

弱混合型河口密度流の動的解析

堀 口 孝 男*・ 浜 田 悦 子**

1. はじめに

スカイフ・シェーンヘルドの提案以来、弱混合型河口密度流における塩水くさびは、満潮時で海水層の流速が0になるものとして、塩水くさびの形状と侵入長を求める方法が利用されてきている。しかしながら実態からみると、満潮時に海水層は全域にわたって速度が0とはならず、また最大侵入長は満潮時とは異なる時刻に生じてくることが指摘されている。このため、塩水くさびの挙動は潮せき変動に応じた動的な解析によって明らかにすることが望まれ、種々の検討がなされている。その代表的研究として須賀(1977)が行っており、陰解法に基づく複雑な数値計算を駆使して実験結果と対比し、その整合性を検証している。この小論では近似的解法としてtwo-step Lax-Wendroff 型の陽解法を採用し、数値計算を簡略化することを試みたものである。またこの計算方式の延長上で、同種の河川の分岐と合流に関する近似的取扱い、河口付近に河口堰を設置した場合の水理的な取扱方法についても検討を行っている。

2. 二層不定流方程式の取扱方法

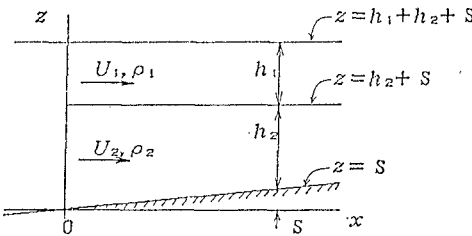
図一のごとく河口を原点として上流に向けて水平に x 軸をとり、 z 軸は鉛直上方に正とする。suffix の 1, 2 は淡水層、海水層を表わし、密度を ρ 、水深を h 、河床高を S 、流速を U とおく。弱混合型としているので、両層間の交換現象は無視している。河川断面は矩形としその幅員を b とするとき、上層の連続式は

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + h_1 U_1 \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

運動方程式は次式で示される。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + g \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} \right\} \\ &+ \frac{f_i}{2} \frac{|U_1 - U_2| (U_1 - U_2)}{h_1} = 0 \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

下層の連続式は



図一 弱混合型河口密度流の座標系

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} + h_2 U_2 \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} + (1 - \epsilon) g \frac{\partial h_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} + g \frac{\partial S}{\partial x} \\ &- \frac{f_i}{2} \frac{|U_1 - U_2| (U_1 - U_2)}{h_2} + \frac{f_b}{2} \frac{|U_2| U_2}{h_2} = 0 \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

以上の式で、 $\partial S / \partial x$ は河床勾配、 f_i は両層境界面の摩擦抵抗係数、 f_b は河床面のそれである。また ϵ は $\epsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$ を示す。

ここで $Q_1 = b h_1 U_1$ 、 $Q_2 = b h_2 U_2$ と流量の表現を用い、式(1)~(4)を操作すると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} \\ &= \frac{1}{\Phi} \left[-\frac{\partial S}{\partial x} \left(\epsilon - \frac{U_1^2}{g h_1} - \frac{U_2^2}{g h_2} \right) \right. \\ &\quad - \frac{f_i}{2} \frac{|U_1 - U_2| (U_1 - U_2)}{g h_1} \left(\epsilon - \frac{U_2^2}{g h_2} \right) \\ &\quad - \frac{f_i}{2} \frac{|U_1 - U_2| (U_1 - U_2)}{g h_2} \cdot \frac{U_1^2}{g h_1} \\ &\quad + \frac{f_b}{2} \frac{|U_2| U_2}{g h_2} \frac{U_1^2}{g h_1} - \frac{1}{b g h_1} \frac{\partial Q_1}{\partial t} \left(\epsilon - \frac{U_2^2}{g h_2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{b g h_2} \frac{\partial Q_2}{\partial t} \frac{U_1^2}{g h_1} + \frac{2 U_1}{g h_1} \frac{\partial h_1}{\partial t} \left(\epsilon - \frac{U_2^2}{g h_2} \right) \\ &\quad - \frac{2 U_2}{g h_2} \frac{\partial h_2}{\partial t} \frac{U_1^2}{g h_1} + \frac{U_1^2}{b g} \frac{\partial b}{\partial x} \left(\epsilon - \frac{U_2^2}{g h_2} \right) \\ &\quad \left. - \frac{U_2^2}{b g} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{U_1^2}{g h_1} \right] \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

* 正会員 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科
 ** 正会員 工修 運輸省 港務局 開発課

$$\Phi = \left\{ \varepsilon - \frac{U_1^2}{gh_1} - \frac{U_2^2}{gh_2} + \frac{U_1^2}{gh_1} \frac{U_2^2}{gh_2} \right\}$$

が得られる。各項のオーダーを比較するため、

$$\Phi \approx \left(\varepsilon - \frac{U_1^2}{gh_1} \right) \approx \frac{U_1^2}{gh_1} \approx \left(\varepsilon - \frac{U_2^2}{gh_2} \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 10^{-4} \text{ 程度}$$

とみなすと、現実の河川状況からすれば淡水流量が一定のとき、式(5)の右辺第2項以下は概略 10^{-6} 以下のオーダーとなり、結局のところ

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。すなわち表層水面を水平とおくことが可能である。 S は河床高で与えられる値であり、 h_2 を求めれば h_1 は河口から水面は水平であるという条件から導くことができる。

次に式(1)~(4)の無次元化を行う。代表的スケール量として、水深 h_0 、流速 $C_0 = \sqrt{gh_0}$ 、時間 T 、距離 $l = C_0 \cdot T$ をとり、以下のように表わす。 $h_1 = h_0 \eta_1$ 、 $h_2 = h_0 \eta_2$ 、 $S = h_0 s$ 、 $x = l \xi$ 、 $U_1 = C_0 u_1$ 、 $U_2 = C_0 u_2$ 、 $t = T \tau$ とするとき、式(1)~(4)は次のように示される。

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \eta_1 u_1 \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} + \frac{\partial s}{\partial \xi} \\ + \frac{l}{h_0} \frac{f_i}{2} \frac{|u_1 - u_2| (u_1 - u_2)}{\eta_1} = 0 \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} + u_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} + \eta_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \eta_2 u_2 \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + (1 - \varepsilon) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} + \frac{\partial s}{\partial \xi} \\ - \frac{l}{h_0} \frac{f_i}{2} \frac{|u_1 - u_2| (u_1 - u_2)}{\eta_2} + \frac{l}{h_0} \frac{f_b}{2} \frac{|u_2| u_2}{\eta_2} \\ = 0 \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

実際に使用するのは式(9)、(10)である。差分化には発散を防ぐため、時間と空間に関し2次オーダーの精度を保つ必要があり、two-step Lax-Wendroff型を適用する。すなわち第1ステップとして n, j を時間と空間の刻みとするとき、式(9)は

$$\begin{aligned} \eta_{2,j+1/2}^{n+1/2} = \eta_{2,j+1/2}^n - \left\{ u_{2,j+1/2}^n (\eta_{2,j+1}^n - \eta_{2,j}^n) \right. \\ \left. + \eta_{2,j+1/2}^n (u_{2,j+1}^n - u_{2,j}^n) + \eta_{2,j+1/2}^n u_{2,j+1/2}^n \right. \\ \left. \times \frac{b_{j+1} - b_j}{b_{j+1/2}} \right\} \frac{\Delta \tau}{2 \Delta \xi} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

で表わす。同様に式(10)は次式で示される。

$$\begin{aligned} u_{2,j+1/2}^{n+1/2} = u_{2,j+1/2}^n - \left\{ u_{2,j+1/2}^n (u_{2,j+1}^n - u_{2,j}^n) \right. \\ \left. + (1 - \varepsilon) (\eta_{1,j+1}^n - \eta_{1,j}^n) + (\eta_{2,j+1}^n - \eta_{2,j}^n) \right. \\ \left. + (s_{j+1} - s_j) - \frac{l}{h_0} \frac{f_i}{2} \frac{|u_{1,j+1/2}^n - u_{2,j+1/2}^n|}{\eta_{2,j+1/2}^n} \right\} \frac{\Delta \tau}{2 \Delta \xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times (u_{1,j+1/2}^n - u_{2,j+1/2}^n) \cdot \Delta \xi \\ + \frac{l}{h_0} \frac{f_b}{2} \frac{|u_{2,j+1/2}^n| u_{2,j+1/2}^n}{\eta_{2,j+1/2}^n} \Delta \xi \Big\} \frac{\Delta \tau}{2 \Delta \xi} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

j を $j-1$ にすると $j-1/2$ における表現となる。また $u_{2,j+1/2}^n$ などとは、 $u_{2,j+1/2}^n = \frac{u_{2,j}^n + u_{2,j+1}^n}{2}$ で補間する。

第2ステップは次式で示される。

$$\begin{aligned} \eta_{2,j}^{n+1} = \eta_{2,j}^n - \left\{ u_{2,j}^{n+1/2} (\eta_{2,j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{2,j-1/2}^{n+1/2}) \right. \\ \left. + \eta_{2,j}^{n+1/2} (u_{2,j+1/2}^{n+1/2} - u_{2,j-1/2}^{n+1/2}) \right. \\ \left. + \eta_{2,j}^{n+1/2} u_{2,j}^{n+1/2} \frac{b_{j+1/2} - b_{j-1/2}}{b_j} \right\} \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi} \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2,j}^{n+1} = u_{2,j}^n - \left\{ u_{2,j}^{n+1/2} (u_{2,j+1/2}^{n+1/2} - u_{2,j-1/2}^{n+1/2}) \right. \\ \left. + (1 - \varepsilon) (\eta_{1,j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{1,j-1/2}^{n+1/2}) \right. \\ \left. + (\eta_{2,j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{2,j-1/2}^{n+1/2}) + (s_{j+1/2} - s_{j-1/2}) \right. \\ \left. - \frac{l}{h_0} \frac{f_i}{2} \frac{|u_{1,j+1/2}^{n+1/2} - u_{2,j+1/2}^{n+1/2}|}{\eta_{2,j+1/2}^{n+1/2}} \right. \\ \left. \times (u_{1,j+1/2}^{n+1/2} - u_{2,j+1/2}^{n+1/2}) \Delta \xi \right. \\ \left. + \frac{l}{h_0} \frac{f_b}{2} \frac{|u_{2,j+1/2}^{n+1/2}| u_{2,j+1/2}^{n+1/2}}{\eta_{2,j+1/2}^{n+1/2}} \Delta \xi \right\} \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

η_1 については式(6)から $\eta_{1,j}^n = \eta_0^n - \eta_{2,j}^n - s$ を利用する。ここで、 η_0^n は $H_0^n = h_0 \eta_0^n$ で河口の水位に相当する。以上の関係を模式化したのが図-2である。

河口で淡水層の内部フルード数が1となるか否かは議論のあるところであるが、計算上の処理としては、海側に原点を移動して内部フルード数が1となる位置を原点とすることも可能である。ここでは簡単化して河口を原点としている。 $j=0$ を原点とするとき、潮せきは $\eta_{2,0}^n$ に表示される。すなわち、

$$\eta_{2,0}^n = \eta_2^* + a \cos \left(\frac{2\pi}{12 \times 3600} n \Delta t \right) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで η_2^* は平均水位、 a は振幅、 Δt 秒は時間の刻みに相当する。淡水層は河口で常に内部フルード数が1となり淡水流量を一定としているので、 $\eta_{2,0}^n$ 、 $u_{1,0}^n$ は n のいかんによらず確定する。

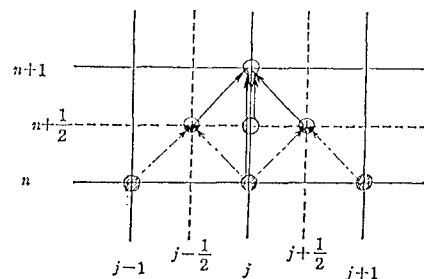


図-2 差分化の模式図

問題となるのは原点における下層の流速で、式 (14) にみられるように $(j-1/2)$ 点の値が入りこむため、この解法の適用は困難である。一方、 $j=0$ に別解法を適用するにしても、計算が安定となる解法は容易にみつけれない。これは今後の検討課題として今回の場合には、次の近似解法を用いている。いま河川内に侵入している海水層の平面積を A とするとき、 Δt 時間を小さくして h_2 の変動を微小量とすると、

$$b_0 h_{2,0}^n U_{2,0}^n \Delta t = A(h_{2,0}^n - h_{2,0}^{n-1})$$

これより

$$U_{2,0}^n = \frac{A(h_{2,0}^n - h_{2,0}^{n-1})}{b_0 h_{2,0}^n} \frac{1}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (16)$$

この計算では河口から一様に幅員が減少するものとしているので、塩水くさびの先端を j^* とするとき形状は台形となり、式 (16) を無次元で表示すると

$$u_{2,0}^n = \frac{\eta_{2,0}^n - \eta_{2,0}^{n-1}}{\eta_{2,0}^n} \frac{b_{j^*} + b_0}{2b_0} \frac{j^* \Delta \xi}{\Delta \tau} \quad \dots\dots\dots (17)$$

として取扱っている。

3. 数値実験の結果

代表的なスケール量は二層流の現象伝播速度が明確ではないことから、 h_0 は河口水深の2倍もしくはそれ以上にとり、 l は塩水くさびの侵入長に対して充分余裕のある長さにする。これから T が定まってくる。この数値実験では $h_0=5$ m, $C_0=\sqrt{g h_0}=7.0$ m/s, $T=1,000$ 秒として $l=7,000$ m においている。河口の限界水深を $h_c=0.5$ m, 満潮時 $h_{2,0}=1.5$ m, 干潮時 $h_{2,0}=1.0$ m, 淡水流量 $Q_1=50.79$ m³/s, 河床勾配は $1/10,000$, $\Delta x=$

70 m, $\Delta t=10$ 秒, $b_0=300$ m とおき、 $\Delta b=0.6$ m で Δx ごとに減少する。 $f_b/2$ は従来の実験結果から 0.001 にとり、 $f_b/2$ はマンニングの粗度係数から換算して 0.006 としている。無次元化することにより $\Delta \xi = \Delta \tau = 0.01$ となり、計算はかなり簡略化される。

初期条件は満潮のとき $t=0$, $u_2=0$ とまずおき、式 (7)~(10) の各式で時間項を省略して、初期の塩水くさび形状を求める。河口における限界水深

$$h_c = h_0 \eta_{1,0} = \sqrt[3]{\frac{q_{1,0}^2}{\varepsilon g}} \quad (q_{1,0} \text{ は単位幅流量})$$

$u_1 < 0$ などを考慮すると

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = \frac{1}{\left\{ \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \left(\frac{\eta_1}{\eta_{1,0}} \right)^3 - 1 \right\}} \times \left\{ \frac{l}{h_0} \frac{f_b}{2} \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_2} - \eta_1 \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial \xi} \right\} \quad \dots (18)$$

が得られる。式 (18) に前進差分を適用して、初期塩水くさびの形状が定まる。ただし、 $j=1$ では分母が 0 となるので逐次計算を用いる。初期の塩水くさびは河口の近傍で急勾配をもつが、潮せき運動の 3~4 サイクルで図-3 にみられるように緩やかになり、また流況も上層、下層ともに確定してくる。なお、上層の値は

$$\eta_{1,j}^n = \eta_{1,0} + \eta_{2,0}^n - \eta_{2,j}^n - s_j$$

$$u_{1,j}^n = \frac{Q_1}{c_0 h_0 b \eta_{1,j}^n}$$

から得られる。図-3 は満潮から干潮へ推移するときの塩水くさびと下層流速の変動を示したもので、干潮になるにつれて塩水くさびは侵入長を増加させ、下層流速は正、負の値に分かれる。侵入長の最大は中間潮のときに

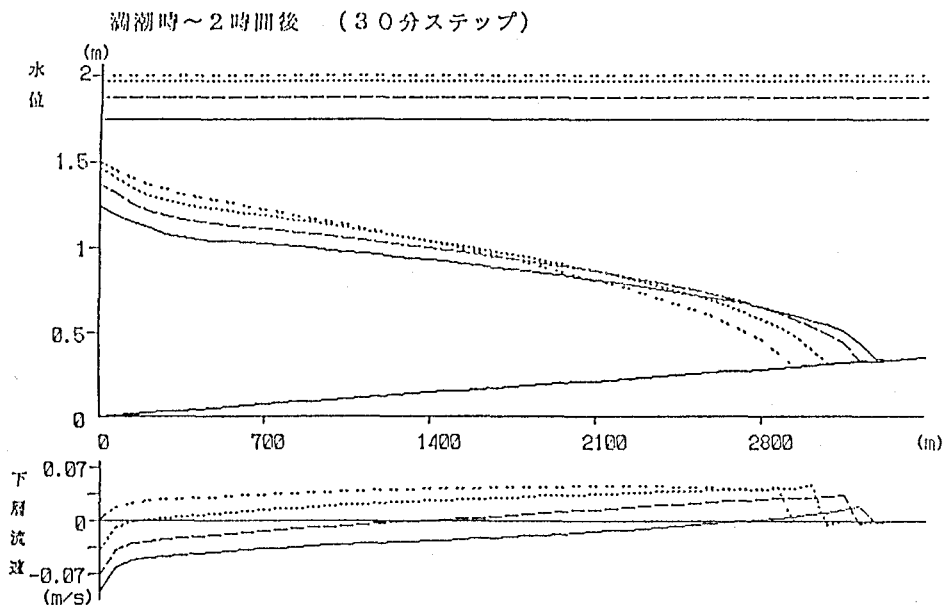


図-3 満潮から干潮に至る塩水くさびと下層流速

干潮～2時間後 (30分ステップ)

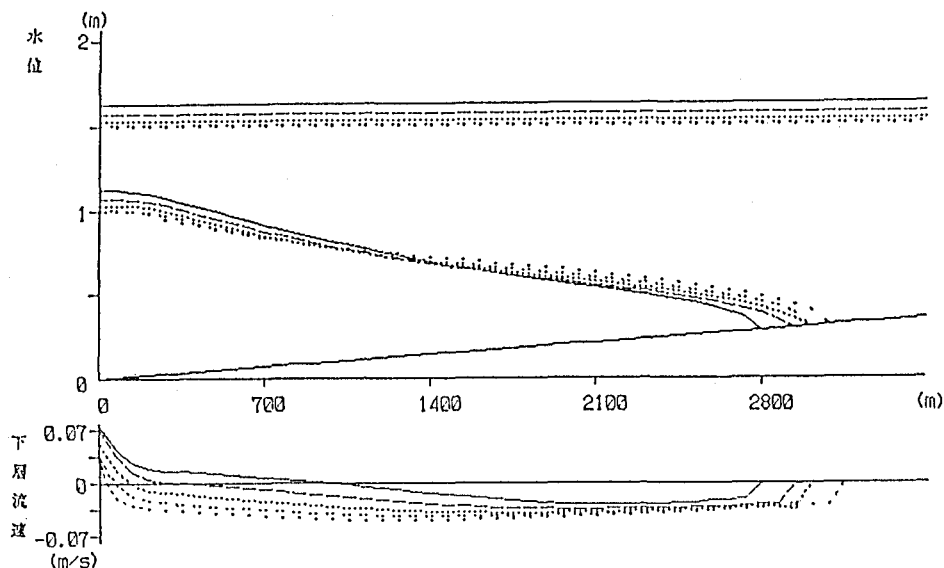


図-4 干潮から満潮に至る塩水くさびと下層流速

みられ、下層流速は各点で負の値となる。図-4 は干潮から満潮に至る途中の段階を示したもので、下層流速は河口から徐々に正となり、中間潮時で流速は各点で正となり、かつ侵入長は最短となる。塩水くさびの先端では層厚がなくなるので水平流速は0としているが、実際には複雑な現象で鉛直流速が存在するものとみられる。

4. 河川の分岐と合流の場合

前述と同様な条件で、河川の分岐と合流になるケースを取扱うことを試みた。河川形状は図-5 に示す通りで、河川(0)は前節と同じ条件、河川(1)は幅員150 m、河床勾配 $1/12,000$ 、河川(2)は幅員100 m、河床勾配は $1/10,000$ である。合流点の上流では幅員が250 m、河床勾配 $1/10,000$ である。合流点の j は $j^*=$

22 とおき、河川(2)では $j=20$ に相当する。初期水面の計算では $j=10$ の分岐点で、 $\eta_1^{(0)} = \eta_1^{(1)} = \eta_1^{(2)}$

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)} = \frac{b^{(0)} \cdot u_1^{(0)}}{b^{(1)} + b^{(2)}}$$

で与えられる。合流点では $j^*=22$ として

$$\eta_{1,22}^{(0)*} = \frac{\eta_{1,22}^{(1)} \cdot b^{(1)} + \eta_{1,20}^{(2)} \cdot b^{(2)}}{b^{(1)} + b^{(2)}}$$

$$u_{1,22}^{(0)*} = \frac{u_{1,22}^{(1)} \cdot b^{(1)} + u_{1,20}^{(2)} \cdot b^{(2)}}{b^{(1)} + b^{(2)}}$$

を用いて行なう。動的解析では $\Delta b/b$ の表現に若干の考慮を加え、例えば第2ステップで、 $j=10$ の点では

$$\frac{\Delta b^{(1)}}{b^{(1)}} = \frac{b_{10+1/2}^{(1)} - b_{10+1/2}^{(0)} \cdot b^{(1)} / (b^{(1)} + b^{(2)})}{b_{10}^{(1)}}$$

などの表現を用いている。

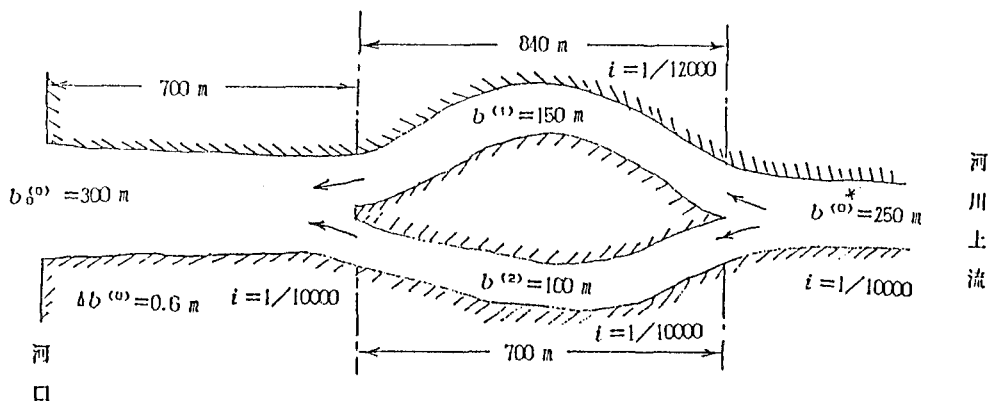
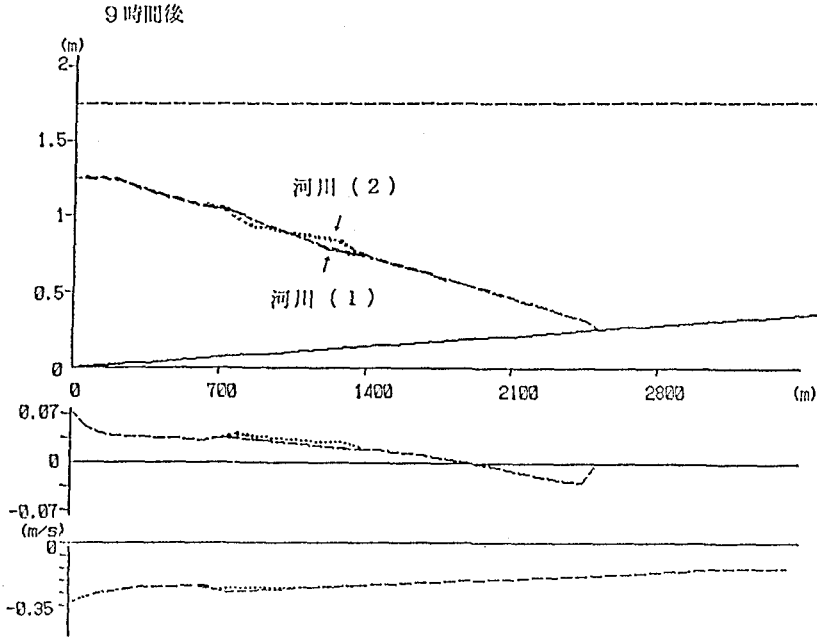


図-5 河川の分岐と合流の平面形状



図—6 河川の分岐と合流に関する流況図

これら計算結果の一例を示したのが図—6である。図は干潮時から3時間後の状況で、塩水くさび、下層流速、上層流速を x 軸に沿って表わしている。河川(1)の状況は距離を縮めて示している。潮せきは3サイクル時に該当するものである。分岐点、合流点における $q_{i,j}^{(0)}$, $u_{i,j}^{(0)}$ 等は淡水流量、海水流量がその点で保存されるように取扱う必要がある。このためには流量の保存性を表現する $Q_{i,j}^{(0)} = Q_{i,j}^{(1)} + Q_{i,j}^{(2)}$, $i=1,2$ を用いる。これを比率でみれば i によらず同一の値となるので、分岐点、合流点での処理は次式のように置換される。

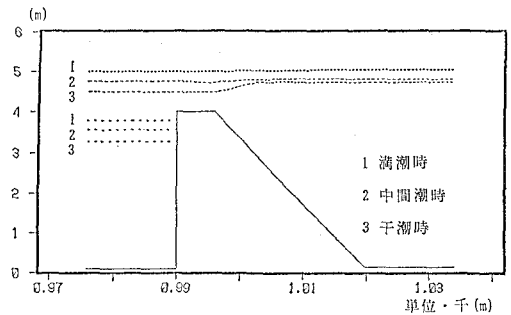
$$\eta_i^{(i)} = \frac{Q_1^{(1)}\eta_2^{(1)} + Q_2^{(2)}\eta_1^{(2)}}{Q_1^{(1)} + Q_2^{(2)}} \quad i=0,1,2$$

$$u_i^{(i)} = \frac{Q_1^{(1)}u_1^{(1)} + Q_2^{(2)}u_2^{(2)}}{Q_1^{(1)} + Q_2^{(2)}} \quad i=1,2$$

ここで、 $Q_1^{(1)}$, $Q_2^{(2)}$ は河川(1), (2)の淡水流量である。

5. 河口堰を設置した場合

満潮時に $h_{2,0}=4\text{m}$, 干潮時 $h_{2,0}=3.5\text{m}$, 限界水深 $h_c=1.0\text{m}$, 淡水流量 $Q_1=143.66\text{m}^3/\text{s}$ のケースをとり、 $h_0=10\text{m}$, $T=1,000$ 秒, $l=9900\text{m}$, 河床勾配 $1/10,000$ とおき、河口堰を河口より 990m に設置した場合を取扱った。 $\Delta t=10$ 秒, $\Delta x=99\text{m}$ とし、堰上では $\Delta x=5.94\text{m}$ ととり、堰上での流況も同時に算定できる方法を採用している。幅員は 300m で変化しないものとし、堰の頂面は x 軸より 4m の高さにあり、海水は堰上には達しない。 $x=990\text{m}$ すなわち $j=10$ までの計



図—7 河口堰上の水位変動

算方法は前述と同様で、ただ堰により $u_{2,10} \equiv 0$ とおかれる。 $j=10$ では淡水流量の連続性から堰上での水深と流速が求められる。 $j=10$ より上流は淡水層のみとなり、 n の各ステップで $u_1 < 0$ に留意して整理すれば、

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = \frac{1}{(u_1^2 - \eta_1)} \left\{ \eta_1 \frac{\partial s}{\partial \xi} - \frac{l}{h_0} \frac{f_b^*}{2} u_1^2 \right\} \dots (19)$$

が得られる。これに前進差分を適用して堰をコンクリート製と考え、 $f_b^*/2$ を 0.003 とし $\Delta x=5.94\text{m}$ すなわち $\Delta \xi=0.0006$ とおき、これから堰上の挙動を求めたのが図—7である。干潮へ推移するにつれて、堰上の水位が上昇してくることが判明する。堰より上流は $\Delta \xi$ を順次増大させればよい。

参考文献

- 須賀義三 (1977): 一次元二層不定流の数値計算, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 544-548.
岩崎敏夫 (1991): 応用水理学, 技報堂, pp. 172-177.