

PSI-セルモデルによる Saltation 層の解析

後藤 仁志*・辻本 哲郎**・中川 博次***

1. ま え が き

流砂と飛砂は、一方向流中の砂の流送という点で共通した現象であり、両者の流送過程は同一の力学モデルにより統一的に理解されるべきものである。流砂、飛砂の流送過程においては、底面付近に掃流砂が高密度に存在する掃流層が形成される。掃流層内を流送される砂粒子の運動を適切に記述するには、底面との不規則衝突を繰り返しながら確率的に流送される砂粒子の集合体として粒子系をとらえることが必要であり、粒子系全体の構造は、個々の砂粒子の運動過程の確率論的解析に基づいて論じられるべきものである。従来の流砂の確率モデルにおいては、移動床系のこのような側面が重視され、確率的パラメータに支配された砂粒子運動の力学的理解が進められ、流砂の局所非平衡性の理解に大きな進展をもたらしたが、流れ場については清水流近似を用いた簡単な取扱いで済まされ、粒子系から流れ系への影響すなわち粒子混入による流れ構造の変化は考慮されなかった。

掃流層には砂粒子が高密度で存在するため、その力学的構造を明らかにするには、粒子混入の影響による流れ構造の変化の取扱いが焦点となると考えられる。本研究では、粒子混入による影響を負の生成項として運動量式に反映させる PSI-セル (Particle-Source-In-Cell) モデル (Crowe et al., 1977) を導入することにより、 $k-\epsilon$ 乱流モデルによる流れ場の数値シミュレーションと successive saltation による掃流砂の確率論的シミュレーション (辻本・中川, 1984) とを融合させる。これによって、これまで確率論の適用において運動量保存則の面での不十分さが指摘されてきた掃流力の大きい領域における掃流層のシミュレーションモデルが構築される。本シミュレーションによると、従来の清水流近似を仮定した確率モデルでは説明不可能であった掃流力の大きい領域における掃流層の特性に関する実験結果が良好に説明される。なお、極めて高濃度の掃流層では、粒子間の相互作用が無視できないと考えられるが、本研究において

は、議論の焦点を明確化するため、粒子間の相互作用を無視し、流体・粒子間の相互作用に限定した議論が展開される。

2. シミュレーションモデル

掃流砂の運動形態は、転動・滑動・saltation に分類されるが、saltation は広範囲の掃流力に対して有効な運動形態であり、特に掃流力の大きい領域で卓越することが知られている。本研究においては、粒子運動を記述するモデルとして、底面と砂粒子の不規則な衝突・反発を考慮して 2 次元反発モデルを組み込んだ不規則継続跳躍モデルを採用する。掃流砂の運動の模式図を図-1 に示す。

掃流砂は、単一の saltation 運動と不規則な幾何形状を有する底面との衝突・反発を繰り返しつつ流送される。単一の saltation の軌跡は、底面での初速度を初期条件とする運動方程式により決定論的に追跡されるが、初速度自体が、底面の不規則性の影響で確率論的となるので、saltation 軌跡も確率分布を持つ。底面との衝突・反発が saltation に与える影響は、saltation のメカニズムについて考察する際の最も重要な要素の一つである。底面との衝突・反発は、①saltation 粒子の持つ運動量を水平方向から鉛直方向に変換して saltation 運動を維持するとともに、②非弾性衝突に起因する運動エネルギーの損失を生じさせる。さらに、掃流砂濃度密度が十分に大きい場合には、粒子間衝突が頻繁に生じて、流体・粒子間の相互作用に加えて、粒子間相互の干渉も考慮する必要が生じる。ただし、掃流力がそれほど大きくない領

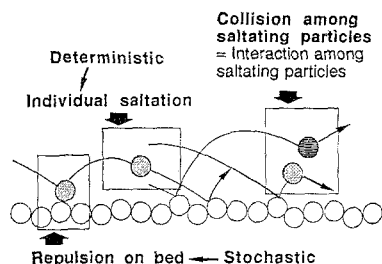


図-1 掃流運動の模式的表現

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室

** 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部環境地球工学教室

域では、粒子間衝突の頻度もそれほど大きくないことに加えて、粒子間衝突による運動エネルギーの損失は底面との衝突による損失に比べて小さいものと推察されるので、粒子間衝突による影響はそれほど大きくないと考えられる。本研究では、粒子間衝突の効果が副次的な範囲に限定した議論が展開される。

本研究では、混相流的な観点から、掃流層を固液二相流として扱い、液相である流れ系には Euler 的アプローチを、固相である粒子系には Lagrange 的アプローチを適用する。固相から液相への影響を表す手法として PSI-セルモデルが導入され、固相と液相のカップリングが行われる。

流れ系のモデルとしては、平均流の運動方程式に粒子混入の影響を表現する負の生成項を加えた $k-\varepsilon$ 乱流モデルが用いられ、粒子系のモデルとしては、底面との不規則衝突事象を考慮した successive saltation モデルが用いられる。

2.1 流れ系のモデル

流れ系は、平均流の運動方程式に粒子混入の影響を表す負の生成項を有する $k-\varepsilon$ 乱流モデルにより数値模擬される。基礎方程式は、続連式

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

平均流の運動方程式

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = & g \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\Gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \Gamma \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} + S_{PV} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = & - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Gamma \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\Gamma \frac{\partial V}{\partial y} \right) + S_{PV} \end{aligned} \quad (3)$$

乱れエネルギー k の輸送方程式

$$\begin{aligned} U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right\} + G - \varepsilon \end{aligned} \quad (4)$$

エネルギー逸散率 ε の輸送方程式

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right\} \\ & + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} G - C_{2\varepsilon} \varepsilon) \end{aligned} \quad (5)$$

から構成される。ここに、 Γ ：有効粘性係数、 ν ：渦動

表-1 モデル定数の標準推奨値

C_μ	C_{e1}	C_{e2}	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

粘性係数、 G ：乱れエネルギーの発生率であり、これらは次のように与えられる。

$$\Gamma = \nu_t + \nu; \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6)$$

$$G = \nu_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (7)$$

ここに、 x ：流下方向の座標軸、 y ： x 軸に直交する鉛直方向の座標軸であり、 U, V ： x, y 方向の平均流速成分、 P ：静水圧からの平均偏差圧力、 h ：水深、 ρ ：水の密度、 θ ：水路床が水平方向となす角度である。 S_{PV}, S_{PV} は粒子系から流れ系への影響を表現する負の生成項であり、流れ場の計算格子に出入りする際の砂粒子の速度差を統計処理することにより評価される（評価手法については後述する）。

モデル化に伴う定数 $C_\mu, C_{e1}, C_{e2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$ については、表-1 に示す Launder and Spalding (1974) による標準推奨値を用いることとする。

2.2 粒子系のモデル

粒子系の運動は、単一砂粒子の運動の重量として記述されるものとする。すなわち、単一砂粒子の運動は、

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{du_p}{dt} \\ = \frac{1}{2} C_D \rho A_2 d^2 \sqrt{(U - u_p)^2 + (V - v_p)^2} (U - u_p) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{dv_p}{dt} \\ = \frac{1}{2} C_D \rho A_2 d^2 \sqrt{(U - u_p)^2 + (V - v_p)^2} (V - v_p) \\ - \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g A_3 d^3 \end{aligned} \quad (9)$$

で記述される。ここに、 u_p, v_p ：掃流粒子の水平方向、鉛直方向の速度成分、 C_M ：付加質量係数、 σ ：砂粒子の密度、 A_2, A_3 ：2次元、3次元の形状係数である。 C_D は抗力係数であり、Rubey (1933) の表現にならうと、

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{24}{Re}; \quad Re = \frac{\sqrt{(U - u_p)^2 + (V - v_p)^2}}{\nu} \quad (10)$$

で与えられる。 $C_{D\infty}$ は砂粒子の形状に依存し、球については 0.4、自然砂については 2.0 が適当とされる。

saltation 運動を全体として確率的なものとする原因は、底面との不規則な衝突・反発であり、衝突・反発過程のモデル化が運動記述の鍵である。仮想反発面との衝突の前後の砂粒子の速度成分 (u_{gin}, v_{gin}), (u_{gout}, v_{gout})

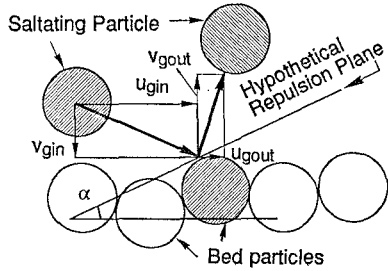


図-2 底面との衝突・反発

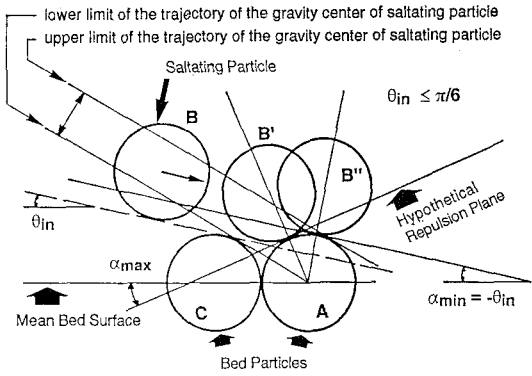


図-3 仮想反発面傾斜角

の関係は、仮想反発面傾斜角を α として、

$$\begin{bmatrix} u_{gout} \\ v_{gout} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \cdot \cos^2 \alpha - f \cdot \sin^2 \alpha & -2 \cos \alpha \sin \alpha \\ -2 \cos \alpha \sin \alpha & e \cdot \sin^2 \alpha - f \cdot \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{gin} \\ v_{gin} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる (図-2 参照)。ここに、 e, f : 反発係数である。ここでは、辻本・中川 (1984) の2次元反発モデルと同様に、底面を構成する砂粒子が整然と並んだ理想的な格子配列を想定し、仮想反発面傾斜角の確率分布を誘導することを試みる。図-3 に示すように、底面を構成する砂粒子の中心が全て同一平面上にある場合でさえ衝突される底面構成粒子Aに対する掃流粒子Bの相対位置は1粒径以下の任意性を有し、このため仮想反発面傾斜角は確率分布する。若干の幾何的考察を経て、仮想反発面傾斜角は

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \{ (1 - \xi_0) \sin \theta_{in} - 1 \} - \theta_{in} & \text{for } \theta_{in} \leq \frac{\pi}{6} \\ \arcsin \left\{ \left(\frac{1}{2} - \xi_0 \right) \sin \theta_{in} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_{in} \right\} & \\ -\theta_{in} + \frac{\pi}{2} & \text{for } \theta_{in} > \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。ここに ξ_0 は (0,1) の一様乱数である。

継続跳躍をシミュレートする場合には、底面に砂粒子が衝突する度に衝突直前の速度から入射角 θ_{in} を評価し、乱数を1つ発生させて、式 (12) により仮想反発面傾斜角を求めて式 (11) に代入すると、衝突直後の砂粒子速度が算定される。

2.3 流れ系と粒子系の相互作用の評価と計算手続き

粒子系から流れ系への影響は、平均流の運動方程式中に負の生成項を導入することにより考慮され、生成項の評価には、PSI-セルモデルが導入される。PSI-セルモデルは、離散系としての粒子系と連続系としての流れ系のカップリング手法である。すなわち、saltation 粒子の運動を追跡して、流れ系の計算格子から抜け出す際と計算格子に突入する際の砂粒子移動速度の差を求め、粒子が流れ系から獲得する運動量を評価することにより、その反作用として粒子混入に伴う流の系の運動量損失が算定される。

粒子系から流れ系へのフィードバックを表す負の生成項は、

$$\left. \begin{aligned} S_{PUj} &= -\frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} \frac{\sigma}{\rho} q_B w_j (u_{pout i} - u_{pin i})_j \frac{1}{\Delta V_j} \\ S_{PVj} &= -\frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} \frac{\sigma}{\rho} q_B w_j (v_{pout i} - v_{pin i})_j \frac{1}{\Delta V_j} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

で与えられる (図-4 参照)。ここに、 q_B : 掃流砂量、 u_{pinj}, u_{poutj} : 掃流粒子が第 j 層に突入する際と第 j 層から出る際の速度の水平成分、 v_{pinj}, v_{poutj} : 掃流粒子が第 j 層に突入する際と第 j 層から出る際の速度の鉛直成分、 N_j : 第 j 層を通過する砂粒子の総数、 ΔV_j : セル j の体積、 w_j : 第 j 層の重み係数であり、

$$w_j = \int_{y_{minj}}^{y_{maxj}} f_B(y) dy \quad \dots\dots\dots (14)$$

と表される。ここに y_{maxj}, y_{minj} : 第 j 層の上限・下限であって、流れ系の計算格子に適合させて与えることとする。 $f_B(y)$ は saltation 粒子の鉛直方向存在確率密度であり、粒子の移動軌跡のシミュレーション結果を統計処理することにより評価される。

相互作用系の収束解は、以下のような手順で計算され

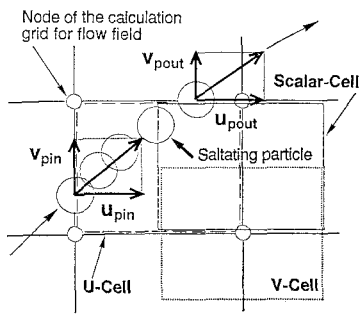


図-4 負の生成項の算定

る。(i) 砂粒子を含まない流れ場(清水流)の解を求め、(ii) 解かれた流れ場において saltation を数値模擬して、saltation 軌跡群を求める。次に、シミュレーション結果から、(iii) 流れ場の各計算格子に出入する際の砂粒子移動速度の差を求めて、セルを横切る際に砂粒子が獲得する運動量を評価する。(iv) 砂粒子が獲得する運動量はすなわち流れ場が失う運動量であるから、式(13)を用いて平均流の運動方程式の負の生成項を評価し、(v) 再び流れ場の解を求めることにより、粒子混入の影響による流れの構造変化を推定する。(vi) 流れ系・粒子系ともに収束するまで以上の過程を繰り返す。

流れ系の境界条件は、底面近傍の第1格子点で対数則を仮定する壁法則を用い、水面では自由水面による乱れエネルギーの減衰効果を考慮した福津・中川(1987)の方法を用いている。流入部・流出部では周期境界条件を課することとした。

流れ系の基礎方程式は、コントロール・ボリューム法により離散化され、Gosman(1976)のTEACHコードに従って計算コードが作成された。計算格子は水平方向に等間隔で10分割、鉛直方向に掃流層付近を密にした不等間隔で16分割して配置した。なお、水平方向の格子間隔は水深に等しく採った。

粒子系のシミュレーションの計算時間スケールは、1/500秒としたが、この時間スケールは、本シミュレーションで対象とする領域の上限に当たる $\tau_* = 0.45$ において、平均的 saltation を40ステップ程度に分割して追跡することを相当する。

3. シミュレーション結果と考察

ガラス・ビーズ(粒径 $d=0.5$ cm, 比重 2.60)を用いて開水路実験を行い、掃流粒子の運動特性を実験的に把握し、シミュレーションモデルとの比較を行った。実験条件を表-2に示す。シミュレーションは、④粒子混入の影響を考慮しない条件(以下、「清水流型」と呼ぶ)と⑤粒子混入の影響を考慮した条件(以下、「混相流型」と呼ぶ)の2種の条件について実施した。図-5に、砂粒子の鉛直方向存在確率密度についての比較を示す。混相流型のシミュレーション結果は、清水流型に比べて重心が低く、分布が下方で突出し、上方で小さくなる傾向を示しており、実験結果との一致も良好である。図-6は、砂粒子移動速度の水平方向成分について示したものである。混相流型といえども、分布形状まで含めて詳細に再現するには至っていないが、清水流型では過大評価される移動速度が、混相流型では下方修正され、実験結果との一致と言う点では大幅な改善が認められる。

次に、種々の掃流力に対して、同様のシミュレーションを繰り返すことにより、掃流力に対する saltation 特性の変化について検討を加えた。図-7は、saltation の

表-2 実験条件

エネルギー勾配	$L_e=0.02$
水深	$h=8.29$ cm
流量	$q=1200$ cm ² /sec
断面平均流速	$U_m=144.75$ cm/sec
摩擦速度	$u_* = 13.56$ cm/sec
無次元掃流力	$\tau_* = 0.23$
Froude数	$F_r = 1.61$
砂粒 Reynolds 数	$Re_* = 7237$

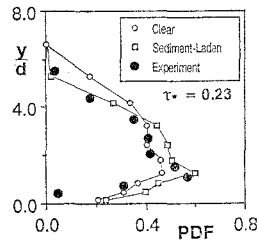


図-5 砂粒子の鉛直方向存在確率密度

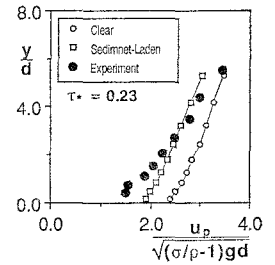


図-6 砂粒子の移動速度の水平成分

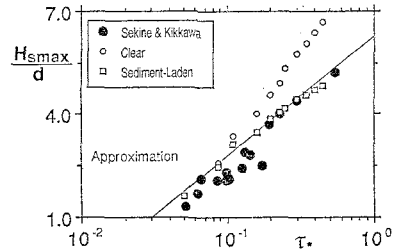


図-7 掃流層厚

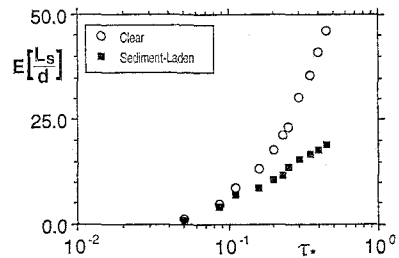


図-8 saltation 長

最大飛高すなわち掃流層厚と掃流力の関係を求めたものである。図には、関根・吉川(1988)による実験値を併せてプロットしているが、清水流型のシミュレーションでは掃流力の大きい領域で過大評価される掃流層厚の変化が、混相流型では良好な予測に是正されていることがわかる。また、図-8は、掃流力の変化に対する saltation 長のついて示したものであるが、清水流型のシミュ

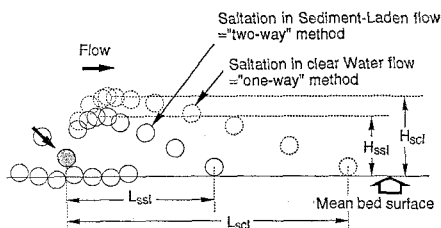


図-9 saltation の形状変化

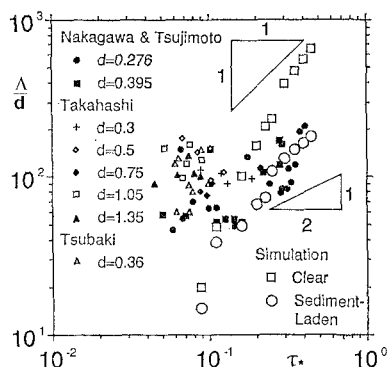


図-10 平均 step length

レーションでは saltation 長がやはり過大評価となっていることが理解できる。清水流近似におけるこれらの過大評価は、掃流力が大きいほど顕著であるが、saltation 長の方が、掃流層以上に過大評価される結果となる。このことは、図-9 に示すように、清水流型のシミュレーションによる saltation が、混相流型のそれより偏平な形状を有することを示している。

掃流砂の運動距離スケールである step length が、successive saltation 長として定義されることを利用して、掃流力の変化に対する平均 step length の変化をシミュレーションから評価し、既存の実験値と比較したのが、図-10 である。実験結果は、掃流力の大きい領域において掃流力の $1/2$ 乗に比例する傾向を示している。清水流型のシミュレーションでは 1 乗比例の傾向が見られるのに対して、混相流型は $1/2$ 乗比例の傾向をほぼ良好に説明している。定量的な面においても、特に掃流力の大きい領域で、清水流型は極端な過大評価を与える結果となるのに対し、混相流型は実験結果を良好に模擬している。これらの結果より、掃流力の大きい領域におい

て、流れ系と粒子系の相互作用が重要であることが示唆される。

4. あとがき

本研究では、PSI-セルモデルを用いることにより、固液二相流として掃流層をモデル化し、掃流粒子の運動特性に関する実験結果と比較して、モデルの適応性について検討した。シミュレーション結果は、従来の確率モデルで導入されていた清水流の仮定が、step length など特性量を掃流力の大きい領域において過大評価することを示しており、掃流層における粒子系と流体系の相互作用の重要性が明らかとなった。

本研究で流体・粒子間の相互作用を考慮することにより、確率モデルが従来より広範囲の掃流力に対して適用可能であることが明かとなったが、今後は、粒子間相互の干渉についても検討を加えて、さらに高濃度の粒子流についても適用できるようモデルの改良を行ってゆく予定である。本研究における流れ系の解析コード作成にあたっては、京都大学大型計算機センターのプログラムライブラリ：TEACH-TB（作成者：F.J.K. Ideriah, A. D. Gosman & W.M. Pun, 改訂者：武本行正）を参考にした。

最後に、本研究を遂行するにあたり、京都大学大学院、渡辺幹広君・井上裕介君に、実験およびデータ整理について熱心な協力を得たことを記して、謝意を表する。

参考文献

- 関根正人・吉川秀夫 (1988): 掃流砂の停止機構に関する研究, 土木学会論文集, 第399号, pp. 105-112.
- 辻本哲郎・中川博次 (1984): 掃流粒子の Saltation の確率過程論的解析, 土木学会論文集, 第345号, pp. 83-90.
- 瀬津家久・中川博次 (1987): 修正 $k-\epsilon$ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算, 土木学会論文集, 第387号, pp. 126-134.
- Crowe, C. T., M. P. Sharma and D. E. Stock (1977): The particle-source-in cell (PSI-CELL) model for gas-droplet flows, Jour. of Fluids Eng., pp. 325-332, 1977.
- Gosman, A. D. and J. K. Ideriah (1976): TEACH-T, A general computer program for two-dimensional, turbulent, recirculating flows, Dept. of Mech. Eng., Imperial College of Technology, London S.W. 7.
- Launder, B. E. and D. B. Spalding (1974): The numerical computation of turbulent flow, Computer Method in Applied Mech. and Eng., Vol. 3, pp. 269.
- Rubey, W. W. (1933): Settling velocities of gravel, sand and silt, American Jour. of Science, Vol. 25, No. 148.