

再帰型数値フィルタを用いた不規則波のシミュレーション

小林 智 尚*

1. はじめに

近年、実験装置の高性能化によって室内実験では不規則波を発生させることのできる造波装置が比較的容易に利用できるようになり、この装置を用いた不規則波浪場での海洋海岸構造物に作用する波力の測定などのさまざまな実験が行われている。また現在コンピュータの発達により、構造物まわりの不規則波浪をコンピュータでシミュレートすることも一般に行えるようになってきている。このように室内実験や数値計算で入射波に不規則波を用いる場合には、与えられたスペクトル分布を持つ不規則波の波形を計算・シミュレートする必要がある。

従来から不規則波の波形を求める手法として用いられている方法は、大別して三角級数の和を求める手法と数値フィルターを用いる方法の二つにまとめられる。

三角級数の和を求める手法は、振幅や周期の異なる三角関数で表されるいくつかの成分波を求め、これらの成分波の和として不規則波を算出する方法である。この手法は単純ではあるが、計算時間がかかり実用的ではない。現在ではこの計算速度の点を改良した手法として逆高速フーリエ変換を用いた手法が広く利用されているが、この手法も三角級数の和を求める手法の一つである。これらの手法で得られる不規則波のスペクトル分布は厳密には連続ではなくクシ状になっている。さらに逆高速フーリエ変換を用いた手法では不規則波算定に用いた逆高速フーリエ変換の項数で不規則波群が繰り返すために、最大波高などがこの変換の項数により規定されてしまうという大きな欠点を有している。そして、これらの手法はそれぞれの成分波の初期位相も何らかの形で外部から規定しなければならないという問題も含んでいる。

一方、数値フィルタを用いる方法は、乱数列を数値フィルタに通すことにより目的の周波数特性を有する信号に変換する手法である。この手法は入力に乱数列を用いるために、三角級数の和も求める手法が有する最大波高の問題や各成分波の初期位相の問題などが解決されている。さらにこの手法は理論的に周波数分布は連続になるなどの長所も備えている。数値フィルタは一般に非再

帰型数値フィルタと再帰型数値フィルタとに分けられる。このうち非再帰型数値フィルタを用いた手法は日野(1967)や岩垣・木村(1973)により提案されている。これらの非再帰型数値フィルタを用いた手法は三角級数の和を求める手法の抱える問題点をほぼ解決しているが計算に用いる項数が多く、不規則波形算定の高速化がはかれないと言う欠点を有している。

これに対して再帰型数値フィルタを用いた手法は非再帰型数値フィルタと同様に三角級数の和を求める手法の抱える問題点を解決しており、さらに計算に用いる項数も非再帰型数値フィルタに比べて数10分の1から1/100程度に減らせることができるため、不規則波形をきわめて高速に算定できる。ところがこの再帰型数値フィルタはきわめて非線形性が強い数値フィルタであり、この数値フィルタの設計は非常に困難であった。そしてさらに設計が十分でなかった場合、他の手法では目的の周波数分布の不規則波が得られないだけであるが、この再帰型フィルタを用いた手法では不規則波信号がすぐに発散してしまうという実用上の大きな問題点を含んでいる。この問題を含んでいるため、再帰型数値フィルタはさまざまな長所を備えていながらほとんど利用されていないのが実状である。

そこで本研究では、計算量がきわめて少ない、不規則波形が理論上繰り返すことがない、スペクトル分布が理論上完全に連続である。などの長所を持った再帰型フィルタを利用した不規則波信号発生法を確立し、この有効性を明らかにする。

2. 再帰型数値フィルタの理論

(1) 伝達関数

乱数列から目的とする不規則波水面形の周波数スペクトル形を持つ信号を生成するには、乱数列の持つスペクトルすなわちホワイトノイズのうち、目的とする不規則波の周波数スペクトルのみを通過させるフィルターを設計することである(図-1)。言い換えれば、乱数列の持つ周波数スペクトルを $X_f(f)$ とし、また目的とする不規則波のスペクトルを $Y_f(f)$ とした場合、

$$Y_f(f) = G_f(f) \cdot X_f(f) \cdots \cdots (1)$$

* 正会員 工修 東京理科大学助手 理工学部土木工学科

を満たす周波数特性 $G_f(f)$ のフィルタを設計すればよい。この $G_f(f)$ を一般に伝達関数と呼ぶ。

この伝達関数を満たす数値フィルタの設計法は現在音声認識の分野を中心にいくつか提案されている。ここでは、そのうちのひとつで極・ゼロ点の特性に注目して設計する田中 (1989) の方法を参考にする。

いま、図-2 の流れを持つ再帰型数値フィルタを考える。ここでは、 $X_f(f)$, $Y_f(f)$, $W_f(f)$ の周波数特性を持つ時系列データを $x(t)$, $y(t)$, $w(t)$ で表し、さらにこれらを離散化したデータとして $x(t_0+n\Delta t)$, $y(t_0+n\Delta t)$, $w(t_0+n\Delta t)$ を $x[n]$, $y[n]$, $w[n]$ と表している。ただし、 Δt は離散化データのサンプリング時間間隔である。また、 a_j , b_j は係数を表す。図-2 より次式の関係が導かれる。

$$w[n] = x[n] + \sum_{i=1}^J a_i w[n-i] \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$y[n] = \sum_{j=0}^J b_j w[n-j] \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、式 (2) は再帰型フィルタ部分をまた式 (3) は非再帰型フィルタ部分を表している。この式 (2), (3) に

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で定義される z 変換を適用する。ただし、 $z = \exp(i\omega)$, $\omega = 2\pi f\Delta t$ で、 f , ω はそれぞれ周波数、偏角である。この z 変換により $x[n-1]$ が $z^{-1}X(z)$ に変換されることを考慮すれば

$$W(z) = X(z) + \sum_{i=1}^J a_i z^{-i} W(z) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$Y(z) = \sum_{j=0}^J b_j z^{-j} W(z) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $Y(z)$, $W(z)$ はそれぞれ $y[n]$, $w[n]$ を z 変換して得たものである。設計される数値フィルタの伝達関数 $H(z)$ は入力 $X(z)$ と出力 $Y(z)$ の比で表されるので、

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{W(z) \sum_{j=0}^J b_j z^{-j}}{W(z) - W(z) \sum_{i=1}^J a_i z^{-i}} \\ &= b_0 z^{-J} \frac{z^J + (b_1/b_0)z^{J-1} + \dots + (b_{J-1}/b_0)z + (b_J/b_0)}{z^J + (-a_1)z^{J-1} + \dots + (-a_{J-1})z + (-a_J)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となり、この式は一般に

$$H(z) = b_0 z^{-J} \frac{\prod_i (z - u_i) \prod_l (z^2 + \alpha_l z + \beta_l)}{\prod_j (z - v_j) \prod_m (z^2 + \gamma_m z + \delta_m)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$= b_0 z^{-J} \frac{\prod_i (z - u_i) \prod_l (z - q_l)(z - q_l^*)}{\prod_j (z - v_j) \prod_m (z - p_m)(z - p_m^*)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

と因数分解できる。ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は実数、 q と q^* , p と p^* はそれぞれ共役複素数である。ここでは式 (8) の 2 次の項のみに着目し、伝達関数 $H(z)$ を次式のように表されるものとする。

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0 z^{-J} \frac{\prod_l (z^2 - \alpha_l z + \beta_l)}{\prod_m (z^2 + \gamma_m z + \delta_m)} \\ &= b_0 z^{-J} \frac{\prod_l (z - q_l)(z - q_l^*)}{\prod_m (z - p_m)(z - p_m^*)} \\ &= b_0 z^{-J} \frac{\prod_l (z - r_l e^{i\omega_l})(z - r_l e^{-i\omega_l})}{\prod_m (z - r_m e^{i\omega_m})(z - r_m e^{-i\omega_m})} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、式 (8) の 2 次の項のみに着目したのは、図-2 や式 (2) ~ (7) の中の係数 a_j , b_j をともに実数にするためである。

(2) 個々の要素の性質

ここで、式 (10) で表される伝達関数 $H(z)$ の個々の要素について考察を行う。まず、

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{(z - p_m)(z - p_m^*)} \Big|_{m=1} \\ &= \frac{1}{(z - r_m e^{i\omega_m})(z - r_m e^{-i\omega_m})} \Big|_{m=1} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

と表される伝達関数 $H(z)$ を考える。ここで $z = \exp(i\omega)$ なので、 $\omega = \pm \omega_m|_{m=1}$ 近傍で式 (11) の $H(z)$ は極大値をとる。この様子を示したのが図-3 である。この図では $\omega_m|_{m=1} = 1.0$ とし、 $r_m|_{m=1}$ をそれぞれ 0.5, 0.8 としている。このような点 $r_m e^{i\omega_m}$, $r_m e^{-i\omega_m}$ を極と呼ぶ、この極の安定条件は $r_m < 1$ である。

同様に、

$$\begin{aligned} H(z) &= (z - p_l)(z - p_l^*) \Big|_{l=1} \\ &= (z - r_l e^{i\omega_l})(z - r_l e^{-i\omega_l}) \Big|_{l=1} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

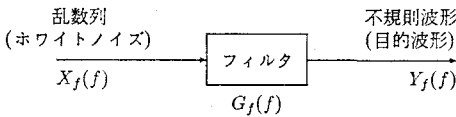


図-1 不規則波信号発生のためのフィルタ

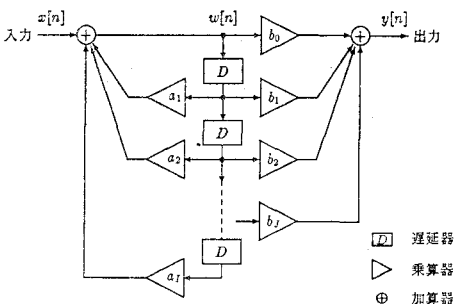


図-2 再帰型フィルタの構成

と表される伝達関数 $H(z)$ を考える。この関数は $\omega = \pm\omega_l|_{l=1}$ 近傍で式 (12) の $H(z)$ は極小値をとる。この様子を示したのが 図-4 である。図中では $\omega_l|_{l=1}=1.0$ とし、 $r_l|_{l=1}=0.5, 0.8$ としている。このような点 $r_l e^{i\omega_l}$, $r_l e^{-i\omega_l}$ をゼロ点と呼ぶ。このゼロ点の安定条件も $r_l < 1$ である。

(3) 極・ゼロ点による伝達関数の表現

以上により極やゼロ点の特性が明らかにできた。したがって今対象となっている式 (1) の伝達関数 $G_f(f)$ のスペクトル分布を持つ再帰型フィルタを設計するには、複素座標面上の単位円内に複数の極やゼロ点を配置して $G_f(f)$ にできるだけ近い周波数特性を持つ $H(z)$ を求めることである。つまりここでは、この目的とする伝達関数 $G_f(f)$ を z 変換した関数 $G(z)$ と実際に設計される伝達関数 $H(z)$ の対数振幅特性の自乗誤差 e

$$e = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^T = \sum_{k=1}^M s_k^2 \quad (13)$$

を最小にすればよい。ただし、 $\mathbf{s}$ は誤差ベクトルでその要素 s_k は

$$s_k = \log |H(z_k)| - \log |G(z_k)| \quad (14)$$

で表される。式中 z_k は目的とする伝達関数 $G(z)$ の特徴を表す様に選ばれたサンプル点の周波数を z 変換により偏角に変換したもの、 T は転置行列を示す。また、 $H(z_k)$ の対数振幅特性 $\log |H(z_k)|$ は式 (10) より

$$\begin{aligned} \log |H(z_k)| = & \log b_0 \\ & + \sum_{l=1}^{L/2} \frac{1}{2} \log [(1-r_l^2)^2 \\ & - 4r_l(1+r_l^2) \cos \omega_l \cos \omega_k] \end{aligned}$$

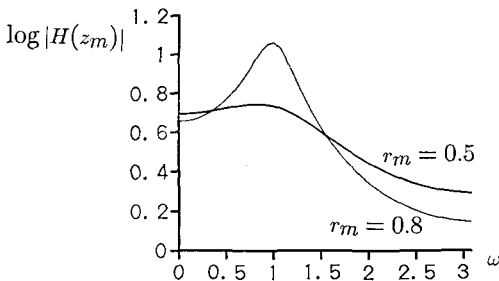


図-3 極の伝達関数

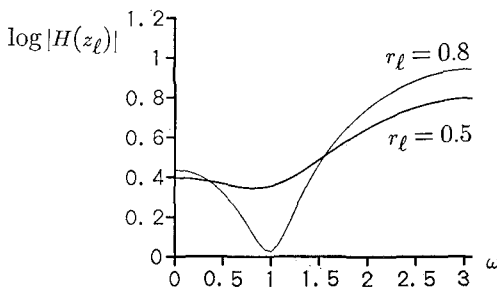


図-4 ゼロ点の伝達関数

$$\begin{aligned} & + 4r_l^2(\cos^2 \omega_l + \cos^2 \omega_k)] \\ & - \sum_{m=1}^{M/2} \frac{1}{2} \log [(1-r_m^2)^2 \\ & - 4r_m(1+r_m^2) \cos \omega_m \cos \omega_k \\ & + 4r_m^2(\cos^2 \omega_m + \cos^2 \omega_k)] \dots \dots (15) \end{aligned}$$

とあらわせる。

(4) 収束の方法

ここでは、ガウス・ニュートン法を用いて式 (13) の e を $e \rightarrow (\text{最小})$ とする伝達関数 $H(z)$ を求めた。

e はパラメータ $\mathbf{p} = [b_0, r_l|_{l=1}, \omega_l|_{l=1}, \dots, r_l|_{l=L/2}, \omega_l|_{l=L/2}, r_m|_{m=1}, \omega_m|_{m=1}, \dots, r_m|_{m=M/2}, \omega_m|_{m=M/2}]$ の関数なので $e(\mathbf{p})$ と書ける。ガウス・ニュートン法ではこの $\mathbf{p}$ を逐次修正することで

$$e(\mathbf{p}) \longrightarrow (\text{最小}) \quad (16)$$

を満足する最適な $\mathbf{p}$ を求める。 $\mathbf{p}_n$ に修正ベクトル $\mathbf{e}_n$ を加えて次のステップの $\mathbf{p}_{n+1}$ を

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n + \mathbf{e}_n \quad (17)$$

として求めるとき、修正ベクトル $\mathbf{e}_n$ は

$$\mathbf{e}_n = - \left[\frac{\partial^2 e(\mathbf{p}_n)}{\partial \mathbf{p}_n^2} \right]^{-1} \frac{\partial e(\mathbf{p}_n)}{\partial \mathbf{p}_n} \quad (18)$$

で表される。ここで式 (18) に式 (13) を代入すると修正ベクトル $\mathbf{e}_n$ は

$$\mathbf{e}_n = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{s} \quad (19)$$

となる。ただし、 $A_{lm} = \frac{\partial s_l}{\partial p_m} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_n}$ である。

以上の方法で通常の再帰型フィルタを設計できる。しかし、式 (10) で表される伝達関数 $H(z)$ は非線形性がきわめて強く、さらに、ここで対象としている不規則波浪の周波数スペクトルは特に分布形の勾配が急であるため、再帰型フィルタの設計時にはすぐに解が発散してしまう。そこで次の3つの工夫を行って安定した解を求めている。

まず第一に、式 (17) を

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n + \alpha_n \mathbf{e}_n \quad (20)$$

と書き改めた。ここで α_n はダンピング・ファクタである。このファクタは初期値を 1.1 とし、そして修正ベクトル $\mathbf{e}_n$ によって式 (20) から新たな $\mathbf{p}_{n+1}$ を求めたとき、この $\mathbf{p}_{n+1}$ を使って求めた式 (13) の自乗誤差 e が改善されていない場合にはいま求められた $\mathbf{p}_{n+1}$ を無効とし、 α_n の値を半分にして改めて $\mathbf{p}_{n+1}$ を求めなおした。また逆に求められた $\mathbf{p}_{n+1}$ から計算された自乗誤差 e が改善された場合にはその時点の α_n の2倍の値と初期値 1.1 とのうち小さい方の値を次の収束計算で用いる α_{n+1} の値として用いた。

次の工夫は、最初から目標とする次数で式 (10) の伝達関数 $H(z)$ を求めるのではなく、低次から順に計算を行い、その次数で安定した解が得られた後に、より高次の解を求めた。すなわち、極あるいはゼロ点を1対だけ

配置した状態から計算を行い、計算が収束した時点で新たな極あるいはゼロ点を1対ずつ加えていった。この時、誤差ベクトル ϵ の要素うちで絶対値が最大となる要素のサンプル周波数の位置に、その要素の値が正ならばゼロ点を、負ならば極を配置した。ただしこの時、誤差ベクトルの負の要素には4倍の重みをつけ、極点が発生しやすいようにしている。この理由は、対象としている不規則波浪の周波数スペクトル形 (図-7 参照) は一般に図-3 と比較的良好に似ているからである。

最後に、あらかじめ目標とする伝達関数 $G(z)$ の極大を示す周波数に対応する偏角 ω_m に極を、極小を示す周波数に対応する偏角 ω_l にゼロ点を配置しておいた。また1対のゼロ点の偏角 $\omega_{l=1}$ をゼロに固定した。これはあらかじめ計算される周波数スペクトル分布 $H(z)$ に目標とする分布 $G(z)$ に近い分布形を与えるためである。 $\omega_{l=1}=0$ としたのは、不規則波信号の周波数スペクトル $G(z)$ の分布形は一般に低周波側で急峻な勾配を有しているからである。このように、あらかじめ $H(z)$ に、 $G(z)$ に近い周波数スペクトル分布形を与えておくことにより、安定して速く解を収束させることができるようになる。

3. 不規則波への適用

先に述べた方法で実際に不規則波信号を出力する伝達関数の設計を行う。目的とした不規則波のスペクトルは合田 (1977) によって提案された風波のエネルギースペクトル $S(f)$

$$S(f) = 0.257 H_{1/3}^3 T_{1/3} (T_{1/3} f)^{-5} \exp[-1.03 (T_{1/3} f)^{-4}] \quad \dots\dots\dots (21)$$

である。ここで、目的の伝達関数 $G_f(f)$ を求める上で必要な出力の周波数特性 $Y(f)$ は水面変動の周波数特性なので $S(f)$ とは

$$S(f) = \frac{1}{2} Y(f)^2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

なる関係がある。

一方、入力となる乱数列にはコンピュータで一般に生成が容易な $-0.5 \sim 0.5$ の一様乱数を用いた。この乱数列は平均 $\bar{x}=0$ 、分散 $\sigma^2=1/12$ の乱数列なのでその周波数特性は

$$X_f(f) = \begin{cases} \sqrt{2\Delta t} \sigma & (0 < f \leq \frac{1}{2\Delta t}) \\ 0 & (f > \frac{1}{2\Delta t}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (23)$$

である。したがって、目的の伝達関数 $G_f(f)$ は式 (21) ~ (23) より

$$G_f(f) = \frac{Y(f)}{X_f(f)}$$

$$= \sqrt{\frac{S(f)}{12\Delta t}} \quad \left(0 < f \leq \frac{1}{2\Delta t}\right) \quad \dots\dots\dots (24)$$

表-1 再帰型数値フィルタの係数

a_1	3.768399	b_0	0.1782997
a_2	-5.986668	b_1	-0.3565742
a_3	5.172184	b_2	0.1782745
a_4	-2.652181		
a_5	0.822279		
a_6	-0.1338474		

となる。以降、 $T_{1/3}=1$ s, $H_{1/3}=1$ m として $\Delta t=0.05$ s として設計を行った。

まず、前節 (4) 項で述べたように、あらかじめ1対のゼロ点の偏角 $\omega_{l=1}$ をゼロに固定し、極大を示す周波数に対応する偏角 $\omega_m|_{m=1} \approx 0.3$ を持つ極をこの極の初期位置として配置した。この状態を初期状態として再帰型フィルタの設計を行った。その結果得られた伝達関数 $H(z)$ の周波数特性を図-5 に、またこの時の図-2 の係数を表-1 に示す。この再帰型フィルタは3対の極と1対のゼロ点で構成されており、また図-5 から、得られた伝達関数 $H(z)$ は目的の伝達関数 $G(z)$ ときわめてよい一致を示していることがわかる。

この数値フィルタを設計するときには、式 (16) を満足するよう解を収束させながら極やゼロ点を順次増やし

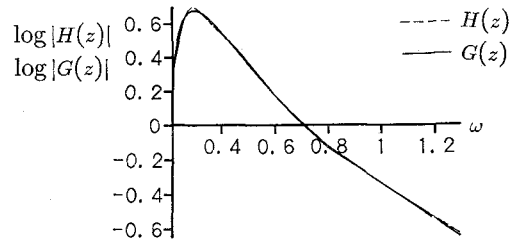


図-5 設計された伝達関数の周波数特性

```

PARAMETER (N=1000, DT=0.05, NA=6, NB=3, NBUF=NA+1)
DIMENSION A(NA), B(NB), BUF(NBUF)
DATA A / 3.768399, -5.986668, 5.172184,
*        -2.652181, 0.822279, -0.1338474 /
DATA B / 0.1782997, -0.3565742, 0.1782745 /

C
DO 100 I=1,NBUF
  BUF(I) = 0.0
  IBUF=0
DO 200 I=1,N
  BUF(IBUF+1) = RAND() - 0.5
  DO 210 J=1,NA
    BUF(IBUF+1) = BUF(IBUF+1)
    *      + A(J) * BUF(MOD(IBUF+J,NBUF)+1)
  ETA=0.0
DO 220 J=0,NB-1
  ETA = ETA + B(J+1) * BUF(MOD(IBUF+J,NBUF)+1)
  IBUF = MOD(IBUF+NBUF-1,NBUF)
  WRITE(*,*) I, ETA
200 CONTINUE

C
STOP
END
  
```

図-6 不規則波信号発生用の FORTRAN77 プログラム (RAND()) は 0~1 の一様乱数発生関数

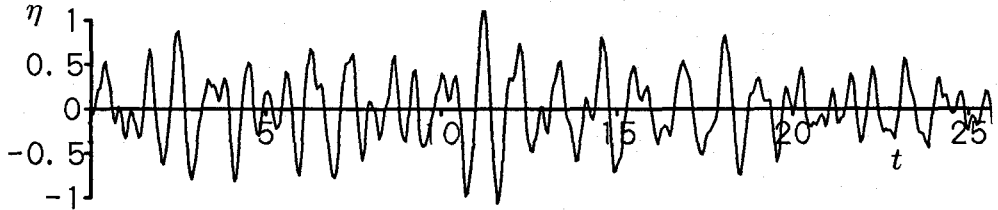


図-7 再帰型フィルタにより生成された不規則波形

ていった。この時、極あるいはゼロ点の数を増すと設計される伝達関数 $H(z)$ は目的とする関数 $G(z)$ に近づく傾向が見られるが、必ずしも近づくわけではなく、逆に $H(z)$ が $G(z)$ からの遠のく場合も見られた。これはこの数値フィルタの持つ非線形性がきわめて強いためである。

最後に実際に設計された再帰型フィルタを用いて不規則波のシミュレートを行った。このシミュレーションのための FORTRAN77 プログラムを 図-6 に示す。プログラム中の **RAND()** は 0 から 1 までの一様乱数を発生する関数である。

このプログラムによって生成された不規則波信号の時系列波形 η およびエネルギー・スペクトル $S(f)$ をそれぞれ 図-7, 8 に示す。このシミュレートされた風波の周波数スペクトルのうち、低周波数域では急峻な風波の周波数スペクトル分布を完全には再現していないが、ピーク周波数より高周波数側の領域においては目的のスペクトルをきわめてよく再現しており、全体的にここで設計された再帰型数値フィルタは目的とした風波のスペク

トルを忠実に再現していることがわかる。そしてさらにこの低周波領域での特性をさらに改善するために、その偏角 ω_l をゼロに固定したゼロ点をもう 1 対あらかじめ配置しておけばよい。

4. おわりに

本研究では、不規則波形を算出する一手法として利用できる再帰型数値フィルタを極とゼロ点の特性を用いて設計を行った。この数値フィルタは計算量がきわめて少ない、不規則波形が理論上繰り返すことがない、スペクトル分布が理論上完全に連続である、などの長所を持っているにもかかわらず、その設計が困難なためにほとんど利用されていなかったものである。本研究ではさらにこの再帰型数値フィルタを用いて実際に不規則波を発生させ、この再帰型数値フィルタの有効性を確認した。

謝辞： 最後に、本研究は数年前に東京大学で行われた卒業研究ゼミに端を発している。このゼミを含め、数々の有益な助言をいただいた東京大学工学部の渡辺晃・磯部雅彦両教授に謝意を表します。

参考文献

- 岩垣雄一・木村 晃 (1973): 任意のスペクトル形を有する現地波浪のシミュレーション法に関する研究, 第 20 回海岸工学講演会論文集, pp. 463-468.
- 合田良実 (1977): 港湾構造物の耐波設計, 鹿島出版会, p. 19.
- 田中 宏 (1989): 極・ゼロ点に着目した IIR デジタル・フィルタ設計法, トランジスタ技術, 1989-8, CQ 出版, pp. 559-569.
- 日野幹雄 (1967): 波浪の予測フィルタ・変換フィルター (1), 第 14 回海岸工学講演会講演集, pp. 21-28.

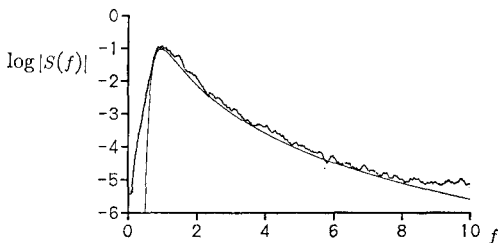


図-8 再帰型フィルタにより生成された不規則波の周波数スペクトル