

非定常緩勾配不規則波動方程式の高精度化

小竹康夫*・磯部雅彦**・渡辺 晃**

1. はじめに

海岸構造物の設計や沿岸環境の評価等に際して、波浪場の予測は不可欠である。そこで波浪場の予測には各種の数値モデルが用いられるようになってきている。一方、近年構造物やプロジェクト自体の規模が巨大化することにつれて、予測の精度とともに計算時間の短縮や、計算に必要な計算機容量の縮小が課題となりつつある。これまで用いられてきた不規則波に対する計算手法は、規則波を対象として考えられた方程式をほぼそのまま不規則波に適用しようとするものが多い。そのため精度もしくは計算速度の面で改良の余地がある。そこで、窪ら(1991)により導かれたのが非定常緩勾配不規則波動方程式である。この方程式は緩勾配方程式を基礎式としているため、屈折・回折・反射を同時に扱うことが可能である。その上、不規則水面変動を直接扱えるように工夫されているため、緩勾配方程式を用いて不規則波浪場の予測計算をする場合に比べて計算時間が非常に短くてすむ。また数値計算に際して、各時間ステップごとに水面の空間波形を計算していくことになるため、砕波によるエネルギー減衰の表現が容易となる。しかし、緩勾配方程式からの式変形の過程で1次近似を用いているため、不規則波を構成する成分波の周波数が広い範囲におよぶ場合に誤差が大きくなるといった欠点を有している。

本研究では上述の欠点を補うため、近似精度の高い非定常緩勾配不規則波動方程式を導くことを目的とする。また数値計算にあたっては、境界における入射方法を窪ら(1991)の用いた境界帯入射法から境界線入射法に改めることにより、計算時間の短縮を図る。そして断面2次元問題についてこの方程式の有効性を検証するために水路実験を行い、実験結果と数値計算結果の比較検討を行う。

2. 2次近似非定常緩勾配不規則波動方程式

(1) 基礎方程式の誘導

ここからの議論は、断面2次元問題についておこな

う。基礎式となる緩勾配方程式(1)はBerkhoff(1972)により次式のように導かれた。

$$\nabla(cc_g \nabla \eta) + k^2 cc_g \eta = 0 \quad (1)$$

ここに、 c は波速、 c_g は群速度、 η は水面変動、 k は波数であり、 ∇ は水平方向の微分演算子である。これをRadder(1979)の用いた変数変換式(2)によりHelmholtz型の方程式(3)に変換する。

$$\eta = \frac{\phi}{\sqrt{cc_g}} \quad (2)$$

$$\nabla^2 \phi + k_o^2 \phi = 0 \quad (3)$$

ここで k_o は次式で定義される。これは緩勾配の条件のもとに波数 k にほぼ等しいとすることができる。

$$k_o^2 = k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{cc_g}}{\sqrt{cc_g}} \sim k^2 \quad (4)$$

これらの式はある周波数を持つ成分波に対して有効である。ある成分波に対応する量に添え字 w をつけて表すことにする。成分波の角周波数 ω_w は次式に示すように、任意の代表的な周波数 $\bar{\omega}$ とそれからの偏差 $\Delta\omega_w$ により表すことができる。

$$\omega_w = \bar{\omega} + \Delta\omega_w \quad (5)$$

この $\bar{\omega}$ を代表角周波数と呼び、それに対応する量には $-$ をつけることにする。また、 $\Delta\omega_w$ は $\bar{\omega}$ に比べて小さいとすることで、式(2)および(3)中の係数式を、 $\bar{\omega}$ 周りにTaylor展開することが可能となる。その結果を次に示す。ただし、最終的には次式における係数 C_1 、 K_1 および K_2 は全体的な近似度のバランスを考慮して微分係数値とは異なる値にとることになる。この意味で、次の2式はTaylor展開ではなく、単に $\Delta\omega_w$ の多項式で近似したことになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{cc_g \omega_w}} &\approx \left(\frac{1}{\sqrt{cc_g}} \right) + \Delta\omega_w \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{cc_g}} \right)}{\partial \omega} \\ &\equiv C_0 + \Delta\omega_w C_1 \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_w^2 &\approx \bar{k}^2 + \Delta\omega_w \frac{\partial \bar{k}^2}{\partial \omega} + \frac{1}{2} \Delta\omega_w^2 \frac{\partial^2 \bar{k}^2}{\partial \omega^2} \\ &\equiv K_0 + \Delta\omega_w K_1 + \frac{1}{2} \Delta\omega_w^2 K_2 \quad (7) \end{aligned}$$

これらを成分波に対する式(2)および(3)に代入すると

* 学生会員 工修 東京大学大学院 土木工学専攻

** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

次のようになる。

$$\eta_w = C_0 + C_1 \Delta \omega_w \phi_w \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$F^2 \phi_w + K_0 \phi_w + K_1 \Delta \omega_w \phi_w + \frac{1}{2} K_2 \Delta \omega_w^2 \phi_w = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで x 軸方向に進行する成分波の水面変動について考える。Radder の変換後の ϕ_w については、式 (10) に示すとおり時間項とその他の項に分離が可能となる。そこで時間に関して偏微分を施したのが式 (11) および (12) である。

$$\phi_w = \hat{\phi}_w e^{-i(\bar{\omega} + \Delta \omega_w)t} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial \eta_w}{\partial t} = -i\bar{\omega} \eta_w - i\Delta \omega_w \eta_w \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_w}{\partial t^2} = -\bar{\omega}^2 \eta_w - 2\bar{\omega} \Delta \omega_w \eta_w - \Delta \omega_w^2 \eta_w \quad \dots\dots\dots (12)$$

式 (11) および (12) を連立させることによって式 (13) および (14) を得る。

$$\Delta \omega_w \phi_w = i \frac{\partial \phi_w}{\partial t} - \bar{\omega} \phi_w \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\Delta \omega_w^2 \phi_w = \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial t^2} - 2i\bar{\omega} \frac{\partial \phi_w}{\partial t} + \bar{\omega}^2 \phi_w \quad \dots\dots\dots (14)$$

これらの式を式 (8) および (9) に代入することで $\Delta \omega_w$ を消去し、成分波に対して有効な Radder の変換の近似式および 2 次近似非定常緩勾配不規則波動方程式を導くことができる。

$$\eta_w = (C_0 - C_1 \bar{\omega}) \phi_w + i C_1 \frac{\partial \phi_w}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$F^2 \phi_w + \left(K_0 - K_1 \bar{\omega} + \frac{1}{2} K_2 \bar{\omega}^2 \right) \phi_w + i(K_1 - K_2 \bar{\omega}) \frac{\partial \phi_w}{\partial t} - \frac{1}{2} K_2 \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

(2) 近似曲線の決定

前節で導かれた式 (15) および (16) 中の係数式の値を $\bar{\omega}$ から決定する方法について検討する。これらの係数式は式 (6) および (7) の Taylor 展開に用いられた係数から計算することができる。しかし、 $\omega = \bar{\omega}$ における微分係数をそのまま用いると、 $\bar{\omega}$ から離れた角周波数における係数値の誤差は非常に大きくなる。これは広い周波数帯をもつ不規則波に適用した場合に誤差が大きくなる原因となる。また $\bar{\omega}$ の与え方によっては解が発散することが確認されている。従って広範囲に有効な $\frac{1}{\sqrt{ccg}}$ や k^2 の近似式になるように係数をとりなおす必要がある。近似関数が求まれば、その係数から上述の係数式の値を決定することができる。

そこでまず Radder の変換の近似式 (15) について検討する。これは導入の過程で 1 次の Taylor 展開が用いられているので、最小自乗法により 1 次式で近似する。

$$\frac{1}{\sqrt{ccg}} \approx A_c \omega + B_c \quad \dots\dots\dots (17)$$

この近似は $\frac{1}{\sqrt{ccg}}$ の関数形が 0 近傍を除く全ての ω でほぼ直線であることから、妥当と考えられる。なお、式 (5) より式 (8) の係数と式 (17) の係数との関係は次のようになる。

$$C_0 = A_c \bar{\omega} + B_c \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$C_1 = A_c \quad \dots\dots\dots (19)$$

これを式 (15) に代入すると、係数が成分波の角周波数に依存しない方程式が得られる。また成分波の ϕ_w については、線形理論を用いているために、足し合わせることで不規則波の ϕ にすることができる。そこで成分波についてたてられた式を全成分波について加え合わせることで、不規則波に拡張された Radder の変換の近似式として次式を得る。

$$\eta = B_c \phi + i A_c \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (20)$$

次に 2 次近似非定常緩勾配不規則波動方程式 (16) についても同様の操作を行う。ここでは 2 次の Taylor 展開を用いていることを考慮して、式 (21) で示す軸対称の放物線で近似する。ここでこの方程式は、 $\bar{\omega}$ における k^2 の厳密解と、その ω に関する 1 階偏微分の値を満たすように定める。これにより、 $\bar{\omega}$ における波数、波速および群速度の近似値は厳密解に一致することになる。

$$k^2 \approx A_K \omega^2 + B_K \quad \dots\dots\dots (21)$$

この結果、2 次近似非定常緩勾配不規則波動方程式として次式を得る。

$$F^2 \phi + B_K \phi - A_K \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで式中の B_K は負となり、方程式の解は時間的には安定するものの、空間的には発散する解を持つことに注意する必要がある。式 (22) を断面 2 次元の方程式として書き直したのが次式である。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B_K \phi - A_K \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

(3) エネルギー減衰項の導入

砕波することにより波浪のエネルギーは減少する。そこで方程式中にエネルギー減衰項を導入することにより、エネルギー減衰で砕波変形を表現する。エネルギー減衰係数を F_D とすると、エネルギー減衰型の 2 次近似定常緩勾配不規則波動方程式として次式を導くことができる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B_K \phi - F_D \frac{\partial \phi}{\partial t} - A_K \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで F_D の物理的意味について考察する。緩勾配方程式へのエネルギー減衰係数 f_D の導入は Dalrymple ら

(1984) により提案され、磯部 (1986) により次のように物理的意味付けがなされている。

$$V(Ec_g) = -f_d E \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで E は波浪のエネルギーである。これは左辺がエネルギーフラックスの変化量を表すことから、 f_d がエネルギーを減衰させることを示している。一方 Radder の変換を考慮して f_d と F_d の関係を求めると次のようになる。

$$F_d = \frac{f_d}{cc_g} \quad \dots\dots\dots (26)$$

このことから、従来の砕波モデルに基づく f_d の評価を経て F_d を評価することができる。

3. 数値計算

(1) 数値計算の方法

まず領域としては、計算領域と境界およびその間にエネルギー減衰帯を設ける。このエネルギー減衰帯では、計算領域から外に出ていく波のエネルギーを減衰させる。これにより自由透過型境界を計算領域に設けたのと同様の効果が得られる。ここでは、エネルギー減衰係数 F_d の値をエネルギー減衰帯内で、計算領域から境界に向けて線形的に増加させることでエネルギー減衰を扱う。

数値計算に際しては方程式を差分化する。差分化の方法としては陰解法のなかでも安定性がよいとされる Crank-Nicholson 法を採用する。式 (24) より、連続する2つの時間ステップの水面形が既知であれば、境界条件を与えることにより時々刻々の水面形が時間を追って求められることになる。

エネルギー減衰帯外側の境界条件としては完全反射の条件を用いる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

この条件は、先に述べた方程式の空間的な発散解を除く効果を持つ。また、初期条件としては2時間ステップ分の静水面を与えることになる。

(2) 砕波条件

砕波指標としては、渡辺ら (1983) の示した流速波速比を用いる。また砕波によるエネルギー減衰については、磯部 (1986) によるエネルギー減衰係数 f_d を式 (26) により F_d に変換して計算する。数値計算にあたっては窪ら (1991) と同様の方法を用いる。ここではその概要を述べる。

非定常緩勾配不規則波動方程式を用いる場合、時々刻々の水面波形を直接得ることができる。そこで、空間波形について沖から岸に向かって zero-up-cross 法を用いることにより個々の波を定義する。その各々の波の流速

表-1 砕波条件

$\gamma \geq \gamma_b$	$\gamma_b \geq \gamma \geq \gamma_r$	$\gamma_r \geq \gamma$
砕波	1度砕波した波のみ砕波し続ける	非砕波

波速比 γ を求めることにより砕波の判定を行う (表-1)。砕波限界点における流速波速比 γ_b は次式によって与えられる。

$$\gamma'_b = 0.53 - 0.3 \exp\left(-3\sqrt{\frac{h_b}{L_0}}\right) + 5 \tan^{2/3} \beta \exp\left\{-45\left(\sqrt{\frac{h_b}{L_0}} - 0.1\right)^2\right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\gamma_b = 0.8 \times \gamma'_b \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで h_b は砕波限界点における水深、 L_0 は沖波の波長、 $\tan \beta$ は海底勾配を表す。また再成限界波高に対する流速波速比 γ_r としては次式を用いる。

$$\gamma_r = 0.135 \quad \dots\dots\dots (30)$$

一方、エネルギー減衰係数 f_d は次式で与えられる。

$$f_d = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_s - \gamma_r}} \tan \beta \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\gamma_s = 0.4 \times (0.57 + 5.3 \tan \beta) \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで g は重力加速度である。最終的に得られる F_d は個々の波の波頂位置での値となる。従って、ここで得られた値を線形補間することにより、次の時間ステップを計算するための F_d の空間分布を与えることにする。

(3) 入射波の入力

沖波の入射方法としては、境界線入射法を用いる。これは沖側のエネルギー減衰帯と計算領域との境界線で波を入射する方法である。断面2次元においては1点での入射となる。この方法を用いると、エネルギー減衰帯内では計算領域から外に向かう波についてのみ計算することになる。そのため図-1の計算結果に見られるように、入射境界点を挟んで水面変動が不連続となる。

式 (24) より、ある地点での差分式はその沖側と岸側の各1点ずつのあわせて3点の水面変動を含む。そこでまず、入射境界点に着目する。この点での差分式は沖向き岸向き双方の波を考慮してたてられている。一方エネルギー減衰帯内の点の水面変動は、沖向きの波しか考慮されていない。そのため、入射境界点でたてられた差分式に用いられる3点のうちエネルギー減衰帯内の点については、その点における岸向き入射波による水面変動を計算によって得られた水面変動に足した値を用いる必要がある。同様のことが入射境界点の1つ沖側の点についてもいえる。この点での差分式中の水面変動は沖向きの波しか考慮されていない。従ってここでは、入射境界点について計算によって得られた水面変動から、岸向き入射波による水面変動を引いた値を用いる必要がある。

4. 実験による検証

(1) 実験条件

2 次元非定常緩勾配不規則波動方程式の断面 2 次元数値計算モデルの検証を、実験結果との比較により行った。

実験には全長 23 m、幅 0.8 m の不規則波造波水路を用いた。ただし仕切り板により水路幅を 0.4 m ずつに分割し、観測には片側を利用した。また一様水深部の水深は 34 cm、斜面勾配は沖側の 1 m 区間が 1/10、それより岸側では 1/20 である。実験には 3 種の不規則波を用いた。その諸元は表-2 の通りである。

水面変動の測定点の水深は沖側から 21.5 cm (ST1)、17.0 cm (ST2)、15.0 cm (ST3)、12.5 cm (ST4)、10.0 cm (ST5)、8.0 cm (ST6)、6.5 cm (ST7)、4.5 cm (ST8) とした。また測定には 2 本の容量式波高計を同期させて用い、そのうち 1 本を ST1 に固定し、他方を ST2 から ST8 まで移動させた。サンプリング周波数は 50 Hz とし、1 回の測定につき 10,000 データを採取した。

(2) 実験結果と計算結果の比較

数値計算の入射波は ST1 で得られた時系列データをもとに作成する。また代表角周波数は、実験により ST1 で得られる不規則波のピーク角周波数を用いる。ここで実験においては、Case 1 に比べ Case 2 のほうが碎波し易く、Case 3 ではほぼ全域で碎波が観察された。

図-1 は Case 1 のある時刻における空間波形と波高分布を示したものである。実線が空間波形を、点線が波高分布を示している。入射境界点で入射された不規則波が岸に向かって進む様子が見られる。また、岸側のエネルギー減衰帯で波高が十分減衰されている。その結果、岸から沖に向かう反射波は見られず、沖側のエネルギー減衰帯での波高は 0 となっている。

図-2 は Case 1 の ST4 について、実験と計算による水面変動の時系列データを比較したものである。計算では線形理論を用いているため、非線形現象である波峰

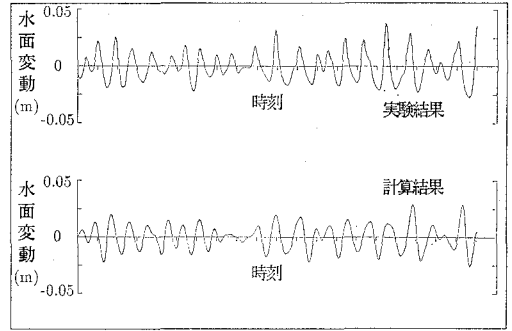


図-2 時系列データの比較 (Case 1-ST4)

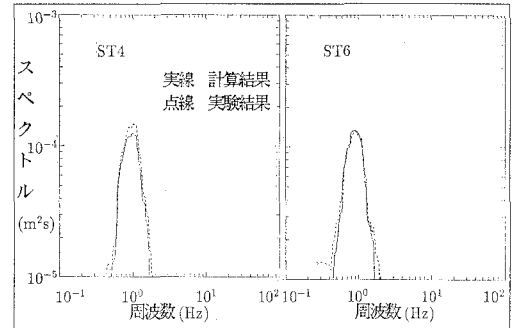


図-3 周波数スペクトルの比較 (Case 1-ST4, ST6)

の先鋭化については表現することができていない。しかし不規則波の特徴である波群については良好に表現できている。また図-3 は Case 1 の ST4 および ST6 について、時系列データから得られた周波数スペクトルを比較したものである。実線が計算結果、点線が実験結果を示す。この 2 点では碎波前のデータが得られており、一致度は良好である。

次に図-4~図-7 は Case 1~Case 3 について有義波高、有義波周期、水面変動 r.m.s. 値およびスペクトル幅パラメタの岸沖分布の実験結果と計算結果を比較したものである。各値とも各測定ごとの ST1 の値で割ることにより無次元化してある。また点線および鎖線は実験の測定点での計算結果を線形補間したものである。ただし、各測定ごとに全く同一の入射波を用いているわけではないので、結果として得られる岸沖分布は厳密な意味での岸沖分布ではない。しかし、同一測定点での実験結果と計算結果は、全く同一の入射波から得られたものである。

有義波高、有義波周期は、各ケースともに一致度は良好である。水面変動 r.m.s. 値についても、多少のばらつきはあるものの傾向としてはよい結果が得られている。一方スペクトル幅パラメタについては、各ケースともに計算結果の方が早く大きな値に到達する傾向がある。ただし、いずれの場合についても碎波帯より岸側での誤差

表-2 実験の入射波諸元

Case	有義波高	有義波周期	スペクトル形状
1	0.05m	1.0s	Pierson-Moskowitz
2	0.05m	1.0s	JONSWAP
3	0.10m	1.0s	Pierson-Moskowitz

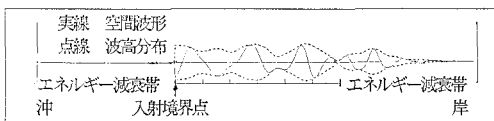


図-1 空間波形と波高分布 (Case 1)

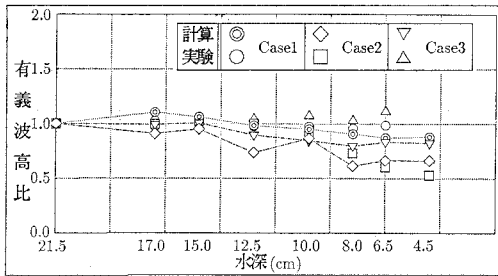


図-4 有義波高の比較

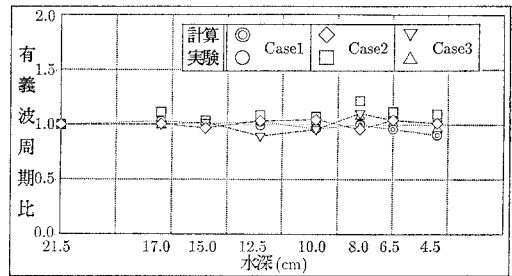


図-5 有義波周期の比較

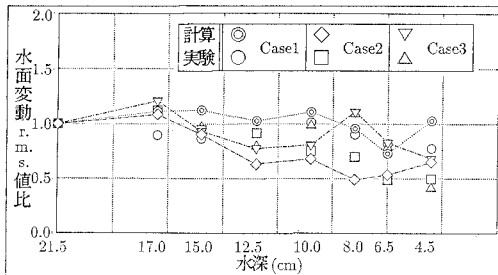


図-6 水面変動 r.m.s. 値の比較

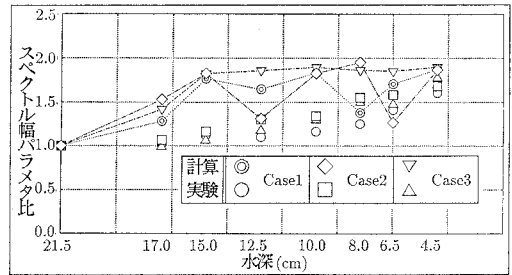


図-7 スペクトル幅パラメータの比較

が大きくなっている。

5. おわりに

実験および計算は、不規則波の周波数帯が広い場合と狭い場合の双方について行われた。その結果、有義波高、有義波周期および波浪のエネルギーの代表値としての水面変動 r.m.s. 値に関して、2次近似非定常緩勾配不規則波動方程式は精度よく予測が可能であることが確認された。しかし、線形理論を基礎にしているため、実際の波にみられる非線形性までは再現できず、波形を正確に予測することはできない。特に砕波後の評価については誤差が大きくなってしまふ。また、近似の過程において波数を過大評価する傾向があるため、代表角周波数から離れた角周波数を持つ成分に対しては誤差が生じる。そのためスペクトル幅パラメータについては精度の高い予測は困難である。そこでより高精度の近似が期待されるが、方程式の解の発散等の制約から今のところ2次近似が最も合理的であると思われる。

波浪変形予測を海岸構造物の設計などに応用する場合、波浪のエネルギーや波高が重要な要素となる。以上を考慮すると、本研究により導かれた2次近似非定常緩勾配不規則波動方程式は十分有効であると考えられる。

今回は断面2次元問題に限って議論を行ったが、Helmholtz型の式を用いていることから平面への拡張は容易と考えられる。また、境界線入射の方法は、平面に拡張された場合に更に大きな効果が期待できる。今後は、平面問題への適用を検討することにより、高速で高精度な波浪変形予測の数値シミュレーションモデルの実現が期待される。

参考文献

- 磯部雅彦 (1986): 放物型方程式を用いた屈折・回折・砕波変形の計算法, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 134-138.
- 注 泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃 (1991): 非定常緩勾配不規則波動方程式について, 海岸工学論文集, 第38巻, pp. 46-50.
- 渡辺 晃・原 哲・堀川清司 (1983): 重合した波浪場における砕波について, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 5-9.
- Berkhoff, J. C. W. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 471-490.
- Dalrymple, R. A., J. T. Kirby and P. A. Hwan (1984): Wave diffraction due to areas of energy dissipation, Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 110, No. 1, pp. 67-79.
- Radder, A. C. (1979): On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 72, pp. 373-348.