形波動方程式の2次元への拡張を行った. 続いて, 方程式およびその計算手法の妥当性を検証するために, 一様水深で潜堤が存在しないという単純なケースについて計算を行った. その中で特に, 数値計算上の逸散および分散に関する問題について検討を加える. その過程において, より精度の高い非線形方程式の計算手法を提案する.

2. 基礎方程式の誘導

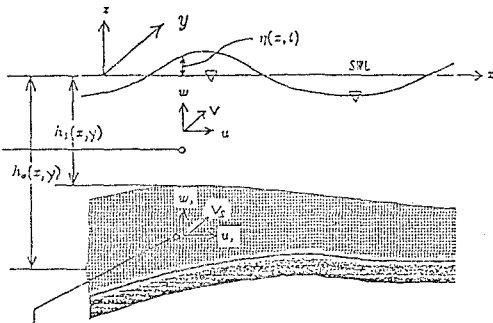


図-1 透水層を含む波動場の定義

以下に使用する変数の定義を図-1に示す. 水層部及び透水層部における水粒子の運動は, 非圧縮性流体の連

続式と運動方程式によって支配される. 透水層部における流体抵抗は, 表面抵抗および形状抵抗から成り立っていると考えると以下のように表すことができる.

$$-\frac{1}{\rho} \nabla(p_s + \gamma z) = \frac{\nu}{K_p} \varepsilon \mathbf{u}_s + \frac{C_f}{\sqrt{K_p}} \varepsilon^2 |\mathbf{u}_s| \mathbf{u}_s \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに, $\mathbf{u}_s = (u_s, v_s, w_s)$, および p_s は透水層内の水平流速および圧力, ρ は水の密度, γ は水の単位体積重量, K_p は線形透水係数, C_f は乱流抵抗係数, ε は空隙率, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ は微分演算子を表す. 境界条件には, 水表面, 不透過底面および二層の界面におけるものがある. アーセル数のオーダーが1であるという条件の下での摂動展開における2次の項を考慮し, 境界条件を用いて支配方程式を鉛直積分することにより以下の基礎方程式が得られる.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_h \cdot [(h_1 + \eta) \mathbf{U}] + \nabla_h \cdot [\varepsilon h_p \mathbf{U}_s] = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla_h) \mathbf{U} + g \nabla_h \eta - \nabla_h \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h \cdot [(h_1 + \eta)^2 \mathbf{U}] \right\} \\ - \nabla_h \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h \cdot [\varepsilon h_p (h_1 + \eta) \mathbf{U}_s] \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_r \left[\frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} + (\mathbf{U}_s \cdot \nabla_h) \mathbf{U}_s \right] + g \nabla_h \eta - \nabla_h \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \cdot [(h_1 + \eta)^2 \mathbf{U}] \right\} \\ - \nabla_h \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h \cdot [\varepsilon h_p (h_1 + \eta) + C_r h_p^3 / 3] \mathbf{U}_s \right\} \\ - \nabla_h \left[\nabla_h \cdot \left(\frac{\alpha_1 h_p^3}{3} \mathbf{U}_s \right) \right] + \alpha_1 \mathbf{U}_s + \alpha_2 |\mathbf{U}_s| \mathbf{U}_s = 0 \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon \nu}{K_p} \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon^2 C_f}{\sqrt{K_p}}$$

ここに, η は水面変動, $\mathbf{U} = (U, V)$, $\mathbf{U}_s = (U_s, V_s)$ は水層内および透水層内の鉛直平均水平流速, h_1 は水層部の水深, h_p は透水層の厚さ, g は重力加速度, ν は動粘性係数, C_r は透水層内の平均質量係数, x と y は水平座標, t は時間, および $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平方向への微分演算子を表す.

これらの基礎方程式の誘導は, プンネスク方程式と同等の長波近似に基づいているため, 適用範囲は浅海域に限られる. また, 碎波を考慮するためには, 碎波減衰項を基礎方程式中に取り入れる必要がある.

* 工修 東京大学大学院 土木工学科

** 東京大学大学院 土木工学科

*** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

**** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

3. 基礎方程式の適用

式(2)~(4)を数値的に解くため差分化を行う。その際、流速と水面変動の両方が従属変数となっているため、差分化を行うときの格子網としてスタガードメッシュを利用する。式(2)~(4)は多変数の2次元非線形問題であるため、数値的発散や誤差を防ぐためには精度よい計算手法が必要となる。

計算手順としては、まず式(3)および(4)を計算して水層部及び透水層部の流速を求め、次に式(2)から水面変動を求める、というように流速と水面変動を交互に計算していく方法を採用する。その際の差分格子と計算手順を図-2に示す。

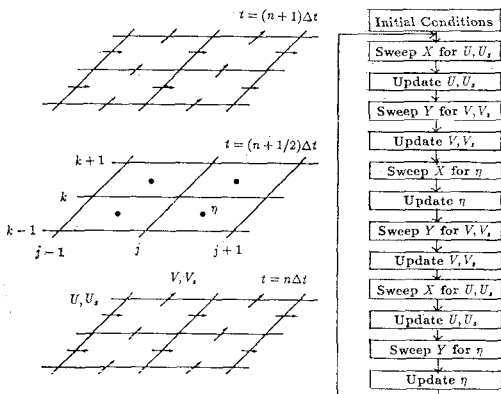


図-2 差分格子と計算手順

計算方法の妥当性を検討するために、以下では簡単なケースとして、図-3のように一様水深の長方形領域を対象として計算を行った。側方境界は鉛直壁と仮定して波を完全反射させた。岸側境界では波は完全に境界を通過するものとして、自由透過境界条件を与え、また、沖側境界では、水面変動と流速に、それぞれクノイド波の解を用いた入射波のそれを与えた。初期条件は静水状態である。

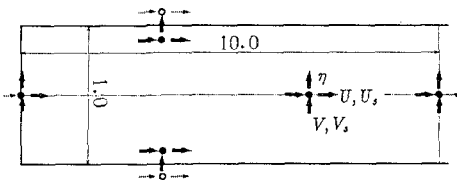


図-3 長方形領域

図-4は、計算領域の中心線添いの空間波形および $x=10\text{m}$ の点での水面変動の時系列データを表している。なお、計算時の各係数値は、水平方向刻み $\Delta x = \Delta y = 0.05\text{m}$ 、時間刻み $\Delta t = 0.05\text{s}$ 、 $\varepsilon = 0$ 、 $g = 9.8\text{m/s}^2$ 、 $h_1 = 0.20\text{m}$ 、 $h_0 = 0$ 、入射波周期 $T = 2.0\text{s}$ 、入射波波高 $H = 0.04\text{m}$ とした。図-4(a)より沖側境界から離れた

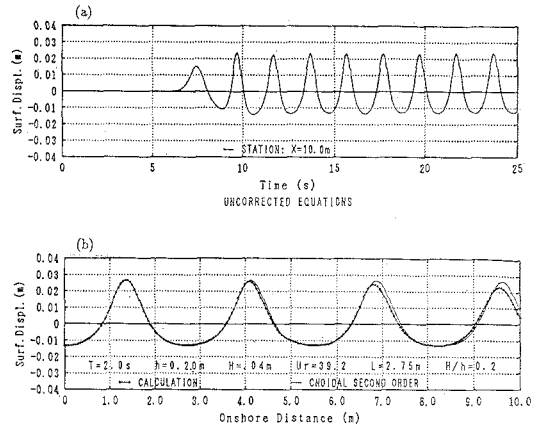


図-4 計算結果

点では、最初の数波は波高が変化しているものの、時間が経つと安定し、一定の波高で波が通過して行くことが分かる。しかし、図-4(b)を見ると、数値計算によって得られる空間波形はクノイド波の二次近似解とほぼ同一であるとみなすことができるものの、数値誤差に起因する分散と逸散を含んでいることがわかる。

理論的には、数値的逸散および分散は、進行方向に関して階数の異なる微分を方程式中に含む場合に生ずると考えられる。差分式の精度が高ければ、計算上の逸散や分散は生じないはずである。そこで、基礎方程式と、それを差分化した方程式との同値性を確保するために必要な補正項について検討する。

運動方程式(2)および(3)は一階微分 $\partial U / \partial t$ 、 $\partial U_s / \partial t$ 、 $g \nabla \eta$ および移流項 $(U \cdot \nabla_h)U$ 、 $(U_s \cdot \nabla_h)U_s$ を含んでいる。これらの項は、テイラー展開を利用することによって中心点のまわりに離散化することができる。中心点としては、離散化を行う際の幾何学的中心を用いればよい。スタガードメッシュを用いると、 U 、 U_s の微分に関する構成要素は図-5(a)のようになり、中心点は、 $x = j\Delta x$ 、 $t = (n+1/2)\Delta t$ となる。

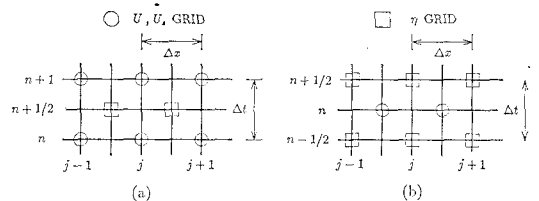


図-5 差分式の構成要素

これより、一階微分項は以下のように展開される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_j^{n+1/2} = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \Big|_j^{n+1/2} + O(\Delta t^4) \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} \Big|_j^{n+1/2} = \frac{U_s_j^{n+1} - U_s_j^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^3 U_s}{\partial t^3} \Big|_j^{n+1/2} + O(\Delta t^4) \quad (6)$$

$$g \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_j^{n+1/2} = g \left(\frac{\eta_{j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} \right) - g \frac{\Delta x^2}{24} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \Big|_j^{n+1/2} + O(\Delta x^4) \quad (7)$$

式(5)~(7)の右辺第2項が2次の補正項である。

次に、式(2)~(4)の第1次近似解を用いると以下の関係式が得られる。

$$\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} = gh_1 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial t \partial x \partial y} \right) + g \varepsilon h_p \left(\frac{\partial^3 U_s}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 V_s}{\partial t \partial x \partial y} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U_s}{\partial t^3} = & \frac{gh_1}{C_r} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial t \partial x \partial y} \right) + \frac{g \varepsilon h_p}{C_r} \left(\frac{\partial^3 U_s}{\partial t \partial x^2} \right. \\ & + \frac{\partial^3 V_s}{\partial t \partial x \partial y} \Big) - \frac{\alpha_1}{C_r^2} gh_1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) \\ & - \frac{\alpha_1}{C_r^2} g \varepsilon h_p \left(\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_s}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\alpha_1^2}{C_r^3} g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x} \\ & - \frac{\alpha_1^3}{C_r^3} U_s \quad (10) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = -\frac{C_r}{g} \frac{\partial^3 U_s}{\partial t \partial x^2} - \frac{\alpha_1}{g} \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} \quad (11)$$

これらを式(5)~(7)に代入し、式(3)、(4)を用いると以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \left(\frac{\eta_{j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \\ & - \left(\frac{h_1^2}{3} + \frac{gh_1 \Delta t^2}{24} - \frac{\Delta x^2}{24} \right) \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} - \left(\frac{h_1^2}{3} + \frac{gh_1 \Delta t^2}{24} \right) \\ & \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial t \partial x \partial y} - \left(\frac{\varepsilon h_p h_1}{2} + \frac{g \varepsilon h_p \Delta t^2}{24} \right) \\ & \cdot \left(\frac{\partial^3 U_s}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 V_s}{\partial t \partial x \partial y} \right) = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C_r \left(\frac{U_s^{n+1} - U_s^n}{\Delta t} + U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} \right) + g \left(\frac{\eta_{j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \\ & - \left(\frac{h_1^2}{2} + \frac{gh_1 \Delta t^2}{24} \right) \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial t \partial x \partial y} \right) \\ & - \left(\varepsilon h_p h_1 + \frac{C_r h_p^2}{3} + \frac{g \varepsilon h_p \Delta t^2}{24} - \frac{\Delta x^2}{24} \right) \frac{\partial^3 U_s}{\partial t \partial x^2} \\ & - \left(\varepsilon h_p h_1 + \frac{C_r h_p^2}{3} + \frac{g \varepsilon h_p \Delta t^2}{24} \right) \frac{\partial^3 V_s}{\partial t \partial x \partial y} \\ & - \frac{\alpha_1}{3} \left[\frac{\partial^2 (U_s h_p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (V_s h_p)}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\alpha_1 gh_1 \Delta t^2}{24 C_r} \\ & \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\alpha_1 g \varepsilon h_p \Delta t^2}{24 C_r} + \frac{\alpha_1 \Delta x^2}{24} \right) \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} \\ & + \frac{\alpha_1 g \varepsilon h_p \Delta t^2}{24 C_r} \frac{\partial^2 V_s}{\partial x \partial y} + \alpha_1 U_s \\ & + \alpha_2 \sqrt{U_s^2 + V_s^2} U_s = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

ここに、下線部が補正項を表す。なお、 y 方向の運動方程式についても同様な結果が得られる。

$\partial^3 U / \partial t \partial x^2$ や $\partial^3 U_s / \partial t \partial x^2$ は時間に依存した拡散項であり、これらは、基礎方程式を導く際に鉛直加速度を考慮することによって導入された項である。基礎方程式中

の拡散項の係数は、水層部で $h^2/3$ 、透水層部で $(\varepsilon h_p h_1 + C_r h_p^2/3)$ である。2次の補正項を考慮すると、これらの係数は、水層部で $(gh_1 \Delta t^2/24 - \Delta x^2/24)$ を加えた値に、また透水層部で $(g \varepsilon h_p \Delta t^2/24 - \Delta x^2/24)$ を加えた値となる。

非線形移流項 $U \partial U / \partial x$ 、 $U_s \partial U_s / \partial x$ に関しては、差分化する際に風上差分法を利用した。この方法は、移流が支配する流れの安定解を与えることが知られている。移流項をテイラー展開を用いて差分化すると次のようになる。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_j^{n+1/2} = U_j^n \left(\frac{\varphi_1 U_{j-1}^{n+1/2} + \varphi_2 U_j^{n+1/2} + \varphi_3 U_{j+1}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) + \Delta U \quad (14)$$

ここに、右辺第1項が移流補正項であり、以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \Delta U = & \frac{|U_j^n| \Delta x}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_j^{n+1/2} - \frac{U_j^n}{6} \left[\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_j^{n+1/2} \Delta x^2 \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial t^2} \Big|_j^{n+1/2} \Delta t^2 \right] \quad (15) \end{aligned}$$

上式に式(8)および(9)の第1次近似解を用いると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta U = & \frac{|U_j^n| \Delta x}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_j^{n+1/2} - \frac{U_j^n}{6} \left[\left(\Delta x^2 + \frac{3gh_1 \Delta t^2}{4} \right) \right. \\ & \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_j^{n+1/2} + \frac{3g \varepsilon h_p \Delta t^2}{4} \frac{\partial^3 U_s}{\partial x^3} \Big|_j^{n+1/2} \Big] \quad (16) \end{aligned}$$

式(15)をKdV方程式と比較すると、2次のオーダーの分散項が運動方程式中に取り入れられていることがわかる。

数値計算の簡便化を図るために式(16)中の空間3階微分項を、図-5(a)の構成要素を利用できるように変形する必要がある。しかし、変形の過程で $\partial^3 U / \partial x \partial t^2$ の $\partial^3 U_s / \partial x \partial t^2$ のように時間に関する2階微分を含む項が生じてしまうため、この項を無視して計算することにする。

図-5(b)を利用して、連続式に関しても同様な操作を行うと補正項を含む連続式として次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_j^{n+1/2} - \eta_j^{n-1/2}}{\Delta t} - \left(\frac{gh_1 \Delta t^2}{24} + \frac{g \varepsilon h_p \Delta t^2}{24 C_r} \right) \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial y^2} \right) \\ & + \frac{\alpha_1 g \varepsilon h_p \Delta t^2}{24 C_r} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} [U(h_1 + \eta)] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} [V(h_1 + \eta)] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (U_s h_p) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} (U_s h_p) = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

4. 計算結果の検討および実験結果との比較

図-4の長方形領域において、図-6に示すクノイド波2次近似解を入射波として与えて計算を行った。

図-7は、運動方程式中の一階微分項について式(16)、(17)に示す補正を施した計算結果の定常状態で

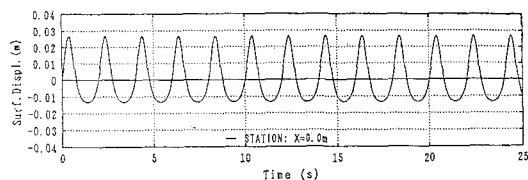


図-6 入射波形

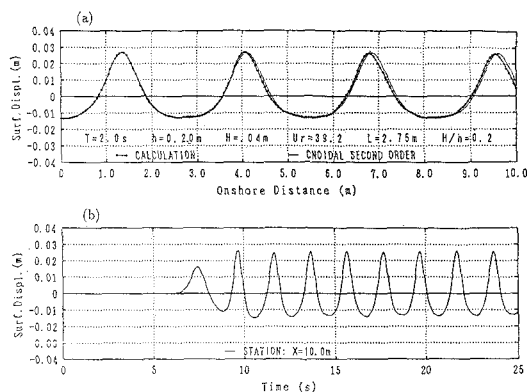


図-7 計算結果 (運動方程式を補正, 移流項は中央差分)

の空間波形と $x=10\text{m}$ における時間波形である。なお、流移項に関しては拡散についてのみ補正を行った。空間波形を見ると波高が減少していないことが分かるが、分散が生じている。また、時間波形からは、移流項に対して中心差分を行うと安定性に関する問題が生ずることがわかる。

図-8 は運動方程式中の一階微分項について補正を施し、かつ移流項には風上差分を適用した計算結果である。図-7 の結果に比べて安定性が増しているものの、まだ分散が生じている。

図-9 は、図-8 の条件に加えて、連続式についても同時に補正を行った結果である。波高減衰はほぼなくなっているが、前より分散が増加している。

図-10 は、図-8 と同条件で計算時間間隔を半分にした結果である。これを見ると分散も逸散もほとんどなくなっていることがわかる。

本研究で取り扱っている透過潜堤の存在下では、潜堤上のように垂直方向の圧縮が起こる領域で補正項が重要となるが、そのような領域では水粒子の非線形運動によって、補正項の効果と非線形性の影響を区別しにくくなってしまう。

次に、図-10 に示すような条件で碎波が生じない場合の透過潜堤周辺の波浪変形に関する実験を行った。境界条件は、側方では鉛直壁で完全反射させ、岸側境界では消波装置によって完全に波を吸収させた。沖側境界で造波板によって波を発生させ、領域の中心線に沿って設置した波高計で波形変化を記録した。合田の入・反射波

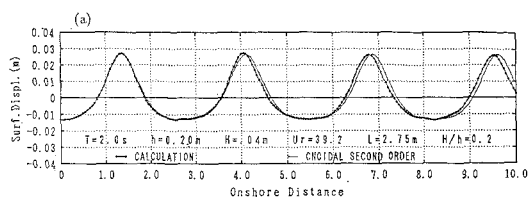


図-8 計算結果 (運動方程式を補正, 移流項は風上差分)

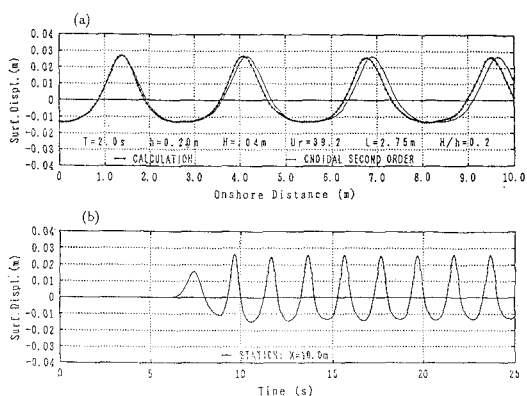


図-9 計算結果 (運動方程式と連続式を補正)

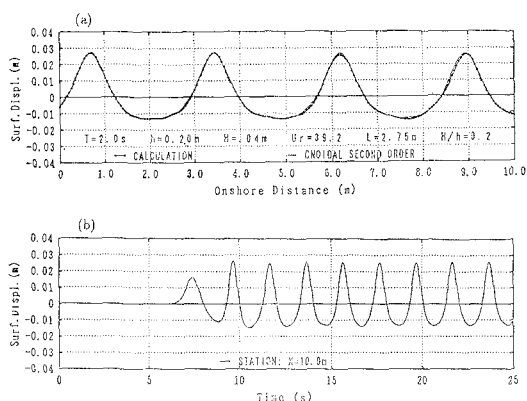
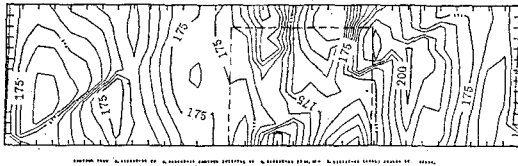


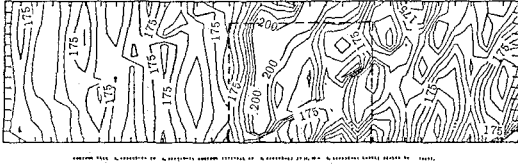
図-10 計算結果 (運動方程式を補正, 計算時間間隔を縮小)

分離法にしたがって入射波を分離したところ、その波形はクノイド波のものと一致した。

図-11 は、実験結果と計算結果について、図-12 に示す潜堤周辺の波高分布を比較した図である。これを見ると、特に潜堤背後で計算値が実験値よりも低くなっている。また、潜堤前面でも両者に差異が見受けられるが、これは岸側境界で計算領域からの反射波を考慮して



(a) 実験結果



(b) 計算結果

図-11 計算結果と実験結果の比較

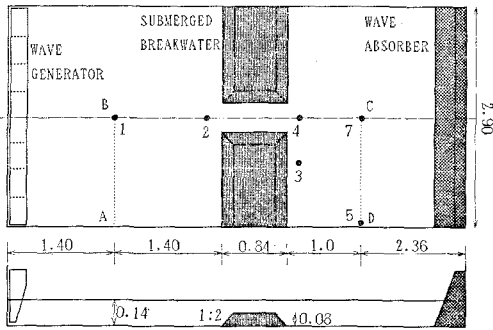


図-12 実験装置の概要

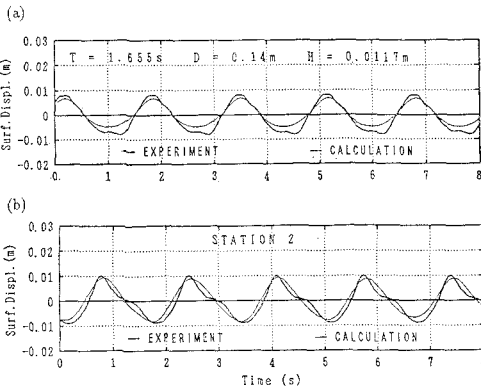


図-13 計算結果と実験結果の比較 (続く)

いないからであると考えられる。

図-13 は、実験結果と計算結果について、図-12 に示した点における水面変動を比較した図である。これらの図より、非線形波動方程式を用いると、潜堤背後では波高が過小評価になってしまうものの、線形理論では表し得なかった波の分裂を予測することが可能であることがわかる。

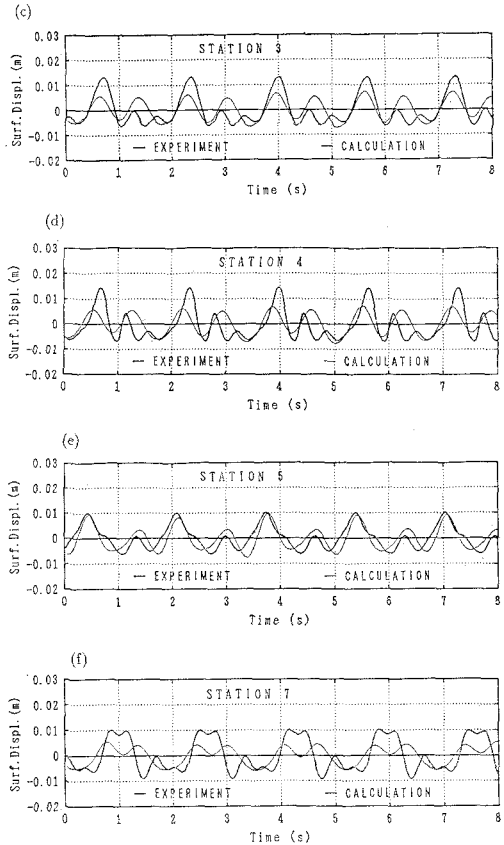


図-13 計算結果と実験結果の比較

5. 結 論

透過潜堤上の非線形波動方程式を平面二次元に拡張した。

数値計算においては、数値誤差に起因する逸散及び分散を防ぐために、運動方程式中の一階微分項に対して補正項を導入する必要がある。また、非線形移流項については、風上差分方を用いることによって安定解を得ることができる。

本研究で得られた非線形波動方程式は、透過潜堤周辺波浪場の波浪変形の精度よい予測を可能にする。実験結果と計算結果を比較すると、潜堤背後での一致はよくないが、潜堤上に至るまでの波高分布に関しては十分な一致を得ることができる。

参 考 文 献

磯部ら (1991): 透過潜堤による非線形波浪変形について, 海岸工学講演会論文集, 第 38 巻, pp. 551-555.