

波浪の多方向性と弱非線形性を考慮した水圧波から表面波への換算法について

橋本典明*・永井紀彦**・菅原一晃***
浅井正****・久高将信*****

1. はじめに

現地波浪観測機器には種々のものがあり、我国では深水域での標準機器として超音波式波高計(USW)が広く用いられている。しかしながら、USWでは荒天時に波が碎け始めると、海表面付近に巻き込まれた気泡による音波の散乱・吸収により、正常な波形記録が取得できない難点がある。このようなUSWの難点を補う目的で、USWに水圧センサーを組み込んだ複合型波高計も開発され、実際に現地に適用されている(小舟ら、1988)。

水圧波から表面波へ換算する方法はこれまでにも多く提案されている。これらは大別すると2つに分類できる。水圧波のスペクトルに伝達関数を乗じて表面波のスペクトルを推定する類の周波数領域での解析法と、水圧波と表面波との関係を表す回帰式をもとに表面波を推定する類の時間領域での解析法である。しかしながら、これまでの多くの研究にもかかわらず、精度や安定性の面で必ずしも満足すべき換算方法はいまだ提案されていない。

そこで本論文では、波浪の本質的な特性である多方向性と弱非線形性を考慮して、表面波から水圧波への応答特性を再検討し、この結果をもとに簡便かつより精度の良い水圧波から表面波への換算方法を新たに提案する。

2. 理論的検討方法

水圧波から表面波への換算には一般に線形理論により得られる表面波から水圧波への伝達関数の逆数が用いられる。この関数は周波数に関して指數関数的な単調増加関数である。このため、この関数を直接用いて表面波への換算を行えば、高周波数側において水位変動が過大評価され、異常な波形が推定される。この難点を避けるために高周波数側に工夫を導入した種々の方法が提案され、その妥当性は実験や観測により裏付けられている。

しかしながら、いずれの方法も便宜的な補正方法であり、その理論的背景は不明確であって一般性に乏しい。

そこで、本論文では波浪の本質的な多方向性、弱非線形性および不規則性を考慮した水圧波から表面波への換算方法を検討することとした。理論的検討に際しては、弱非線形不規則波のシミュレーションによる検討も可能であるが、1次成分波の位相の影響によるケース毎のばらつきが大きいため(木村、1985)、2次までの非線形性を考慮してFourier-Stieltjes積分表示により得られる非線形な水圧波ならびに表面波の方向スペクトルの期待値を数値積分することにより、伝達関数の統計的期待値の特性について検討した。このような検討により、これまで考慮されていなかった方向スペクトル形状の相違による水圧波の非線形効果の相違の影響を評価できる。

(1) 弱非線形不規則波の波数・周波数スペクトル表現

関数 $\xi(\mathbf{x}, t)$ を平面座標 \mathbf{x} および時間 t に関して定常な時系列変動量とし、Fourier-Stieltjes積分によりこれを次式のように表現する。

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} dZ(\mathbf{k}, \omega) \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\} \quad (1)$$

ここに、 i は虚数単位、 $dZ(\mathbf{k}, \omega)$ は波数ベクトル \mathbf{k} 、角周波数 ω の Fourier-Stieltjes 成分の複素振幅であり、次の対称性を有している。

$$dZ^*(\mathbf{k}, \omega) = dZ(-\mathbf{k}, -\omega) \quad (2)$$

ここに、* は共役の複素数を表す。このとき、波数・周波数スペクトル $S(\mathbf{k}, \omega)$ は次式で定義される。

$$\langle dZ^*(\mathbf{k}, \omega) dZ(\mathbf{k}, \omega) \rangle = S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega \quad (3)$$

ここに、⟨…⟩ はアンサンブル平均を意味する。

いま、 $\xi(\mathbf{x}, t)$ が弱非線形・疑似ガウス過程に従うならば、微小パラメタ ϵ に関して $\xi(\mathbf{x}, t)$ を摂動展開し、各オーダーで解 $\xi^{(n)}(\mathbf{x}, t)$ が求められる。摂動展開して得られた解 $\xi(\mathbf{x}, t)$ に、Fourier-Stieltjes 変換、

$$\xi^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} dZ^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\} \quad (4)$$

を適用すれば Fourier-Stieltjes 成分は次式で与えられる。

* 正会員 工博 運輸省港湾技術研究所主任研究官

** 正会員 運輸省港湾技術研究所海象調査研究室長

*** 正会員 運輸省港湾技術研究所主任研究官

**** 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所海象調査研究室研究官

***** 正会員 (株)エヨー、第一技術部、波浪プロジェクト室長

$$dZ(\mathbf{k}, \omega) = dZ^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) + dZ^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) + \dots \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

$$\begin{aligned} dZ^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) &= \int \cdots \int G^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_1, \dots, \omega_n) \\ &\quad \times dZ^{(1)}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \cdots dZ^{(1)}(\mathbf{k}_n, \omega_n) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

(ただし, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n$, $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_n$)

ここに, $dZ^{(n)}(\mathbf{k}, \omega)$ は n 次の Fourier-Stieltjes 成分の複素振幅, $G^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$ は非線形核関数, 添字を付した \mathbf{k}_i と ω_i はそれぞれ線形成分波の波数ベクトルと角周波数であり, 分散関係式

$$\omega_i^2 = g |\mathbf{k}_i| \tanh(|\mathbf{k}_i| h) \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

を満たし, かつ,

$$\mathbf{k}_i(-\omega_i) = -\mathbf{k}_i(\omega_i) \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

の関係がある。

式(5)を式(3)の波数・周波数スペクトルの定義式に代入し, 平均値が0のガウス過程の変動量の複素個の積のアンサンブル平均に関する公式を用いて整理すると, 例えば2次オーダーまでの波数・周波数スペクトルの期待値として次式が得られる(Tick, 1959).

$$S(\mathbf{k}, \omega) = S^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) + S^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

$$S^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\omega_1} |G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1, \omega_1, \omega-\omega_1)|^2 \\ &\quad \times S^{(1)}(\mathbf{k}_1, \omega_1) S^{(1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1, \omega-\omega_1) d\mathbf{k}_1 d\omega_1 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

ここに, $S^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$, $S^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)$ はそれぞれ1次(線形成分波)および2次オーダーの波数・周波数スペクトルの期待値である。

(2) 多方向性を有する弱非線形不規則波の表現

多方向性を有する2次までの弱非線形性を考慮した表面波形 $\eta(\mathbf{x}, t)$ は, 水深 h を一定として摂動展開により,

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}, t) &= \eta^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \eta^{(2)}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} dA(\mathbf{k}, \omega) \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\} \\ &= \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} (dA^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) + dA^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)) \\ &\quad \times \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

で与えられる。ここに, $dA^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$, $dA^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)$ は表面波の1次および2次の Fourier-Stieltjes 成分であり, $dA^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)$ は $dA^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} dA^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) &= \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\omega_1} H(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1, \omega_1, \omega-\omega_1) \\ &\quad \times dA^{(1)}(\mathbf{k}_1, \omega_1) dA^{(1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1, \omega-\omega_1) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

式(12)中の $H(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2)$ は表面波の非線形核関数であり, 次式で表される(Hamada, 1965)。

$$H(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2g} \left\{ 2(\omega_1 + \omega_2) D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{\omega_1 \omega_2} + \omega_1 \omega_2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \right\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

$$D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2)$$

$$\begin{aligned} &= [2(\omega_1 + \omega_2) \{g^2 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - (\omega_1 \omega_2)^2\} \\ &\quad / [2\omega_1 \omega_2 ((\omega_1 + \omega_2)^2 - g |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \tanh(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| h))] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

ここに, g は重力加速度である。

同様に, 多方向性を有する2次までの弱非線形性を考慮した水圧波 $p(\mathbf{x}, z, t)$ は,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, z, t) &= p^{(1)}(\mathbf{x}, z, t) + p^{(2)}(\mathbf{x}, z, t) \\ &= \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} dP(\mathbf{k}, z, \omega) \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\} \\ &= \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} \{dP^{(1)}(\mathbf{k}, z, \omega) + dP^{(2)}(\mathbf{k}, z, \omega)\} \\ &\quad \times \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

で与えられる。ここに, z は静水面を原点とし, 上方を正とした場合の水圧波の測定水深, $dP^{(1)}(\mathbf{k}, z, \omega)$, $dP^{(2)}(\mathbf{k}, z, \omega)$ はそれぞれ水圧波の1次および2次の Fourier-Stieltjes 成分であり, $dA^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ を用いて次式で与えられる。

$$dP^{(1)}(\mathbf{k}, z, \omega) = \rho g \frac{\cosh\{|\mathbf{k}|(h+z)\}}{\cosh\{|\mathbf{k}|h\}} dA^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

$$\begin{aligned} dP^{(2)}(\mathbf{k}, z, \omega) &= \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\omega_1} F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1, z, \omega_1, \omega-\omega_1) \\ &\quad \times dA^{(1)}(\mathbf{k}_1, \omega_1) dA^{(1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1, \omega-\omega_1) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

式(17)中の $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z, \omega_1, \omega_2)$ は水圧波の非線形核関数であり, 次式で表される(Hamada, 1965)

$$\begin{aligned} F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z, \omega_1, \omega_2) &= \rho(\omega_1 + \omega_2) E(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z, \omega_1, \omega_2) \\ &\quad - \rho g^2 [\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \cosh\{|\mathbf{k}_1|(h+z)\} \cosh\{|\mathbf{k}_2|(h+z)\} \\ &\quad - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \sinh\{|\mathbf{k}_1|(h+z)\} \sinh\{|\mathbf{k}_2|(h+z)\}] \\ &= [2\omega_1 \omega_2 \cosh\{|\mathbf{k}_1|h\} \cosh\{|\mathbf{k}_2|h\}] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

$$E(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z, \omega_1, \omega_2) = D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2) \frac{\cosh\{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|(h+z)\}}{\cosh\{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|h\}} \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

ここに, ρ は流体の密度, $k_i = \text{sign}(\omega_i) |\mathbf{k}_i|$ である。

(3) 弱非線形不規則波のスペクトルの数値計算法

多方向性を有する弱非線形な不規則波の波数・周波数スペクトルは, 式(9)および式(10)に, 波数・周波数スペクトルの線形成分 $S^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ および式(13)で表される非線形核関数 $H(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2)$ を代入することにより計算できる。水圧波の波数・周波数スペクトル

も、 $S^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ および式 (18) で表される非線形核関数 $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z, \omega_1, \omega_2)$ を用いて式 (9) および式 (10) より計算できる。

波数・周波数スペクトル $S(\mathbf{k}, \omega)$ を方向スペクトル $S(\omega, \theta)$ に変換する場合、波数ベクトル \mathbf{k} と角周波数 ω との間に分散関係式が成立することが前提となる。したがって、波数・周波数スペクトルの線形成分 $S^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ は分散関係式を用いて $S^{(1)}(\omega, \theta)$ に変換できるが、2次成分 $S^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)$ の $\mathbf{k} (= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ と $\omega (= \omega_1 + \omega_2)$ は分散関係式を満足せず、方向角については、

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{k_1 \sin \theta_1 + k_2 \sin \theta_2}{k_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos \theta_2} \right) \quad \dots \dots \dots (20)$$

によって求められる。ここに、 θ_1 と θ_2 はそれぞれ (\mathbf{k}_1, ω_1) と (\mathbf{k}_2, ω_2) の線形成分波の伝播方向である。

表面波 $\eta(\mathbf{x}, t)$ および水圧波 $p(\mathbf{x}, z, t)$ の周波数スペクトル $S_\eta(\omega)$ 、 $S_p(\omega)$ は上記のようにして得られた方向スペクトル $S_\eta(\omega, \theta)$ 、 $S_p(\omega, \theta)$ を方向角に関して積分することにより計算できる。

3. 水圧波から表面波への伝達特性に関する検討

図-1 は、水深 30 m、計器設置水深 -28 m の観測条件とし、周波数スペクトル $S^{(1)}(f)$ として $H_{1/3} = 5$ m、 $T_{1/3} = 9.52$ 秒の Bretschneider・光易スペクトルおよび方向関数 $G^{(1)}(\theta | f)$ として光易型方向関数を用い、2. に示した方法により 2 次までの非線形性を含む表面波および水圧波の周波数スペクトルならびにそれらの比の平方根で与えられる水圧波から表面波への伝達関数を、方向集中度パラメータ S_{\max} をパラメータとして計算したものである。図-1 に見られるように、表面波の周波数スペクトルでは S_{\max} の相違によるスペクトル形状の差異はそれほど顕著ではないが、水圧波のスペクト

ルは S_{\max} に依存して特にその高周波数側に顕著な差異が見られ、 S_{\max} が小さいほど高周波数側のエネルギーが増大する。この影響のため、伝達関数にも低周波数側と高周波数側に線形理論値との差が顕著に現れ、 S_{\max} が小さいほど高周波数側および低周波数側では線形理論値から外れてくる。

これは多方向性を考慮したことにより、2 次の非線形性による 2 つの線形成分波の波数ベクトルの和と差の絶対値の関係から、高周波数側では周波数に対応して分散関係式で与えられる波長よりも長い波長の 2 次成分波が生成され、逆に低周波数側では分散関係式で与えられる波長よりも短い波長の 2 次成分波が生成されるためである。これは入・反射波共存場における microseisms と同様の現象が、多方向性を有する一般の波浪場においても生じることを示している。

ここでは特定の観測条件、波浪条件のもとに S_{\max} のみをパラメータとして伝達関数の特性を示したが、これらは水深や計器設置水深、有義波周期など他のパラメータによても多様に変化し、これが、水圧波から表面波への換算法に経験的なパラメータを導入しなければならなかつた理由の一つと考えられる。

このような現象は現地観測データにも認められる。図-2 は常陸那珂港（水深 30 m、水圧計設置水深 -28 m）で 1990 年 10 月 23 日に 2 時間ごとに観測された 1 日分の 12 ケースの表面波と水圧波の周波数スペクトルおよびこれらをもとに計算された水圧波から表面波への伝達関数の実測値を示したものである。表面波のスペクトルの高周波数側ではケース毎のばらつきは小さいものの、水圧波のスペクトルや伝達関数の高周波数側には、ケース毎に顕著な差異が現れている。これは、常陸那珂港ではこの日の前半は風波性の波浪、後半はうねり性の波浪に推移しており、方向スペクトル形状の変化によるものと思わ

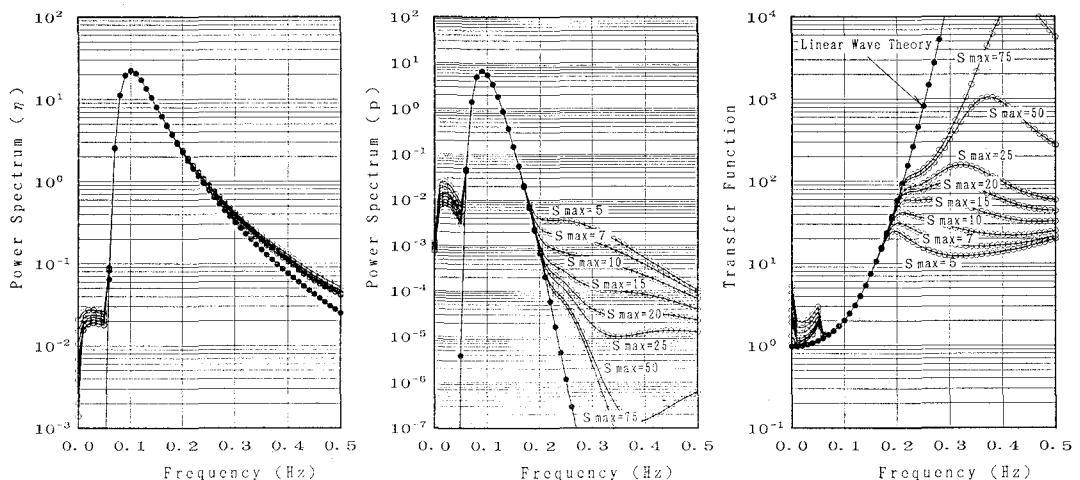


図-1 表面波と水圧波のパワースペクトルおよび伝達関数の特性（理論値）

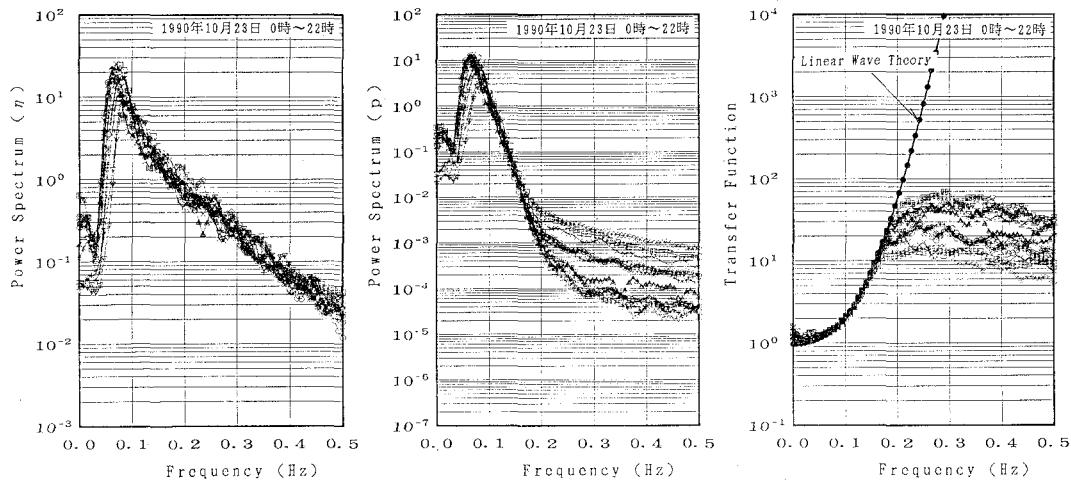


図-2 表面波と水圧波のパワースペクトルおよび伝達関数の特性(現地観測データ)

れる。

以上のように、水圧波から表面波への伝達関数の多様性は方向スペクトル形状の相違による影響が大きいことが判明したので、妥当と思われる方向関数を適宜与えながら2.に示した方法により多方向性と弱非線形性を考慮した伝達関数を理論的に計算して、水圧波から表面波への換算を行った。これにより方向関数の与え方によってはかなり高精度に表面波へ換算可能であることが分かった。

4. 水圧波から表面波へ換算するための簡便法

3. で述べたように、事前に妥当な形の方向関数が推定されるならば、理論的に妥当な伝達関数が計算によって得られ、表面波への高精度な換算が可能である。しかしながら、水圧記録のみが得られている状況では方向関数を事前に推定することは難しい。そこで、ここでは図-1および図-2に見られる特性をもとに考案した伝達関数の簡便な推定法について述べる。

図-1、図-2に見られるように、対数グラフ上に表示した水圧波のスペクトルはピーク周波数より約1.3倍程度から、特定の周波数までは、概して直線的に減衰する。また、この特定周波数よりも高周波数側では滑らかな曲線となる。その境界となる周波数は方向関数の形状に依存して変わり、伝達関数もその周波数を境界として線形理論値との差異が生じ、方向関数に依存してそれぞれ異なる挙動を示す。しかしながら、伝達関数の実測値はほぼ一定値の回りに変動する傾向が見られる。

そこで図-3に示すようにピーク周波数の1.3倍(f_1)～5倍(f_2)の範囲を周波数 f_B を境界としてそれぞれ直線近似および放物線近似し、 f_B を変えて計算し、生のスペクトルと近似式の誤差の分散が最小となる f_B を求める。この境界周波数 f_B よりも高周波数側では、図

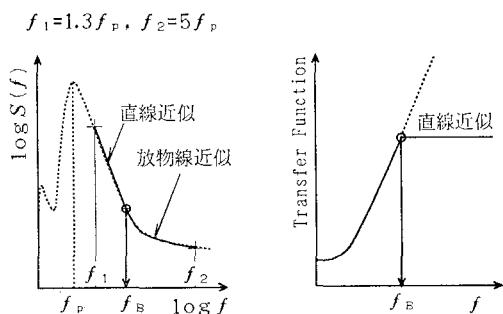


図-3 伝達関数の近似的表現

-3 の右図に示すように、伝達関数の値として f_B での線形理論値を用い一定値とする。通常の風波やうねりのスペクトルを対象とする場合には上記の方法によって観測データ毎に妥当な境界周波数 f_B が推定可能である。しかしながら、頭著な二方向波浪、特に低周波数側にビ

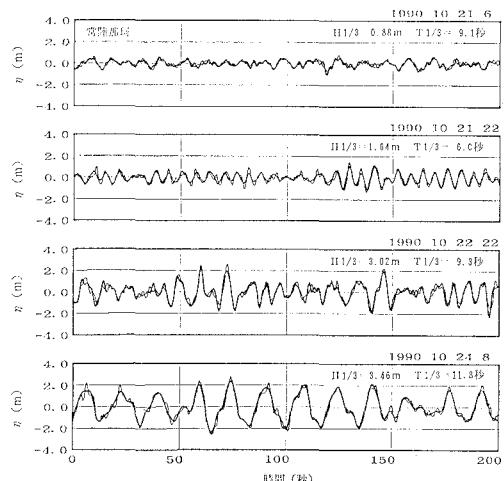


図-4 表面波の実測波形と推定波形の比較

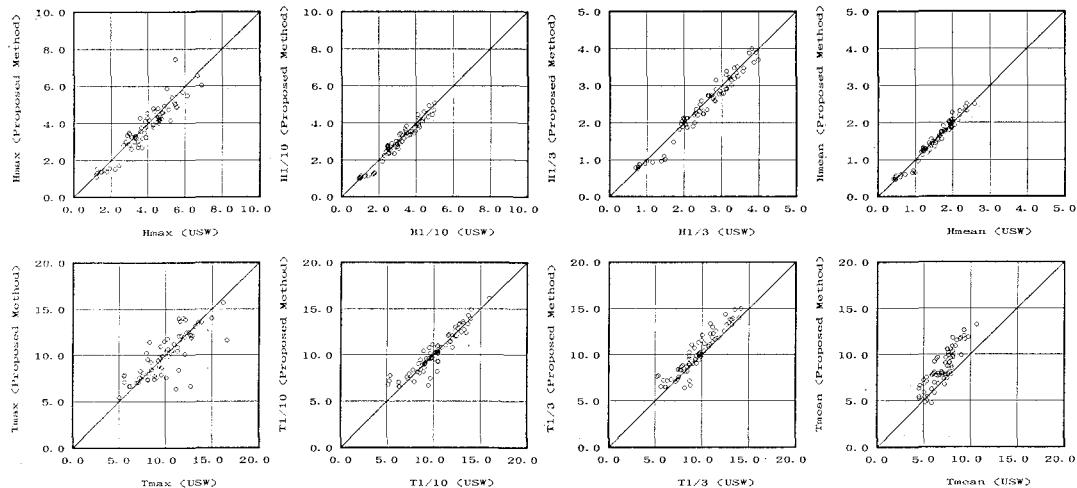


図-5 観測された波浪諸元と推定された波浪諸元の比較

ークを有するうねりと高周波数側にピークを有する発達過程の風波の重合したスペクトル形を対象とする場合には f_B は大きめに推定される場合がある。この問題に対処するために、図-1 をもとに f_B に上限値（図-1 の場合には 0.2 Hz）を設け、推定された f_B がこの上限値を越える場合には上限値を f_B として採用することとした。

なお、実際の計算では、ピーク周波数の 5 倍の周波数までを伝達関数の有効範囲とし、それ以上の周波数では伝達関数を 0 として無視している。しかしながら、このようにかなり高周波数の範囲まで伝達関数を考慮する場合、観測されたデータが有限長であり、データの端部で不連続である影響が現れるため、データの初めと終わり 10% ずつの部分に cosine 型のデータウインドーをかけて上記の処理を行い、表面波に換算した後は、残りの 80% のデータを用いて有義波等の統計処理を実施した。

図-4 は USW により観測された表面波と本方法により推定された表面波の時系列を比較したものである。細線は USW により観測された表面波、太線は本方法により推定された表面波の時系列を示している。図-4 に見られるように、本方法により推定される波形は波高の低い場合や高波浪時の場合にもほぼ妥当に表面波を推定し得ることが分かる。

図-5 は種々の波浪条件 72 ケースを対象として、USW および本方法で推定された時系列記録をもとに波浪解析した結果を比較したものである。ここには示していないが他の既往の方法 (Nielsen, 1986; Wang et al., 1986; 小舟ら 1988) により推定された時系列記録をもとに同様の解析をした結果に比べ、本方法による結果は最高波、1/10 最大波、有義波、平均波のいずれの場合にも、波高、周期ともに USW による結果とよく一致した。

5. おわりに

多方向性を有する 2 次までの非線形性を考慮した水圧波から表面波への伝達関数は、方向スペクトルの方向集中度に依存して、その低周波数側と高周波数側に一方向の非線形不規則波には見られない特異性 (microseisms) を示す。一方向波と多方向波の伝達関数の相違は方向集中度が低いほど顕著であり、このような現象は現地観測データにも認められる。本論文ではこのような現象を理論的に説明し、水圧波から表面波へ換算する際には、方向関数が重要であることを示した。また、これらの特性を考慮して水圧波から表面波への簡便な換算法を提案した。今後、種々の観測条件、波浪条件を対象としてさらに理論的、実験的に再検討し、より合理的かつ妥当な換算方法を開発する予定である。

参考文献

- 木村 (1985): 非線形長周期波の 2 次元スペクトル, 第 32 回海岸工学論文集, pp. 154-157.
- 小舟ら (1988): 現地観測における水圧波形から表面波への換算手法について, 港湾技術研究所報告, 第 27 卷, 第 3 号, pp. 161-183.
- Hamada, T. (1965): The secondary interactions of surface waves, Rept. Port and Harbour Res. Inst., No. 10, 28 p.
- Nielsen, P. (1986): Local approximations: A new way of dealing with irregular waves, Proc. 20th Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 633-646.
- Tick, L. J. (1959): A non-linear random model of gravity waves I, J. Math. and Mech., Vol. 8, No. 3, pp. 643-652.
- Wang, H., D. Lee and A. Garcia (1986): Time series surface-wave recovery from pressure gage, Coastal Eng., 10, Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, pp. 379-393.