

砕波帯内における水面渦度の推定式とそれに基づく 戻り流れの鉛直分布の理論

平 山 秀 夫*

1. 緒 論

近年, LDV の開発などの計測技術の進歩とも相まって, 砕波帯内でも流速測定が可能となり, 数値モデルの開発や可視化手法との併用の下に砕波帯内での流体運動のダイナミックスの解明が進展し, 特に, 乱れやレイノルズ応力分布などの砕波帯内流速場の構造の解析やエネルギー逸散過程あるいは戻り流れ (undertow) の分布特性の理論的表示法の確立, 等の研究に関心が集まってきた。

砕波帯内における戻り流れは, 一般に, 水面付近では岸向き, 一方, 底面付近では沖向きであって, 海浜地形変化や海浜流の発生機構と密接に関連しており, 主として砕波に伴って発生する平均水位の上昇や水表面の組織的渦と乱れに支配されることがわかっている (例えば, Svendsen, 1984)。従って, 砕波帯内における流れの分布特性を理論的に表示するためには, まず, この水表面付近の渦層内の渦度を定量的に把握することが不可欠である。

本研究では, このような観点から, 平山 (1991) に引き続いて砕波帯内における戻り流れの鉛直分布の Euler 的表示法に基づく理論の, より簡便な表示法の確立を目指そうとするものである。ここではまず, 水面渦度を支配する要因を明らかにすることによって水面渦度の簡単な推定式を求めることを試みる。次に, この提案された水面渦度の推定式を用いて導出された戻り流れの鉛直分布の理論結果を, 従来示されている岡安ら (1987) の実験値との比較検討から理論の適合性を調べるとともに, この方法によれば, 入射波の条件と砕波点位置さえ与えれば, 砕波帯内任意断面における戻り流れの鉛直 2 次元分布及び水面渦度の大きさや分布が簡単に推定できることを示す。

2. 渦度の推定式の提案

ここでは, 平山 (1991) に示したように, Longuet-Higgins (1960) の水平床上における非砕波時の水面渦

度の理論結果と類似な考え方が, 砕波帯内の水面渦度の評価にも適用できるものと仮定する。

Longuet-Higgins (1960) によれば, 水平床上の砕波帯外における水面渦度は, 理論的に次式のように求められている。

$$\omega_i = -4a_i^2 \sigma k_i^2 \coth k_i h_i \dots\dots\dots (1)$$

ここで, suffix i は水平床上での値を意味し, $a_i = H_i/2$ (H_i : 水平床上での入射波高), $k_i = 2\pi/L_i$ (L_i : 入射波の波長), $\sigma = 2\pi/T$ (T : 周期), h_i : 水深である。

一方, 傾斜面上任意水深における砕波帯内の渦度 ω_z の鉛直分布は, 水平質量輸送速度 $\bar{U}$ の鉛直速度勾配を理論的に求めることにより次式のように表わされる (平山, 1992)。

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \\ &= \frac{a^2 \sigma}{4 \sinh^2 kh} \left[4k^2 \sinh 2k(z-h) \right. \\ &\quad + \frac{kz}{h^2} \left\{ \frac{3}{k} \cdot \left(\frac{4 \sinh^2 kh}{a^2 \sigma} \cdot \bar{U}_\infty - 2k \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + 3 \sinh 2kh \cdot \left(\beta kh + \frac{1}{kh} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2\beta k^2 \sinh 2kh \right] \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで, β : 渦度係数 (平山, 1991), $\bar{U}_\infty$: 底面質量輸送速度, k : 波数, h : 水深, z : 鉛直座標 (水面を原点として鉛直下方を正とする.), $a = H/2$ (H : 波高), である。

従って, 水面渦度 ω は, 式 (2) で $z=0$ とおくことによって次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \omega &= (\partial \bar{U} / \partial z)_{z=0} \\ &= -a^2 \sigma k^2 (2 + \beta) \coth kh \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここで, $\beta = 2.0$ のときが水平床上の非砕波時の水面渦度 (式 (1)) を表わすことになる。

また, 式 (1) 及び (3) より ω と ω_i との相対比を α とすれば, α は次式のように表わされる (α : 相対水面渦度)。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega}{\omega_i} \\ &= \frac{H^2 k^2 \coth kh}{4 H_i^2 k_i^2 \coth k_i h_i} (2 + \beta) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

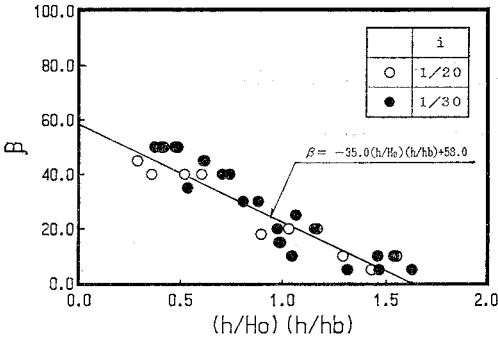


図-1 β と $(h/H_0) \cdot (h/h_b)$ の関係

さて、これらの式(2)~(4)中の β の値は、戻り流れの理論値と実験値との対応から推定されるが、これまでに得られた β の値(平山, 1991)を次元解析的に h/H_0 (H_0 : 沖波波高), h/h_b (h_b : 砕波水深)等の諸元で整理すると、図-1に示すように、傾斜底面勾配にかかわらず、次式のような $(h/H_0) \cdot (h/h_b)$ に関する1次関数(回帰直線)で表示されることが明らかになった。

$$\beta = -35(h/H_0) \cdot (h/h_b) + 58.0 \quad (5)$$

従って、この β を与える式(5)を用いれば、傾斜面上の水面渦度 ω 及び相対水面渦度 α の推定式は、それぞれ次式のように与えられる。

$$\omega = 2a^2\sigma k^2 \left(\frac{17.5h^2}{H_0h_b} - 30.0 \right) \coth kh \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{5}{4} \frac{H^2 k^2}{H_0^2 k_i^2} \frac{\coth kh}{\coth k_i h_i} \left(12 - \frac{7h^2}{H_0h_b} \right) \quad (7)$$

3. 水面渦度の推定式に基づく戻り流れの鉛直分布の理論解析

(1) 基礎式、連続式及び境界条件式

ここでは、平山(1990)と同様に、傾斜面上の砕波帯内でも水表面の渦層を除けば、波動成分(ポテンシャル成分)は消失することなく存在し、かつ渦層の水面渦度は近似的に前述の式(6)で表現できるという仮定のもとに、戻り流れの鉛直分布のEuler的表示に関する理論的展開を行う。

いま、戻り流れの鉛直分布を支配する基礎方程式は、次式に示すようなLonguet-Higgins(1953b)のconduction equationによって表わされるものとする。

$$\varepsilon^2 \nabla^4 \Psi = \nabla^4 \left\{ \frac{\sigma \sinh 2k(z-h)}{4 \sinh^2 kh} a^2 \right\} \quad (8)$$

ここで、 $\varepsilon = a/L$ (L : 波長), Ψ : 質量輸送の流れ関数、である。

次に、式(8)中の Ψ をLonguet-Higginsと全く同様に、

$$\varepsilon^2 \Psi = a^2 \sigma \{ \sinh 2k(z-h) + Z^p(z) \} / 4 \sinh^2 kh \quad (9)$$

のように仮定すれば、式(8)から次の基礎微分方程式が得られる。

$$d^4 Z^p / dz^4 = 0 \quad (10)$$

この式を積分することによって、 Z^p は、

$$Z^p = \frac{1}{6} C_1 z^3 + \frac{1}{2} C_2 z^2 + C_3 z + C_4 \quad (11)$$

のように求まる。ここで、 C_i ($i=1 \sim 4$)は未知の積分定数であって、以下に示す連続条件及び境界条件式から決定される。

連続条件式は、砕波帯内の波動層内でも、運動の連続性は保持されているものとすれば、質量輸送の流れ関数 Ψ は、 $(\Psi)_{z=0}=0$ 及び $(\Psi)_{z=h}=0$ が満足されなければならないので、結局、次式のように表わされる。

$$(Z^p)_{z=0} = \sinh 2kh \quad (12)$$

$$(Z^p)_{z=h} = 0 \quad (13)$$

一方、水面境界条件式は、前述の水面渦度の推定式(6)を適用することによって、次式のように表わされる。

$$\left(\frac{d^2 Z^p}{dz^2} \right)_{z=0} = \left(\frac{70h^2}{H_0h_b} - 116.0 \right) k^2 \cdot \sinh 2kh \quad (14)$$

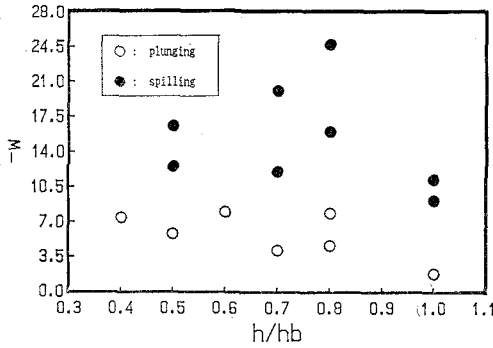
また、底面境界条件式は、従来提案されている平山(1987)の式をそのまま適用すると、底面上での実験値との適合性に若干の差異が生じるので、それを補正する意味で、底面質量輸送速度($\bar{U}_\infty$)そのものの値に補正係数 m ($0 < m < 1$)を乗じて求めた次式を用いた。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dZ^p}{dz} \right)_{z=h} &= 5km \left\{ \frac{1}{5} (2 + 3 \cos \theta) - \frac{3}{5} \cos \theta \cdot \frac{dh}{dx} \right. \\ &\times \left(\frac{1}{Hk} \frac{dH}{dh} - \coth kh \right) - \frac{1}{5k} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \cdot \sin \theta \\ &\left. - \frac{4}{5k} \cos \theta \cdot \frac{d\alpha'}{dx} \left(\alpha' - \frac{1}{2} \right) \right\} - 2k \quad (15) \end{aligned}$$

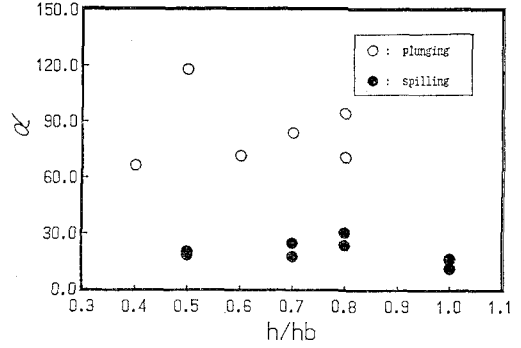
(2) 理論結果

以上の条件式(12)~(15)を式(11)に適用すれば、 C_i ($i=1 \sim 4$)が算定され、最終的には、Lagrange的な質量輸送速度 $\bar{U}$ ($=\varepsilon^2 \partial \Psi / \partial z$)が求められる。しかし、ここでは、理論値をEuler的な実験値と比較する観点から、この $\bar{U}$ からStokes drift($\partial u / \partial x \cdot \int_0^t u dt + \partial u \partial z \cdot \int_0^t w dt$)の効果を取り除いたEuler的な戻り流れの理論結果($\bar{U}_E$)を、次式のように算出した。

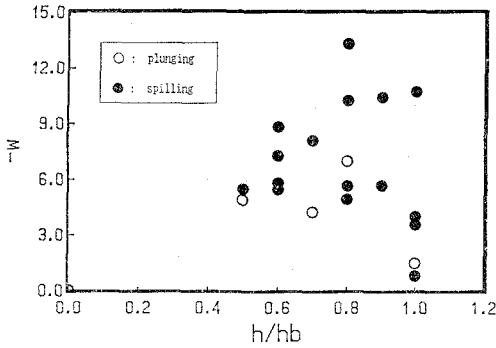
$$\begin{aligned} \bar{U}_E &= \frac{a^2 \sigma k}{4 \sinh^2 kh} \left\{ 3m \cos \theta + \frac{\beta kh}{2} \right. \\ &\times \left(3 \frac{z^2}{h^2} - 4 \frac{z}{h} + 1 \right) \sinh 2kh \\ &+ 3 \left(\frac{\sinh 2kh}{2kh} + \frac{3}{2} m \cos \theta \right) \\ &\times \left(\frac{z^2}{h^2} - 1 \right) + \left(-3 \frac{z^2}{h^2} + 1 \right) (1-m) + Q \left. \right\} \quad (16) \end{aligned}$$



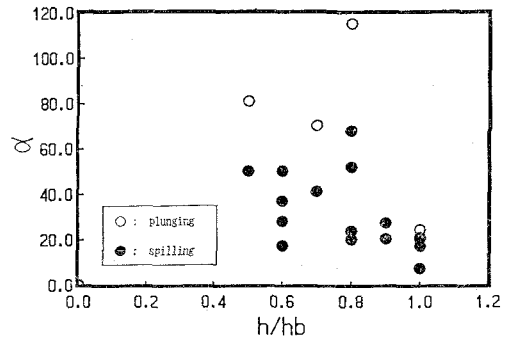
(1) $i=1/20$ の場合



(1) $i=1/20$ の場合



(2) $i=1/30$ の場合



(2) $i=1/30$ の場合

図-2 砕波型式による水面渦度の変化

図-4 砕波型式による相対水面渦度の変化

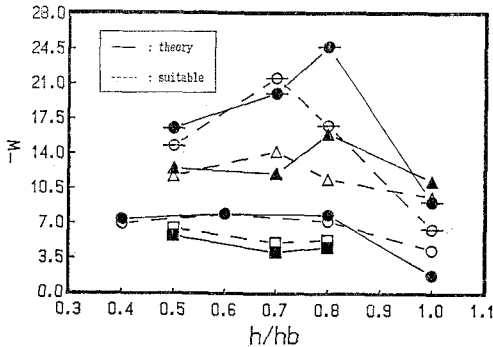


図-3 本推算法と β の最適値に基づく場合の水面渦度の比較

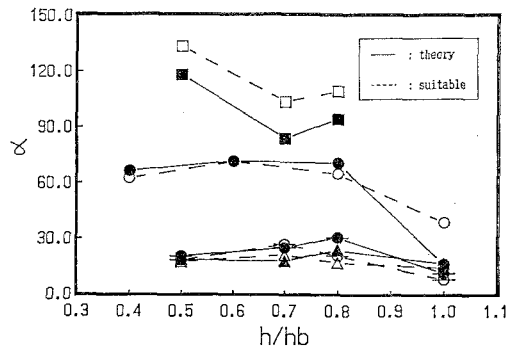
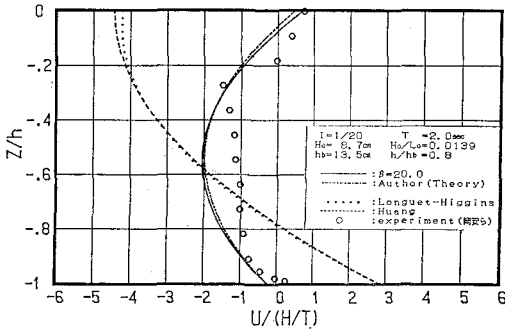
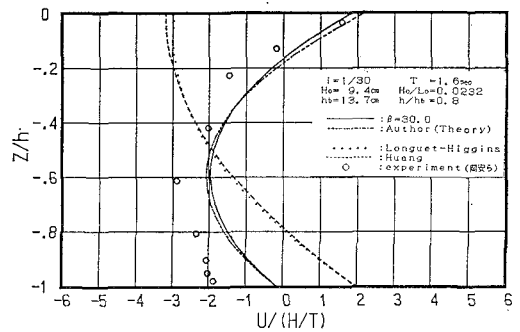
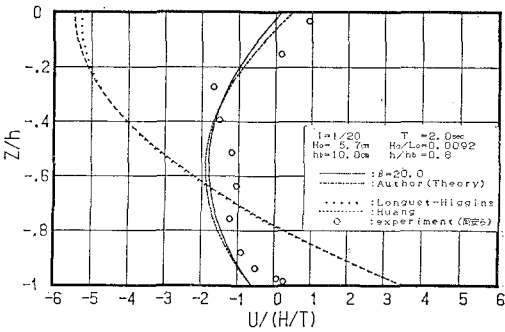
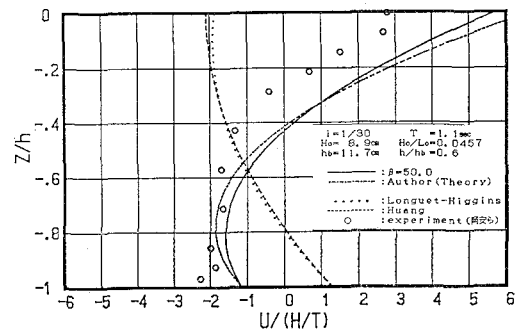
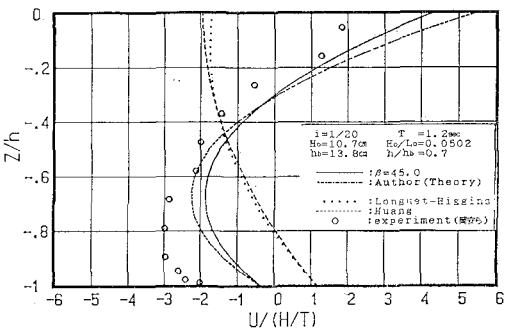
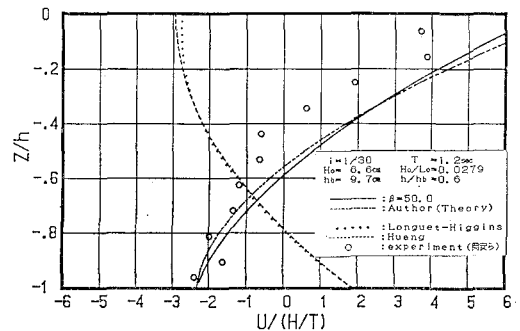


図-5 本推算法と β の最適値に基づく場合の α の比較

ここで、 Q は次式のように表わされる。

$$Q = 3m \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) \frac{3}{2} \left[-\frac{4}{3K} \left(\alpha' - \frac{1}{2} \right) \frac{d\alpha'}{dx} \cos \theta \right. \\ \left. - \sin \theta \left(\frac{1}{4kh_b} \left[\frac{h}{h_b} + \frac{4}{9}K \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ \left(\frac{h}{h_b} \right)^{-7/2} - \frac{h}{h_b} \right\} \right]^{-1} \left\{ 1 - \frac{4}{9} \frac{K}{B} \left[h_b \cdot \frac{dB}{dh} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ \frac{h}{h_b} - \left(\frac{h}{h_b} \right)^{-7/2} \right\} + B \left\{ 1 + \frac{7}{2} \left(\frac{h}{h_b} \right)^{-9/2} \right\} \right] \right\} \right] \\ \left. + \coth kh + \frac{1}{3k} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \right] \dots\dots\dots (17)$$

なお、砕波帯内における波高 H の推定は、平山 (1990) と全く同様に岩垣・間瀬ら (1981) の推定式を用い、上式中、 $K = (2\gamma/\pi) \cdot B\varepsilon_0^{-1}$ 、 $\gamma = H_b/h_b$ (H_b : 砕波々高), $\varepsilon_0 = \tan \theta / \sqrt{H_0/L_0} (\tan \theta$: 底勾配), B は底面勾配別に異なる値で h/h_b の関数、 α' は境界層厚を規定する変数 (水平床上の場合に $\alpha' = 4.1$ となる), である。また、式中の m の値は底面戻り流れの実験値との対応から $m=0.5$ の場合が最適であると推定された。

(1) $T=2.0\text{s}$, $H_0=8.7\text{cm}$, $h/h_b=0.8$ の場合(4) $T=1.6\text{s}$, $H_0=9.4\text{cm}$, $h/h_b=0.8$ の場合(2) $T=2.0\text{s}$, $H_0=5.7\text{cm}$, $h/h_b=0.8$ の場合(5) $T=1.1\text{s}$, $H_0=8.9\text{cm}$, $h/h_b=0.6$ の場合(3) $T=1.2\text{s}$, $H_0=10.7\text{cm}$, $h/h_b=0.7$ の場合(6) $T=1.2\text{s}$, $H_0=6.6\text{cm}$, $h/h_b=0.6$ の場合図—6 戻り流れの鉛直分布の本理論値と実験値の比較 ((1)~(3); $i=1/20$, (4)~(6); $i=1/30$)

4. 解析結果及び考察

(1) 水面温度及び相対水面温度の特性

図—2(1), (2) は, 式 (6) に基づいて算出された水面温度 ω の水面分布を砕波型式別に比較して示したもので, (1) は $i=\tan\theta=1/20$, (2) は $i=1/30$ の場合の結果である. これらの図から明らかなことは, 1) ω の値の水平分布は砕波型式によって明らかに異なり, plunging 型の場合には, 水平方向の位置の変化による ω の差異はあまり見られないが, 一方, spilling 型におけるそれは, 変化が著しく, 特に $h/h_b \approx 0.8$ 付近で最大値をとる傾向にあること, 2) ω の値そのものは, 底勾配の変化にかかわらず, spilling 型の場合が plunging 型に

比して大きく, かつ全般的に底勾配が急なほど大きくなる傾向が見られ, この特性は, 平山 (1991) が示した β の最適値から算定された ω の結果とほぼ類似していること, 等である.

図—3 は, 式 (6) を用いて推定された $i=1/20$ の場合における ω の場所的分布特性 (図中, 実線) と, 平山 (1991) が示した β の最適値に基づいて算定された結果 (図中, 破線) とを各実験条件ごとに比較検討したものである (図中, ●, ○: $T=2.0\text{s}$, $H_0=8.5\text{cm}$, $h_0=40.0\text{cm}$, ■, □: $T=2.0\text{s}$, $H_0=5.6\text{cm}$, $h_0=40.0\text{cm}$, ▲, △: $T=1.17\text{s}$, $H_0=9.9\text{cm}$, $h_0=40.0\text{cm}$, ●, ○: $T=0.91\text{s}$, $H_0=6.7\text{cm}$, $h_0=40.0\text{cm}$). この図から明らかなように, $h/h_b=0.8$ 付近で両者に若干の差異が見

られるものの、全般時にはほぼ同じ分布傾向を示していること、さらには、水面渦度の大きさは、砕波型式や底面勾配によっても変化するが、全般的には $3 \sim 25$ (1/s) 程度であって、これまでに示されている流速測定結果から算出された結果（例えば、三村ら、1984；灘岡ら、1985；水口ら、1985；滝川ら、1991）とオーダー的に一致することから、本推定式に基づく結果は、水面渦度の大きさ及び水平分布をある程度説明できるものと思われる。

一方、図-4(1)、(2)は、式(7)で示した相対水面渦度 α の砕波型式による変化特性を、底面勾配別に示したもので、(1)が $i=1/20$ 、(2)が $i=1/30$ の場合の結果である。これらの図から明らかなように、 α の値は、図-2で示した ω の値の分布とは異なっており、底面勾配にかかわらず全般的に plunging 型の場合が spilling 型に比して大きな値をとる傾向が見られ、この特性も平山 (1991) の場合と全く同様である。また、図-5は、図-3と同様に、本推算式(7)によって算出された相対水面渦度 α の場所的分布と、平山 (1991) が示した β の最適値に基づく場合の結果とを比較検討したものである。この図からも明らかなように、 α の分布特性は、両者にはあまり差異がないことから、前述の ω の推算式と同様に、 α の値も式(7)である程度推定できるものと考えられる。なお、図中の記号は、図-3の場合と全く同様な条件を示している。

(2) 戻り流れの理論値と実験値との適合性

図-6(1)~(6)は、式(16)に基づく理論値と岡安ら (1987) の実験値とを比較したもので、図の(1)~(3)は $i=1/20$ の場合、図の(4)~(6)は $i=1/30$ の場合の結果である。図中、1点鎖線が本理論結果、実線は β の最適値による結果、○印が岡安らの実験値である。なお、図中には参考のために、水平床における Longuet-Higgins (1953b) 及び Huang (1970) の理論結果もそれぞれ点線及び破線で示してある。これらの図から、1) 本理論結果と実験値との適合度は、底面付近で若干の差異が見られる場合があるものの、全般的には、底面勾配の変化にかかわらず、かなり良好であると思われること（底面付近のこの両者の差異は、前述のように補正係数 m を一律に 0.5 としたために生じたものと考えられる。）、2) 戻り流れの鉛直分布は、一般に、水深が浅くなって h/h_0 が小さくなるにつれて、底面 ($z/h = -1$) における戻り流れの値が負の方向（沖向き）に大きくなり、一方、水表面付近では、逆に正の方向に大きくなっていること、等が明らかである。

5. 結 論

本研究で得られた成果を要約すれば、次のようである。

1) 砕波帯内の渦度係数 β の値は、 $h/H_0 \cdot h/h_0$ の関

数として規定でき、近似的に式(5)のような簡単な1次式で表わすことができる。

2) この近似式に基づけば、水面渦度の推定式が式(6)のように求められ、この式から推定される水面渦度のオーダーは $1 \sim 10^1$ であり、従来の結果とオーダー的に一致することから、水面渦度は式(6)で簡単に推定できる。

3) 定式化された水面渦度に基づいて、砕波帯内の戻り流れの鉛直分布の理論結果が式(16)のように誘導されるが、この理論値は実験値を良く説明できるようである。

4) この理論結果は、入射波条件と砕波点位置 (h/h_0) を与えさえすれば、簡単に戻り流れの鉛直2次元分布を推定できることから、簡便で実用的であると思われる。

最後に、これまで温かい御指導を賜ってきた京都大学名誉教授岩垣雄一先生（現在名城大学理工学部長）、日頃、御激励を賜っている京都大学防災研究所教授土屋義人先生及び実験データを快く御提供賜った横浜国立大学工学部助教授柴山知也・岡安章夫の両先生に深甚なる謝意を表わします。

参 考 文 献

- 岩垣雄一・間瀬 肇・田中 剛(1981): 不規則波の浅海変形モデルについて、第28回海岸工学講演会論文集、pp. 104-108.
- 岡安章夫・柴山知也・堀川清司(1987): 砕波帯内定常流速場の鉛直分布に関する研究、第34回海岸工学講演会論文集、pp. 31-35.
- 滝川 清・山田文彦・有元光久・田淵幹修(1991): 斜面上の砕波変形過程の内部特性とその数値解析、海岸工学論文集、第38巻、pp. 61-65.
- 灘岡和夫・小谷野喜二・日野幹夫(1985): 二成分光ファイバー流速計を用いた砕波帯内流速場の特性の解明、第32回海岸工学講演会論文集、pp. 26-30.
- 平山秀夫(1987): 二次元傾斜海岸上における質量輸送に関する理論的研究(第2報)、第34回海岸工学講演会論文集、pp. 6-10.
- 平山秀夫(1990): 砕波帯内における質量輸送(戻り流れ)の鉛直分布に関する研究、海岸工学論文集、第37巻、pp. 41-45.
- 平山秀夫(1991): 砕波帯内における戻り流れと水面渦度の推定法に関する研究、海岸工学論文集、第38巻、pp. 76-80.
- 平山秀夫(1992): 砕波帯内における水面渦度の推定法に関する研究、大阪府立高専研究紀要、第26巻(投稿中).
- 水口 優・友金幸治(1985): 巻き波型砕波時の流れの場の実験的研究、第32回海岸工学講演会論文集、pp. 60-64.
- 三村信男・岡安章夫・柴山知也・P. Kamronrithisorn(1984): Plunging 砕波によって発生する砕波帯内流速場の構造、第31回海岸工学講演会論文集、pp. 11-14.
- Longuet-Higgins, M. S. (1953b): Mass transport in water waves, Phil. Trans. Royal Soc. London, Series A, No. 903, Vol. 245, pp. 535-581.
- Longuet-Higgins, M. S. (1960): Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface, J. F. M., Vol. 8, pp. 293-306.
- Svendsen, I. A. (1934): Mass flux and undertow in a surf zone, Coastal Eng., Vol. 3, pp. 347-365.