

非圧縮条件および式 (I-4), (I-6) を考慮し, 発散定理を使えば

$$= \iint_{\partial T} \{V_m \tau_{m1s} - U_{ms} \sigma_{m1}\} n_1 dx \\ - \iint_{\partial E} \{V_m \tau_{m1s} - U_{ms} \sigma_{m1}\} n_1 dx \dots \dots \dots (I-9)$$

となる。ここで $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$ は領域 T, D の外向き法線ベクトルである。上式は Zick & Homsy (1982) が定常流に対して導いた方程式に一致する。時間項の効果はグリーン関数を通して代数的に入っている。

次に, 式 (I-6) および非圧縮条件により空間周期的グリーン関数を構成する。空間変数に関するフーリエ変換を式 (I-3) と同様にして定義し, 式 (I-6) をフーリエ変換すると

$$\left(i\omega\alpha + \frac{1}{R}k^2\right)\bar{U}_{ms} + ik_m \bar{q}_s \\ = \frac{\bar{\partial}_{ms}}{8\pi^3} e^{-ik \cdot \mathbf{y}} \sum_i \exp(-ik \cdot \mathbf{r}^i) \dots \dots \dots (I-10)$$

である。ここで, 波数 $\mathbf{k}=(k_1, k_2, k_3)$, $K=|\mathbf{k}|$, U および q_s の '—' はそれらのフーリエ変換を表わす。式 (I-10) の外力項は波長無限大の成分

$$\frac{1}{8\pi^3} \sum_i \exp(-ik \cdot \mathbf{r}^i) \sim \frac{1}{\tau_0} \delta(\mathbf{k}) \dots \dots \dots (I-11)$$

を持つことが, ポアソンの和の公式から示される。ただし, τ_0 は球体 1 個が占める周期的セルの体積である。この定数成分を圧力に含めるため, 圧力を空間平均成分とその変動成分に分けると次の関係式が得られる。

$$\bar{q}_s = \bar{q}_{s,av} + \bar{q}_s', \quad ik_m \bar{q}_s' = \frac{1}{\tau_0} \bar{\partial}_{ms} \bar{\partial}(\mathbf{k}) \dots \dots \dots (I-12)$$

一方, ポアソンの和の公式から

$$\sum_i \exp(-ik \cdot \mathbf{r}^i) = \frac{(2\pi)^3}{\tau_0} \sum_i \delta(\mathbf{k} - 2\pi \mathbf{k}^i) \dots \dots \dots (I-13)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}^i &= m_1 \mathbf{s}^{(1)} + m_2 \mathbf{s}^{(2)} + m_3 \mathbf{s}^{(3)} \\ \mathbf{k}^i &= n_1 \mathbf{b}^{(1)} + n_2 \mathbf{b}^{(2)} + n_3 \mathbf{b}^{(3)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I-14)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}^{(1)} &= \frac{1}{\tau_0} \mathbf{s}^{(2)} \times \mathbf{s}^{(3)}, \quad \mathbf{b}^{(2)} = \frac{1}{\tau_0} \mathbf{s}^{(3)} \times \mathbf{s}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(3)} &= \frac{1}{\tau_0} \mathbf{s}^{(1)} \times \mathbf{s}^{(2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I-15)$$

であり, m_1, m_2, m_3 および n_1, n_2, n_3 は任意の整数値をとるものとする。

式 (I-10) から空間平均量を差し引いたのち, 次の作用素 P_{mj}

$$P_{mj} = \delta_{mj} - \frac{k_m k_j}{k^2}, \quad G(k, \omega) = i\omega\alpha + \frac{1}{R}k^2 \dots \dots \dots (I-16)$$

を作用して圧力項を消去し代数計算すると,

$$\bar{U}_{ms} = \frac{P_{ms}(\mathbf{k})}{G(k, \omega)} \frac{1}{\tau_0} e^{-ik \cdot \mathbf{y}} \sum_i \delta(\mathbf{k} - 2\pi \mathbf{k}^i) \dots \dots \dots (I-17)$$

が得られる。このとき質量保存則は必然的に満たされて

いることに注意する。また, $\sum_i'$ は $\mathbf{k}^i=0$ を除いた成分について和をとることを意味する。逆変換の公式にしたがって上式を逆変換すると, 空間周期的グリーン関数

$$U_{ms} = \frac{1}{\tau_0} \sum_i' \frac{P_{ms}(2\pi \mathbf{k}^i)}{G(2\pi \mathbf{k}^i, \omega)} \cdot \exp\{2\pi i \mathbf{k}^i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})\} \dots \dots \dots (I-18)$$

が導かれる。先程と同様に, 非定常性の効果は上式の作用素 G の ω 依存性として入っている。

一方, 式 (I-4) をセル内の流体の存在域で積分すると運動量の式

$$F_m = -\tau_0 \left(i\omega\alpha V_{m,av} + \frac{\partial P_{av}}{\partial x_m} \right) \dots \dots \dots (I-19)$$

$$F_m = \iint_{\partial D} f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad f_m \equiv \sigma_{mj} n_j \dots \dots \dots (I-20)$$

となる。ここで, 下付き添字の 'av' は空間平均を表わす。さらに, 式 (I-9) に U_{ms} の空間周期性などを考慮すると, 定常流の場合と同じ方程式が得られる。

$$-V_s(\mathbf{y}) = -V_{s,av} + \iint_{\partial D} U_{ms}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ \mathbf{y} \notin \partial D \dots \dots \dots (I-21)$$

$$V_{t,av} = \iint_{\partial D} U_{sm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \in \partial D \dots \dots \dots (I-22)$$

以上を総合すると, 平均流の構成方程式は次のようにして求めることができる。式 (I-22) から f_m を $V_{m,av}$ の関数として求め, 式 (I-19) および式 (I-20) から平均圧力勾配と平均流速の関数を付ければよい。ところで, グリーン関数 (I-18) はすべての $\mathbf{k}^i$ に関する和で表わされているから, $\mathbf{k}^i$ を $-\mathbf{k}^i$ に置き換えても結果は変わらない。したがって, 指数関数部分は cosine の項のみとなる。また, 平均流が x_1 方向であるとき, 流れ場の x_1 軸に関する対称性および, 基礎方程式 (線形) の対称性から流れ場の x_2-x_3 平面に関する対称性

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_2) &= f_1(-x_2), & f_1(x_3) &= f_1(-x_3) \\ f_2(x_2) &= -f_2(-x_2), & f_2(x_3) &= f_2(-x_3) \\ f_3(x_2) &= f_3(-x_2), & f_3(x_3) &= f_3(-x_3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I-23)$$

を仮定することができる。

2-2. 積分方程式の近似

積分方程式 (I-22) の未知関数 $f_m(\mathbf{x})$ は球体表面で定義されている。ここでは, Zick & Homsy (1982) にしたがって $f_m(\mathbf{x})$ を体球関数

$$\phi^j(\mathbf{x}) = x_1^j x_2^j x_3^j \dots \dots \dots (II-1)$$

で展開し, その係数をガレルキン法

$$\iint_{\partial D} V_k \phi^j(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \iint_{\partial D} \phi^j(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \iint_{\partial D} U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \cdot f_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \dots \dots \dots (II-2)$$

により決定する。体球関数は球体表面で完備であるが直交しない基底なので, その従属性を調べる必要があるが上式の積分を解析的に計算できる利点がある。以上よ

り、積分方程式を解く際には球体間の相互作用、すなわち空間フーリエ・モードと球体表面のモードに関して近似することになる。この近似解は、連続の式は完全に満足するが、ストークス方程式および球体表面の境界条件に対する近似となっている。

2-3. 計算結果

球体間距離が球体半径に比べて大きく、球体表面のモード数が少なくても良い近似となる場合を扱う。したがって、球体間数として0次のモードのみに限定した。また、空間フーリエ・モードは30項までとった。計算結果を整理するために、球体間の相互作用がない場合を基準として圧力勾配と平均流速の関係を次式で与えた。

$$\xi \left(\frac{6\pi a}{R} L_1 + i\omega a \tau_0 \right) V_{av} = -\tau_0 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{av} \quad \dots\dots (III-1)$$

$$L_1 = -\frac{h^2}{3} + ih + 1, \quad h = s(1-i)$$

ここで、 a は球体半径、 τ_0 は球体1個を含む周期的セルの体積、 ω は振動数、 V_{av} および P はそれぞれ速度と圧力の時間に関するフーリエ係数である。また、パラメータ $s = (a^2 \omega / 2\nu)^{1/2}$ であり、球体半径と球体表面の境界層厚さの比を表し、無次元係数 ξ は s のみに依存する。球体間の相互作用がないときに $\xi = 1$ となる。物理的な意味を分かりやすくするために複素数を極座標表示し、 $\xi = |\xi| e^{i\phi}$ および

$$\frac{6\pi a}{R} L_1 + i\omega a \tau_0 = \left| \frac{6\pi a}{R} L_1 + i\omega a \tau_0 \right| e^{i\phi_1} \quad \dots\dots (III-2)$$

とすると、平均流の運動方程式は

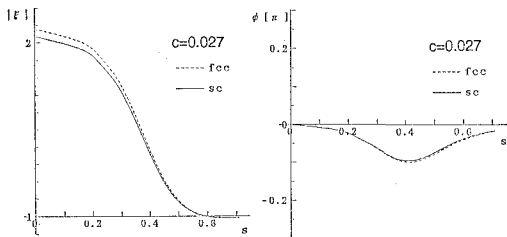


図-1(a) ξ の絶対値の周波数依存性 図-1(b) ξ の偏角の周波数依存性

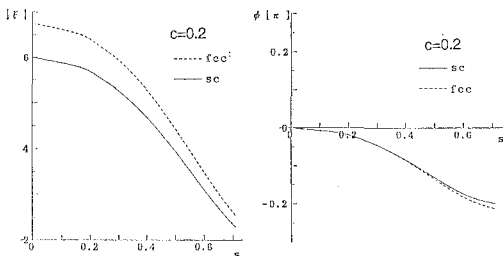


図-2(a) ξ の絶対値の周波数依存性 図-2(b) ξ の偏角の周波数依存性

$$|\xi| \left| \frac{6\pi a}{R} L_1 + i\omega a \tau_0 \right| e^{i(\phi + \phi_1)} V_{av} = -\tau_0 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{av} \quad \dots\dots (III-3)$$

となる。したがって、 ξ の偏角は平均流速と平均圧力勾配の位相のずれ、その大きさは単位の流速を流すために必要な圧力勾配の大きさに対応する。

図-1(a), (b) は、球体の濃度 $c=0.027$ のとき、図-2(a), (b) は $c=0.20$ のときの ξ の絶対値および偏角を示したもので、実線は球体配列が単純立方格子(sc)、点線は面心立方格子(fcc)の場合である。同一濃度のとき、面心立方格子の方が圧力勾配が大きくなる。また、振動数の増加にともなって球体間相互作用が小さくなり $|\xi|$ は1に漸近する。図-1,2(b) から、他球体の存在は流速の位相を進める効果があることがわかる。

球体間の相互作用を見るために、 x_1 方向(平均流の方向)流速の x_2 軸分布を示したのが図-3(a), (b) である。 s の増加に伴って境界層が薄くなり相互作用が減少している。また、球体表面のモードを0次までしかとっていないため、球体の存在域 $x_2 \leq 0$ で厳密に境界条件を満足せず、流速のスリップが生じている。

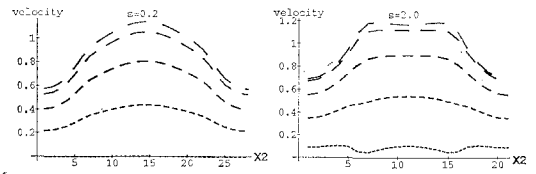


図-3(a) $s=0.2$ 図-3(b) $s=2.0$

球体間の x_1 方向流速 ($c=0.027$, 点線間隔の大きい順に $t=0, \pi/8, 2\pi/8, 3\pi/8, 4\pi/8$)

3. 実験

3-1. 実験方法

多孔体として市販のビー玉(直径 $2a = 1.6$ cm)を詰めたもの(空隙率39%)を用い、これをU字管振動流装置の測定部に設置した(図-4)。多孔体中の圧力 P_A 、 P_B は間隙水圧計(直径1cm、厚さ0.5cm)をポーラ

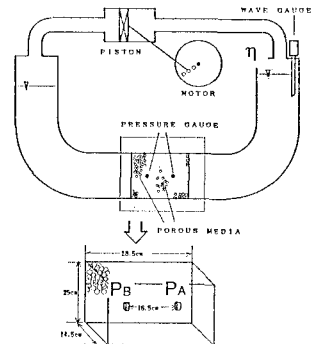


図-4 実験装置の概略

表-1 実験ケース (s, Re^*, ξ)

Case	s	Re*	$ \xi $	$\text{Arg}(\xi)/\pi$
1-1	7.59	441	3.298	-0.461
1-2	7.84	472	3.191	-0.470
1-3	8.53	557	3.057	-0.463
1-4	9.23	601	3.114	-0.474
2-1	7.56	1332	18.017	-0.458
2-2	7.68	1374	17.831	-0.469
2-3	7.98	1485	17.383	-0.476
2-4	8.12	1558	17.054	-0.471
2-5	8.22	1596	17.093	-0.471
2-6	8.38	1657	17.138	-0.414
2-7	8.59	1768	16.502	-0.413
2-8	8.83	1867	16.162	-0.438
2-9	9.03	1950	16.838	-0.415
2-10	9.24	2040	16.869	-0.451
2-11	9.53	2202	16.554	-0.401
2-12	9.77	2315	16.157	-0.459
2-13	9.94	2398	16.393	-0.439
2-14	10.08	2527	16.113	-0.472
2-15	10.22	2566	17.082	-0.467
3-1	7.56	2226	30.417	-0.502
3-2	7.76	2347	29.450	-0.497
3-3	8.03	2510	28.780	-0.510
3-4	8.22	2633	28.460	-0.499
3-5	8.40	2772	29.290	-0.524
3-6	8.65	2941	28.530	-0.516
3-7	8.90	3109	28.870	-0.533
3-8	9.13	3247	28.520	-0.516
3-9	9.45	3455	27.040	-0.473
3-10	9.88	3775	27.200	-0.492
3-11	10.13	3841	27.250	-0.452

ス・メディア内の2ヶ所に設置して測定し、平均流速はU字管振動流装置の1端の水位データから求めた。実験は、まず振動流の振幅を固定し(1.5 cm, 4.7 cm, 7.3 cm)、次に振動周期を変えて行なったため、結果は無次元量 $\varepsilon = a/A$ (A は振動流の振幅)、レイノルズ数、および s 、により整理した。

3-2. 実験結果

実験結果は、式(III-1)で定義した無次元係数 ξ により整理した。ただし、実験のレイノルズ数は1000のオーダーであり、実験では ξ パラメータ s のみでなく、レイノルズ数 $Re^* \equiv Aa\omega/\nu/\lambda$ (空隙率 $\lambda = 0.39$ で補正したレイノルズ数) にも依存する。表-1 に本実験条件およびの値を示す。

図-5 に Case 1-1, Case 2-1, Case 3-1 における2点の圧力および水位の時間波形を示す。表-1 から分かるように、これらは振動数 (s) を固定しレイノルズ数 Re^* を増加させた場合に相当する。圧力波形の0点付近の大きな乱れは、平均流の流速が0の時に生じており、その原因は可視化実験などを通じて調べる必要がある。また Case 2-1, Case 2-10 は同一の振動流振幅下における実験データである。ここで、振動流振幅を固定しても振動数を変えればレイノルズ数も変化していることに注意する。そこで、表-1 に示される結果をこの現象を支配する2つのパラメータで整理した。まず、 ε を固定し s を変化させたのが図-6 である。パラメータ ε を固定したとき ξ の s 依存性は弱いことがわかる。

ところで、物理的には s は流体の局所慣性、 Re^* は移流慣性に対応するから、 $s-Re^*$ 空間で ξ を最小自乗法を使って平面で近似したものを図示すると、図-7 のようになる。この図から振動数を増加させると、 $|\xi|$ が急激に減少することがわかる。また、この近似は圧力勾配を平均流速の1次と2次の線形和で近似することに対応する。ただし、本実験ではストークス方程式の球体1個にかかる圧力勾配を基準としており、 ξ がそのまま圧力勾配とはならないことに注意する。参考までに 図-8 に、球体1個がストークス流れの中に置かれたときの全圧力勾配

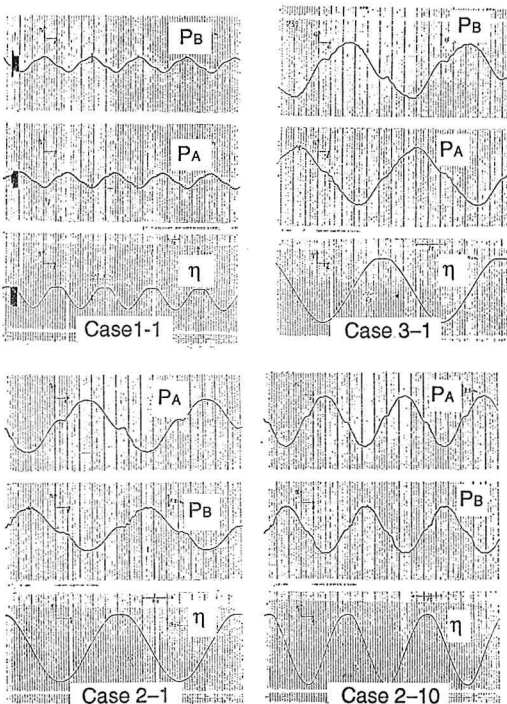


図-5 圧力および水位の実験データ

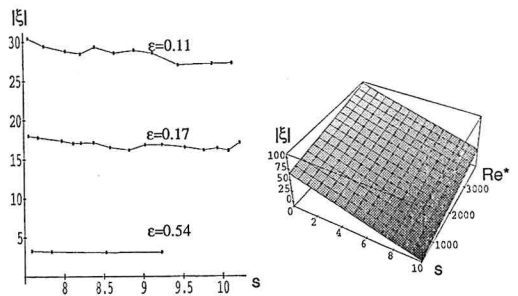


図-6 ξ の s 依存性 ($\varepsilon = a/A$)

図-7 ξ の s, Re^* 依存性

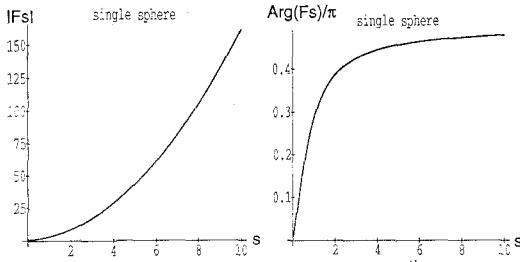


図-8 単一球体に働く全圧力勾配 ($c=0.29$)

$$F_s \equiv (6\pi\mu a L_1 + i\omega\rho\tau_0)/6\pi\mu a$$

を示す。

また、表-1 から ξ の偏角は負であり、本実験範囲ではほぼ $(-\pi/2)$ となった。これらの結果は、理論による予測と一致する。

4. 結 語

本研究の目的は、非定常ダルシー則について検討する

ことであったが、次の点が重要な課題として残った。

(1) レイノルズ数が1から10ぐらいのオーダーの実験ができなかったこと、および、理論では濃度が低い場合しか数値計算できなかったこと。

(2) 周期配列した球体間の非定常ストークス流れでも、軸対称性が破れるために複雑な流線を描く可能性があり、低レイノルズ数の実験とあわせて、より詳細な研究を必要とする。

(3) 実験から ξ を補間して近似し、式(III-1)を構成方程式として、ポーラス・メディア内を伝播する長波を計算する。

参 考 文 献

- Riley, N. (1967): Oscillatory viscous flows. Review and Extension, J. Inst. Maths. Applics., Vol. 3, pp.419-434.
 Zick, A. A. and Homsy, G. M. (1982): Stokes flow through periodic arrays of spheres, J. Fluid Mech., Vol. 115, pp.13-26.