

演算子分離法と有限特性曲線法を用いた 平面波浪場の非線形数値計算モデル

余 錫平*・磯部雅彦**・渡辺 晃**

1. 序 言

近年、沿岸域利用や海岸保全などの分野における必要性から、平面波浪場の数値計算モデルの開発に関する研究がさかんに行われている。その中で、線形波理論と経験的碎波モデルを組み合わせる方法が開発され、その実用性が数多くの研究によって確かめられてきた（たとえば、渡辺・丸山, 1984; 磯部, 1986; Yu ら, 1992b）。しかし、数値モデルの解を実現象により近づけるためには、波の不規則性と非線形性を考慮する必要がある。本研究はこのうち非線形性に着目し、非線形波動方程式の誘導とその数値計算手法の開発を含む非線形数値波動モデルの提案を行うものである。

線形波理論が成り立つ条件は、深海波に対しては波形勾配が小さいことであり、長波に対しては波高水深比が小さいことである。この2つの条件は、関係式 $gH/C^3 \ll 1$ (H : 波高, C : 波速, g : 重力加速度) によってまとめることができるが、汀線までこの条件が満たされることはない、すなわち、深海から汀線に至るまで非線形性が無視できることはない。

非線形性を考慮した波理論に関しては長波理論 (Stoker, 1957) および Boussinesq 理論 (Peregrine, 1967) などがあるが、いずれも長波の仮定に基づいた理論であり、深海域から海岸線までの一連の波動運動の全体に適用することはできない。そこで本研究においては、新たな非線形波動方程式を導き、既存の理論との整合性を示した上で、演算子分離法と有限特性曲線法に基づく数値計算手法を開発する。そして、水深変化による波浪変形の数値計算結果を西村ら (1983) の実験データと比較し、提案した理論と数値計算手法の妥当性を検討する。

2. 理 論

(1) 基礎方程式

非粘性・非圧縮性流体が非回転運動するものと仮定す

れば、波運動の基礎方程式は次のような連続式とオイラ一方程式となる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_i w)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p_d}{\rho} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(w u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p_d}{\rho} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 u_j および w はそれぞれ水平2方向および鉛直方向の流速、 p_d は全圧力から静水圧を引いた残りの動圧力、 ρ は流体の密度、 x_j および z はそれぞれ水平2方向および鉛直方向の座標、 t は時間を表す。また、添字 i および j ($i, j=1, 2$) は水平2成分を示し、総和規約に従う。また、水面および底面における境界条件は次のように表される。

$$p_d - \rho g \eta = 0 \quad (z = \eta) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \eta}{\partial x_j} - w = 0 \quad (z = \eta) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} + w = 0 \quad (z = -h) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 η は静水面を基準とする水面変動、 h は静水深である。

水面における境界条件式 (4) および (5) を線形化し、さらに式 (6) で底面が水平であるとすれば、よく知られた微小振幅波理論の解を得る。これを、同じ近似の程度で水面での圧力が厳密に0となるように修正すれば次の関係式が得られる。

$$\frac{p_d}{\rho} = g \eta \frac{\cosh k_m(h+z)}{\cosh k_m(h+\eta)} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$u_i = \frac{\cosh k_m(h+z)}{\cosh k_m(h+\eta)} u_i^0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 u_i^0 は水面における水平流速であり、 k_m は修正波数で

$$\sigma^2/g = k_m \tanh k_m(h+\eta) \quad \dots\dots\dots (9)$$

なる分散関係式によって角周波数 σ と関係づけられる。

ここで、有限振幅波の基礎方程式を導くためにオイラ一方程式を鉛直方向に積分するに際し、圧力と水平流速の鉛直分布が式 (7) および (8) のように表されるも

* 工博 元東亜建設工業(株) 技術研究所
現香港大学機械工学科

** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

のとする。これと水面および底面の境界条件式 (4) ~ (6) を考慮し、連続式 (1) および運動量方程式 (2) を鉛直方向に底面から水面まで積分し、さらに底面摩擦項を付加すると、次の非線形波動方程式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\beta q_i q_j}{h + \eta} \right) + \left[\left(1 - \frac{\sigma^2 \eta}{g} \right) C_m^2 + \kappa_2 g \eta \right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \kappa_1 g \eta \frac{\partial h}{\partial x_i} + f_D \frac{q_i C_m}{h + \eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $q_j = \int_{-h}^{\eta} u_j dz$ ($j=1, 2$) は水平2方向の線流量であり、 $C_m = \sigma/k_m$ は修正波速である。また、運動量補正係数 β 、および係数 κ_1 と κ_2 は次式で表される。

$$\beta = n_m \alpha \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\alpha = \frac{k_m(h + \eta)}{\tanh k_m(h + \eta)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$n_m = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k_m(h + \eta)}{\sinh 2k_m(h + \eta)} \right] \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\kappa_1 = \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\cosh k_m(h + \eta)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\kappa_2 = \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\cosh^2 k_m(h + \eta)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

摩擦係数 f_D は、層流境界層の場合には Dalrymple ら (1984) にならって、次式のように与える。

$$f_D = 2f' \sqrt{1 + f'^2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$f' = \frac{1}{2} k_m \sqrt{\frac{\nu}{2\sigma}} \frac{2k_m(h + \eta)}{n_m \sinh 2k_m(h + \eta)} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 ν は流体の粘性係数である。

(2) 既存理論との整合性

a) 非線形長波理論との整合性

長波の場合、 $k_m(h + \eta) \rightarrow 0$ であるから、これを C_m 、 β 、 κ_1 および κ_2 の定義式に代入すると、 $C_m^2 = g(h + \eta)$ 、 $\beta = 1$ 、 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ となる。従って、摩擦項を無視すると式 (11) は次のようになる。

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q_i q_j}{h + \eta} \right) + g(h + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで平均流速 $\bar{u}_j = q_j/(h + \eta)$ を導入し、連続式 (10) を考慮すれば、

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

これは非線形長波理論の運動量方程式と一致する (Stoker, 1957; Mei, 1989)。このことはここで導いた非線形波動方程式が長波領域において分散項を含まないことを意味する。

b) 線形理論との整合性

波形勾配が小さい場合に式 (11) を線形化すると次式が得られる。

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \kappa'_1 g \eta \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 C は微小振幅波の波速を表す。係数 κ'_1 は κ_1 を線形化したもの、つまり式 (15) において $(h + \eta)$ を h に置き換えたものとなる。式 (21) は緩勾配方程式の近似精度 (海底勾配の1次オーダー) の範囲内で渡辺・丸山 (1984) の非定常緩勾配方程式の運動量式と一致する (Yura, 1992a)。つまり、式 (10) および (11) で波動運動を解析すると、エネルギー保存則が満たされる。

式 (21) において、さらに海底勾配が波形勾配に比べて無視できると仮定すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

これは、谷本・小舟 (1975) の数値波動方程式と一致する。

3. 数値計算法

導かれた波動方程式は非線形であるために、精度よく効率的でしかも数値的に安定な数値計算法を用いる必要がある。ここでは、演算子分離法と有限特性曲線法を組み合わせた方法を提案する。

(1) 演算子分離法

演算子分離法は平面2次元非定常流の計算で用いられた方法である (He・Lin, 1986; Benque ら, 1982)。例えば、次のような微分方程式によって物理量 B の時間的な変化が表される場合を考える。

$$\frac{\partial B}{\partial t} + D_1[B] + C_2[B] = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $D_1[\]$ と $D_2[\]$ は座標に関する微分演算子である。式 (23) を差分化すると、

$$\frac{B^{n+1} - B^n}{\Delta t} + \sigma_1[B^{n+p}] + \sigma_2[B^{n+q}] = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

と書ける。ただし、 $\delta_1[\]$ と $\delta_2[\]$ はそれぞれ $D_1[\]$ と $D_2[\]$ に対する差分演算子を表し、 Δt は時間増加量、 p, q ($0 \leq p, q \leq 1$) と n (整数) は時間ステップを示す。

ここで式 (24) を次の2式に分離する。

$$\frac{\bar{B} - B^n}{\Delta t} + \delta_1[B^{n+p}] = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{B^{n+1} - \bar{B}}{\Delta t} + \delta_2[B^{n+q}] = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 $\bar{B}$ は中間段階における暫定値を示す。式 (25) および (26) は、時間ステップ Δt 内で、それぞれ次のような微分方程式の差分形式であるといえる。

$$\frac{\partial B}{\partial t} + D_1[B] = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + D_2[B] = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

ただし、式 (27) の初期値は B^n であるのに対して、式 (28) の初期値は $\bar{B}$ 、つまり式 (27) の解である。従って、図-1 に示すように、時間ステップ n から $n+1$ までの B の変化は式 (27) と (28) を順に解くことによ

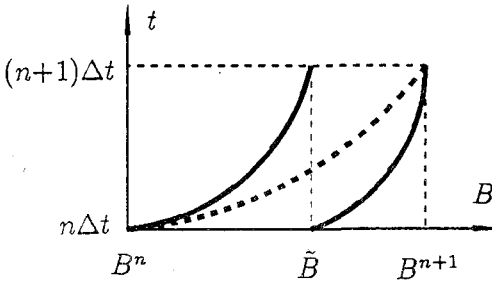


図-1 演算子分離法の説明図

って得られる。

(2) 基礎方程式の分離

物理的な観点から、式 (10) および (11) は、水面変動と線流量の時間的な変化が移流、および x_1 と x_2 方向の伝播から成り立っていることを意味する。そこで、これらの式を次のように分離する。

ステップ 1: 移流

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta q_x q_x}{h + \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta q_y q_x}{h + \eta} \right) = 0 \quad \dots (29)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta q_x q_y}{h + \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta q_y q_y}{h + \eta} \right) = 0 \quad \dots (30)$$

ステップ 2: x 方向への伝播

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} = 0 \quad \dots (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial t} + \left[\left(1 - \frac{\sigma^2 \eta}{g} \right) C_m^2 + \kappa_2 g \eta \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} + \kappa_2 g \eta \frac{\partial h}{\partial x} \\ + f_D \frac{q_x C_m}{h + \eta} = 0 \quad \dots (32) \end{aligned}$$

ステップ 3: y 方向への伝播

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad \dots (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_y}{\partial t} + \left[\left(1 - \frac{\sigma^2 \eta}{g} \right) C_m^2 + \kappa_2 g \eta \right] \frac{\partial \eta}{\partial y} + \kappa_2 g \eta \frac{\partial h}{\partial y} \\ + f_D \frac{q_y C_m}{h + \eta} = 0 \quad \dots (34) \end{aligned}$$

ここに、 $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $q_x \equiv q_1$ および $q_y \equiv q_2$ である。

(3) 移流項の差分スキーム

式 (29) および (30) は、 β の変化率を無視すれば次のように書き直せる。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \beta \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \beta \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0 \quad \dots (35)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \beta \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \beta \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad \dots (36)$$

ここに、 $\bar{u}$ と $\bar{v}$ はそれぞれ x と y 方向の鉛直平均流速を表す。ここで次式で決まる特性曲線を導入すると、

$$dx/dt = \beta \bar{u} \quad \dots (37)$$

$$dy/dt = \beta \bar{v} \quad \dots (38)$$

式 (35) および (36) は次のような特性曲線方程式になる。

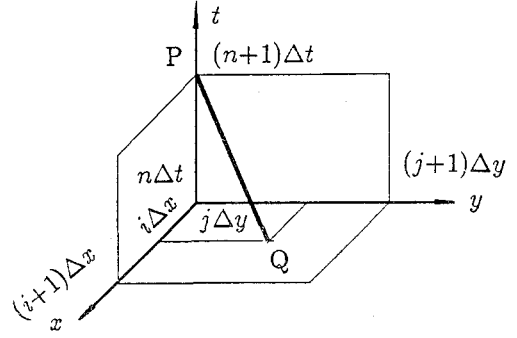


図-2 移流項の差分スキームの説明図

$$d\bar{u}/dt = 0 \quad \dots (39)$$

$$d\bar{v}/dt = 0 \quad \dots (40)$$

上式は、特性曲線に沿って $\bar{u}$ と $\bar{v}$ の値が変わらないことを示す。数値計算においては、図-2 からわかるように、次式によって計算点 P を通る特性曲線が時間ステップ n と交わる点 Q の座標が求められる。

$$x_P - x_Q = \beta \bar{u}_{i,j} \quad \dots (41)$$

$$y_P - y_Q = \beta \bar{v}_{i,j} \quad \dots (42)$$

そこで内挿法により点 Q での $\bar{u}$ と $\bar{v}$ の値が得られれば、計算点 P での $\bar{u}$ と $\bar{v}$ の値も得られる。

(4) 伝播項の差分スキーム

伝播項についても移流項と同じ特性曲線の概念を用いる。式 (31) と (32) は特性曲線

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\sigma^2 \eta}{g} \right) C_m^2 + \kappa_2 g \eta} \equiv \pm \lambda \quad \dots (43)$$

に沿って、

$$\frac{dq_x}{dt} \pm \lambda \frac{d\eta}{dt} + G = 0 \quad \dots (44)$$

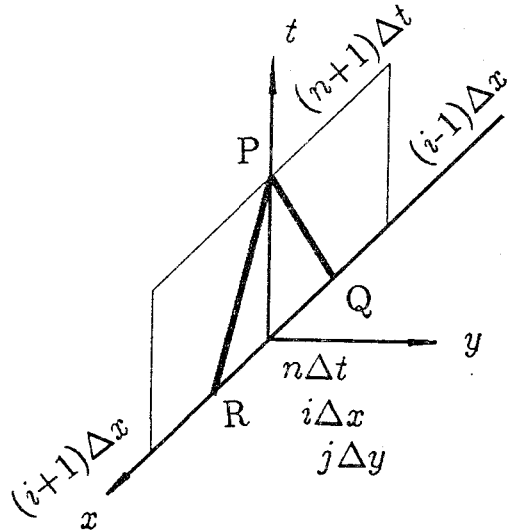


図-3 伝播項の差分スキームの説明図

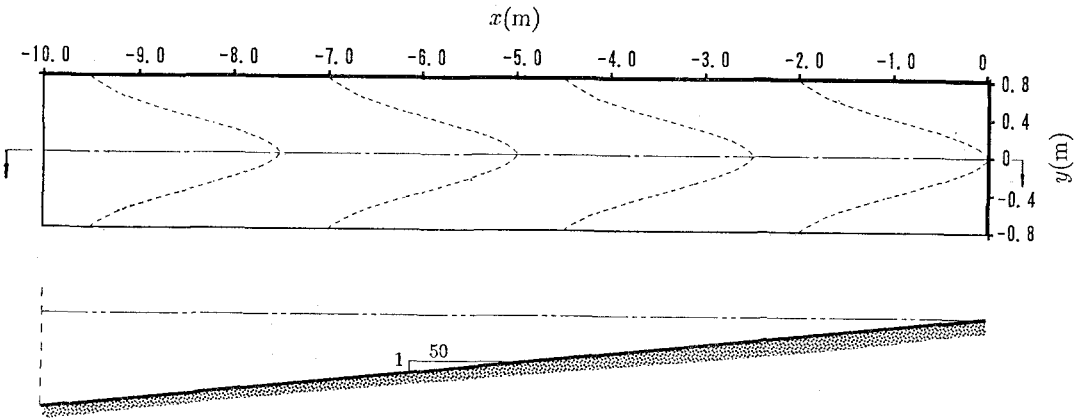


図-4 等深線図

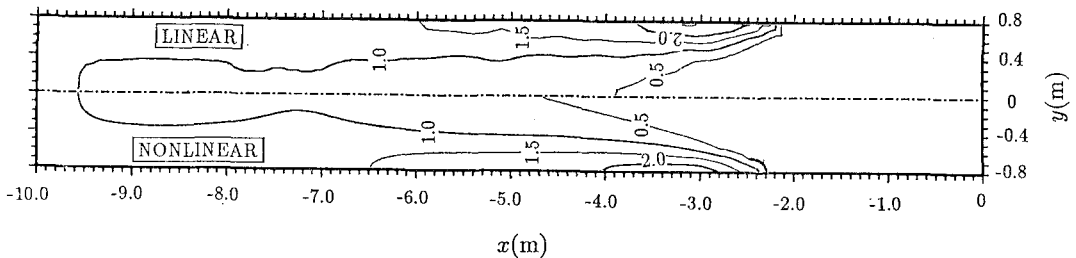


図-5 非線形計算と線形計算による等波高線の比較

のような特性曲線方程式になる。ただし、

$$G = \kappa_1 g \eta \frac{\partial h}{\partial x} + f_D \frac{q_x C_m}{h + \eta} \quad (45)$$

である。

図-3 に示すように、式 (43) を差分化した次式によって有限特性曲線を引く。

$$x_P - x_Q = \lambda_{i,j}^n \Delta t \quad (46)$$

$$x_P - x_R = \lambda_{i,j}^n \Delta t \quad (47)$$

点QとRの座標が決まったら、 $q_{xQ}^n, q_{xR}^n, \eta_Q^n, \eta_R^n, \lambda_Q^n, \lambda_R^n, G_Q^n$ と G_R^n を全て内挿法で決める。そこで、式 (44) の差分式

$$q_{x,i,j}^{n+1} - q_{xQ} + \lambda_Q (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_Q) + G_Q \Delta t = 0 \quad (48)$$

$$q_{x,i,j}^{n+1} - q_{xR} - \lambda_R (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_R) + G_R \Delta t = 0 \quad (49)$$

を解くと、次式のように計算点Pでの水面変動および x 方向の線流量が得られる。

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \frac{(\lambda_R \eta_R + \lambda_Q \eta_Q) - (q_{xR} - q_{xQ}) + (G_R - G_Q) \Delta t}{\lambda_R + \lambda_Q} \quad (50)$$

$$q_{x,i,j}^{n+1} = \frac{(\lambda_Q q_{xR} + \lambda_R q_{xQ}) - \lambda_R \lambda_Q (\eta_R - \eta_Q) - (\lambda_Q G_R + \lambda_R G_Q) \Delta t}{\lambda_R + \lambda_Q} \quad (51)$$

同様にすれば、計算点Pでの水面変動 η および y 方向の線流量 $q_{y,i,j}^n$ も計算できる。

4. 応用例

(1) 地形および厚の条件

計算例は西村ら (1983) と同じものであり、等深線図を図-4 に示す。 x 軸は岸向きで計算領域の対称軸とし、 y 軸を最も陸側の静水汀線を通るように設定すると、静水深 h は

$$h = 0.02[-x - 1 + \cos(2\pi y/b)] \quad (52)$$

で表される。ただし、 h, x および y の単位は m であり、計算領域の幅は $b = 1.6$ m である。入射波の波高は 1.06 cm、周期は 1.2 s であり、波向は x 軸に平行である。

(2) 境界条件の設定

入射境界においては、水深が相対的に大きいいため非線形性の影響が無視できる。そして、反射波の波向が境界にほぼ垂直であることを仮定すると、境界条件として次式が導かれる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = C \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2 \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \quad (53)$$

ただし、 η_0 は入射波による水面変動を表す。

側方境界は不透過境界であるから、そこでの y 方向の線流量は 0 となる。

汀線ではまずその位置を

$$dx/dt = \bar{u}_s \quad (54)$$

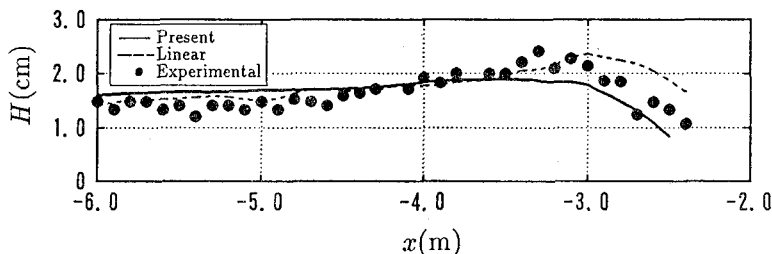


図-6 非線形計算, 線形計算, および実測による岸沖方向の波高分布の比較

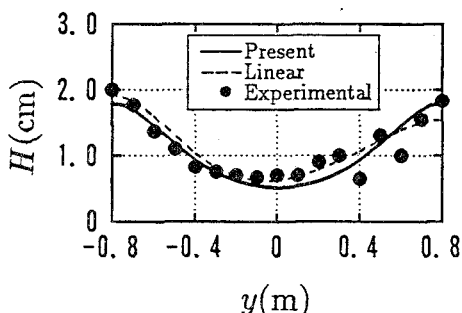


図-7 非線形計算, 線形計算, および実測による沿岸方向の波高分布の比較

$$dy/dt = \bar{v}_s \dots\dots\dots (55)$$

によって決め, そこで水深と線流量を 0 とする. ただし, $\bar{u}_s$ と $\bar{v}_s$ は汀線位置での水粒子速度である.

(3) 計算結果

図-5 に計算による等波高線を示す. 比較のため図中には有限要素法 (Yu ら, 1992b) による線形計算結果も示されている. 中央対称軸に沿って線形波理論による波高が非線形理論のものよりやや大きく, 側面では逆に小さくなっている. これには砕波条件の違いの影響が地形の谷の位置に及んだことが関係すると考えられる.

図-6 および 7 に, 岸沖方向および沿岸方向の代表的な断面の波高分布を, 非線形計算結果, 線形計算結果, および西村ら (1983) の実験データで比較したものを示す. 非線形理論では実験的な砕波条件を全く用いていないにもかかわらず, 波高分布がある程度の精度で得られることがわかる.

5. 結 論

圧力および水平流速の鉛直分布の仮定に基づいて, 流体運動の連続式およびオイラー方程式を鉛直方向に積分することにより波運動の基礎方程式を導いた. この基礎方程式は水深に対する制限がなく, 極浅海では非線形長

波理論と一致し, 微小振幅の場合には任意水深での線形波理論と一致する. 得られた波動方程式に対して演算子分離法と有限特性曲線法を用いた数値計算手法を提案し, 実際に水深変化による波浪変形の計算を試みた. 計算結果は既往の線形理論と砕波モデルの組合せおよび実測結果から得られたものとほぼ一致することがわかった. したがって, 非線形性を考慮することによって, 通常の砕波条件・砕波減衰式を用いなくても, 砕波を含む波浪場の波高分布などがある程度の精度で計算できることが分かった.

参 考 文 献

- 磯部雅彦(1986): 放物型方程式を用いた不規則波の屈折・回折・砕波変形の計算法, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 134-138.
- 谷本勝利・小舟浩治(1975): 数値波動解析法による港内波高分布の計算, 第22回海岸工学講演会論文集, pp. 245-253.
- 西村仁嗣・丸山康樹・平口博丸(1983): 直接数値積分による波の場の解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 123-127.
- 渡辺 晃・丸山康樹(1984): 屈折・回折・砕波減衰を含む波浪場の数値計算法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 103-107.
- Benque, J. P., J. A. Cunge, J. Feuillet, A. Hauguel and F. M. Holly(1982): New method for tidal current computation, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol. 108, No. WW3, pp. 396-417.
- Dalrymple, R. A., J. T. Kirby and P. A. Hwang(1984): Wave diffraction due to areas of energy dissipation, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol. 110, No. WW1, pp. 67-79.
- He, S. and B. Lin(1986): 2-D tidal flow by operator-splitting method, Acta Oceanologica Sinica, Vol. 5, pp. 508-516.
- Mei, C. C.(1989): The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, World Scientific, 740p.
- Peregrine, D. H.(1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 815-827.
- Stoker, J. J.(1957): Water Waves, Interscience, 537 pp.
- Yu, X., M. Isobe and A. Watanabe(1992a): Numerical Computation of wave transformation on beaches, Coastal Eng. in Japan (in press).
- Yu, X., M. Isobe and A. Watanabe(1992b): Finite element solution of nearshore wave field including surf zone, Coastal Eng. in Japan (in press).