

防波堤によるクノイド波の回折

喜岡 渉*・長嶋 禎泰**・間瀬 肇***

1. はじめに

防波堤による有限振幅波の回折については, Wiegel (1964) が孤立波を用いた実験結果を整理して入射角が 45° より小さい場合における Mach stem の存在を明らかにして以来, すでにいくつかの理論的研究も行われている. Miles (1977) は孤立波理論に基づき Mach stem の形成を理論的に示し, Yue・Mei (1980) はストークス波理論に基づく3次のシュレディンガー方程式を用いた検討を行っている. 最近になって, Yoon・Liu (1989, 1990) は, プーシネスク方程式に基づきクノイド波によるステム波の発生を理論的に明らかにするとともに, 入射波が比較的大きくなるとステム波の発達が抑えられて六角形状の波模様が現れることを示している. これら解析例は, 孤立波のものを除くとすべて放物型近似が用いられているために反射方向の波成分が無視できるような入射角が小さいケースに限られており, 港内波高の計算に際してより重要となるような入射角の大きいケースには適用することができない.

本研究では, クノイド波の第1次近似解を用いて弱非線形干渉下での回折波の理論解を誘導し, その特性を調べることにより, 特に入射角が大きいケースにおける防波堤周辺の回折変形について検討を加えるものである.

2. クノイド波の回折理論

(1) 基礎方程式

喜岡・姜 (1990) と同様に, 基礎方程式としては一定水深下における次のプーシネスク方程式を用いる.

$$\nabla^2 \Phi - \Phi_{tt} = \varepsilon \left[(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} (\Phi_t)^2 \right] - \frac{\mu^2}{3} (\nabla^2 \Phi)_{tt} \quad (1)$$

ここに, ∇ は $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ を示し, 下付き添字の変数は微分を示す. 上式は, 水深を h' , 入射波の代表振幅を a_0' , 波数を k' とし, 独立変数 $(x', y', z'; t')$, 速度ポテンシャル Φ' , および水位変動 ζ' について次のように無次元表示されている.

$$\begin{aligned} (x, y) &= k'(x', y'), \quad z = z'/h', \quad t = k'(gh')^{1/2} t' \\ \Phi &= [a_0'(gh')^{1/2}/k'h']^{-1} \Phi', \quad \zeta = \zeta'/a_0' \end{aligned} \quad (2)$$

また二つのパラメーター ε, μ^2 は次式で定義される.

$$\varepsilon = a_0'/h', \quad \mu^2 = (k'h')^2 \quad (3)$$

式(1)は二つのパラメーター ε, μ^2 がともに小さく, かつ同じオーダーであるという仮定下で導かれたものであるが, ここでは回折波の理論解を誘導するため, さらに異なる方向へ伝播する波の交差角は μ のオーダーより小さいという条件を課す. このとき, 非線形干渉項の影響は ε のオーダーより小さいことが示され, Benny・Luke (1964) および Mei (1983) に従うと弱非線形干渉を仮定した理論解を次のように誘導することができる.

すなわち, ε のオーダーまでの非線形干渉項を考えて $\tau = \varepsilon t$ として次のように摂動展開する.

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0(x, y, t; \tau) + \varepsilon \Phi_1(x, y, t; \tau) \\ &\quad + \varepsilon^2 \Phi_2(x, y, t; \tau) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

上式を式(1)に代入して整理すると, Φ_0, Φ_1 についてそれぞれ次の各式を得る.

$$\nabla^2 \Phi_0 - \Phi_{0tt} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_1 - \Phi_{1tt} &= \left[\nabla^2 \Phi_0 + \frac{1}{2} (\Phi_{0t})^2 \right]_t + 2\Phi_{0t\tau} \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{\varepsilon} (\nabla^2 \Phi_0)_{tt} \end{aligned} \quad (6)$$

式(5)の一般解は, 入射波 Φ_0^I , 反射波 Φ_0^R とそれに伴う散乱波の和として与えられる. また, 式(6)の Φ_1 に対する solvability condition から, Φ_0 については非線形干渉項は無視できて, 支配方程式はそれぞれの伝播方向についての KdV 方程式によって与えられることが示される. このとき, 入射波の速度ポテンシャルは, 図-1に示すように座標系をとると, 角周波数 ω のクノイド波の第1近似解として次式で与えられる.

$$\Phi_0^I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{in[k(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \omega t]} \quad (7)$$

上式中のフーリエ級数 A_n は次式のように第1種完全楕円積分 K の関数として与えられる.

$$A_n = \frac{2\pi^2}{k^2 K^2(\kappa)} \left(\frac{n\gamma^n}{1-\gamma^{2n}} \right), \quad \gamma = \exp \left[-\frac{\pi K(\kappa')}{K(\kappa)} \right] \quad (8)$$

* 正会員 Ph.D. 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科

** 学生員 名古屋工業大学大学院工学研究科

*** 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学科

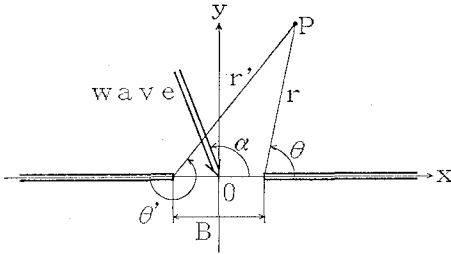


図-1 座標系と記号の定義

ここに、 κ は母数で $\kappa'^2 = 1 - \kappa^2$ とし、 κ はアーセル数 Ur と次の関係式を満たす。

$$Ur = \frac{\varepsilon}{\mu^2} = \frac{2}{3} \frac{\kappa^2 K^2(\kappa)}{\pi^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

(2) 線形ポテンシャルの表示式

入射波の速度ポテンシャルが式(7)で表されることから、 Φ_0 も同様にフーリエ級数展開して次式のように表す。

$$\Phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \Phi_n e^{-in\omega t} \quad \dots\dots\dots (10)$$

さらに、式(10)を式(5)に代入すると、 Φ_n は次のヘルムホルツ方程式の解で、防波堤壁面での境界条件を満足する関数として与えられることが示される。

$$\nabla^2 \Phi_n + (nk)^2 \Phi_n = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

上式の解は防波堤の配置によって異なり、一般には数値的に求めてやる必要がある。

図-1の右半分に示すような半無限堤に対しては、Penny・Price (1952)によって示されたようにゾンマーフェルトの解析解を用いることができ、 Φ_n については図中の記号を用いると次式で表される(例えば、高山, 1981)。

$$\begin{aligned} \Phi_n = & \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[inkr \cos(\theta - \alpha) + \frac{\pi}{4} i \right] \\ & \times \left[C(\lambda_1) - iS(\lambda_1) + \frac{1-i}{2} \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[inkr \cos(\theta + \alpha) + \frac{\pi}{4} i \right] \\ & \times \left[C(\lambda_2) - iS(\lambda_2) + \frac{1-i}{2} \right] \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここに、 $C(\lambda)$ および $S(\lambda)$ はフレネル積分で

$$C(\lambda) = \int_0^\lambda \cos \frac{\pi}{2} \xi^2 d\xi \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$S(\lambda) = \int_0^\lambda \sin \frac{\pi}{2} \xi^2 d\xi \quad \dots\dots\dots (14)$$

と表され、 λ_1 と λ_2 は次式で与えられる。

$$\lambda_1 = 2\sqrt{\frac{nk r}{\pi}} \cos \left(\frac{\theta - \alpha}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{\frac{nk r'}{\pi}} \cos \left(\frac{\theta + \alpha}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

高山 (1981)に従うと、任意に配置された2本の防波堤に対しても半無限堤に対する解(12)を適当に組み合わせることによって近似解を得ることができる。図-1に示すような同一線上に並んだ2本の防波堤による回折波に対しては、図中の記号を用いると次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_n = & \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[inkr \cos(\theta - \alpha) + \frac{\pi}{4} i \right] \\ & \times \left[C(\lambda_1) - iS(\lambda_1) + \frac{1-i}{2} \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[inkr \cos(\theta + \alpha) + \frac{\pi}{4} i \right] \\ & \times \left[C(\lambda_2) - iS(\lambda_2) + \frac{1-i}{2} \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[-inkr' \cos(\theta' - \alpha) \right] \\ & + \frac{\pi}{4} i - inkB \cos \alpha \left[\right] \\ & \times \left[C(\lambda'_1) - iS(\lambda'_1) + \frac{1-i}{2} \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[-inkr' \cos(\theta' + \alpha) \right] \\ & + \frac{\pi}{4} i + inkB \cos \alpha \left[\right] \\ & \times \left[C(\lambda'_2) - iS(\lambda'_2) + \frac{1-i}{2} \right] \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここに、 λ'_1 と λ'_2 は次式で与えられる。

$$\lambda'_1 = 2\sqrt{\frac{nk r'}{\pi}} \cos \left(\frac{\theta' - \alpha}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\lambda'_2 = 2\sqrt{\frac{nk r'}{\pi}} \cos \left(\frac{\theta' + \alpha}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (19)$$

式(12)または式(17)を式(10)に代入することにより、 Φ_0 についての解析解を得ることができる。

(3) 非線形干渉項

主要なオーダーの解 Φ_0 を用いて非線形干渉項を算定するために、まずベルヌーイ式から ε , μ^2 のオーダーにおける水位変動 ζ の表示式を導くと、次式を得る。

$$\zeta = -(\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1)_t + \frac{1}{2} [\mu^2 (\nabla^2 \Phi_{0t}) - \varepsilon (\nabla \Phi_0)^2] \quad \dots\dots\dots (20)$$

上式の非線形項は Φ_1 を除くと Φ_0 のみで与えられるため、式(10)と(12)または(17)を用いて表示することができるが、結果式はいくぶん冗長となるのでここでは省略する。

1次のオーダーの非線形干渉項は、入射および反射方向の波の位相をそれぞれ ϕ_1 , ϕ_2 とすると次式で与えられる (Benny・Luke, 1964)。

$$\begin{aligned} \varepsilon \Phi_1 = & \varepsilon \Phi_1^I(\phi_1) + \varepsilon \Phi_1^R(\phi_2) \\ & + \varepsilon \frac{1+2\cos 2\alpha}{2(1-\cos 2\alpha)} \left[\Phi_0^I(\phi_1) \frac{\partial \Phi_0^R}{\partial \phi_2}(\phi_2) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_0^I}{\partial \phi_1}(\phi_1) \Phi_0^R(\phi_2) \right] \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

上式の右辺第1項および第2項は ε^2 のオーダーの ϕ_2 に対する方程式を解かないと求められないので、ここでは第3項の非線形干渉項のみ考える。この非線形干渉項は、係数から明らかなように $\alpha=60^\circ$ または 120° のときには0となる。計算にあたっては、 ϕ_1^0 として式(10)に式(12)の第1項または式(17)の第1項と第3項を組み入れた式を用い、 ϕ_2^0 については式(10)に式(12)の第2項または式(17)の第2項と第4項を組み入れた式を用いる。ただし、式(17)はもともと半無限堤による回折波の解を重ね合わせた近似解であるため、2本の防波堤による入・反射方向への非線形干渉項の算定には2本の防波堤間の相互干渉の影響は入ってこないことになる。また、式(21)が成り立つためには、厳密には $\mu^2 < O((\phi_1 - \phi_2)^2)$ という条件を満足させなければならない。

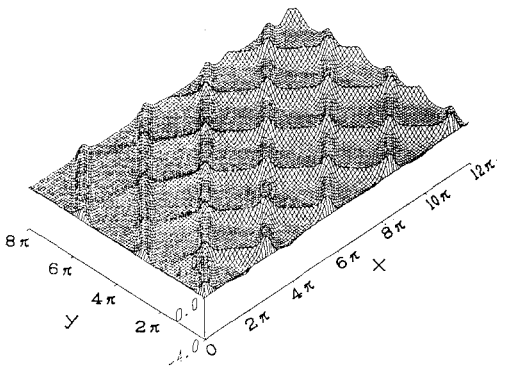
なお、式(20)の右辺第2項と式(21)の非線形干渉項により、水位変動 ζ の計算結果には平均水位の変動が含まれることになる。

3. 半無限堤による回折

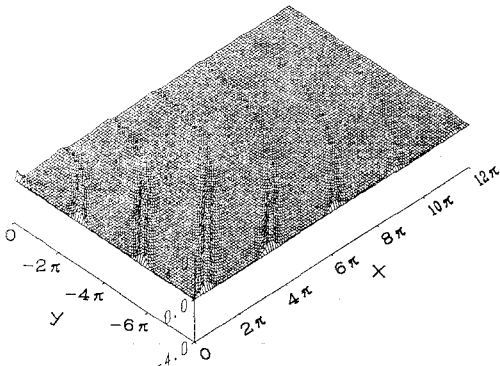
具体的な計算は、まず半無限堤を対象として ε , Ur ($=\varepsilon/\mu^2$) および入射角 α を変えて行った。式(20)の非線形項を計算するためには、 Ur のみならず ε または μ^2

の値も同時に与えておく必要がある。

図-2は $\alpha=135^\circ$ 、すなわち防波堤方向に対する入射角が 45° で $Ur=1.60$, $\varepsilon=0.17$ としたときの水位変動 ζ を示すもので、半無限堤を $y=0$ に置いたときの計算結果である。図の(a)に示されているように、防波堤前面では特徴的な四辺形状の波模様が形成されている。防波堤近傍では、式(21)の非線形干渉項によって峰高がいくぶん大きくなっている。図-3は入射角のみ変えて $\alpha=152.1^\circ$ 、すなわち防波堤方向に対する入射角を 27.9° としたときの計算結果で、回折波の空間波形を示す。防波堤前面の波模様は、四辺形の角を落としたような六角形状のものとなっている。同様な条件での計算は、ブーシネスク方程式に対して放物型近似を用いた Yoon・Liu (1990) によっても行われている。彼らの計算結果と比較すると、防波堤前面で六角形状の波模様が形成される点では一致しているものの、防波堤近傍において壁面に対して垂直に発達するステム波は計算されていない。このことは弱非線形干渉を仮定した本近似解の適用限界を示しており、波の反射より非線形干渉がより重要となりステム波が形成されるような入射角 ($0 < \alpha < 45^\circ$, $135^\circ < \alpha < 180^\circ$) に対しては本近似解は適用することができない。なお、反射の影響がより重要となる $\alpha=135^\circ$

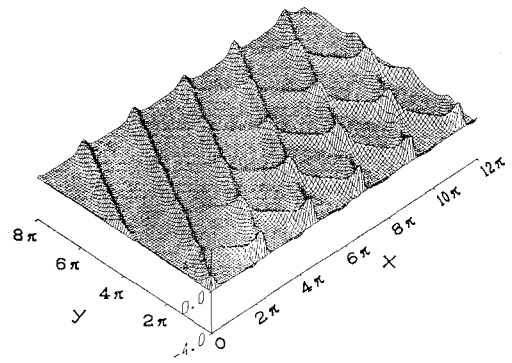


(a) 防波堤前面の空間波形

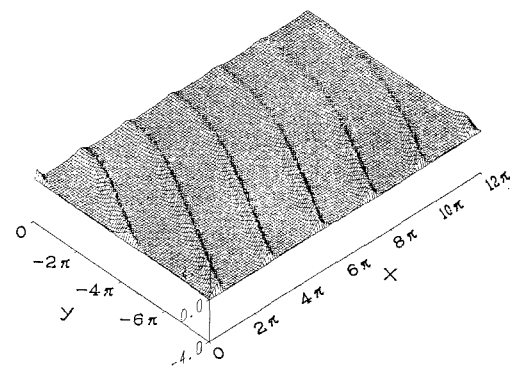


(b) 防波堤背後の空間波形

図-2 入射角 $\alpha=135^\circ$ のときの回折波形



(a) 防波堤前面の空間波形

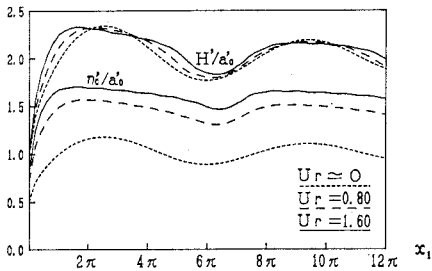


(b) 防波堤背後の空間波形

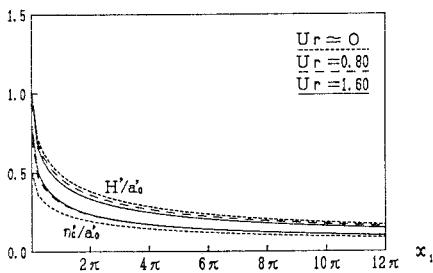
図-3 入射角 $\alpha=152.1^\circ$ のときの回折波形

の計算結果(図-2)を同一条件下での Yoon・Liu (1990) による計算結果と比較すると両者はほぼ一致しており, このことは彼らの用いた放物型近似の比較的強反射領域での適用性を示すものと考えられる.

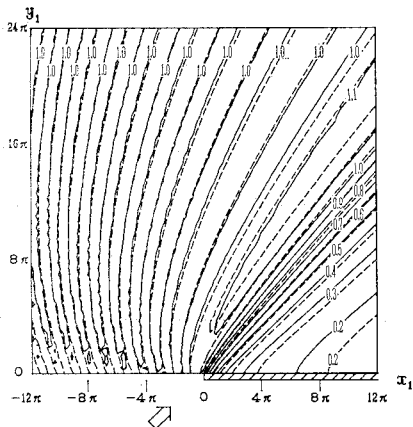
図-4 は, $\alpha=135^\circ$ のときの防波堤に沿う前・背面の波高 H' と静水面からの峰高 η'_0 の分布を示したもので, 比較のために線形理論解 $Ur \approx 0$ と $Ur=0.80$, $\varepsilon=0.085$ としたときの計算結果も示してある. 線形解と比較するために, 図の座標軸は線形長波の波数 k'_1 を用いた次式で表示してある.



(a) 防波堤前面



(b) 防波堤背面

図-4 防波堤前・背面の波高分布と峰高分布 ($\alpha=135^\circ$)図-5 防波堤背後の回折係数 ($\alpha=135^\circ$)

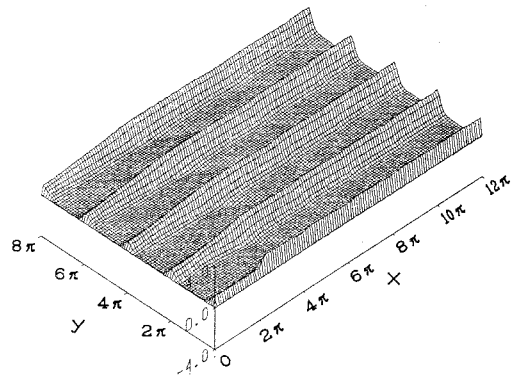
$$(x_1, y_1) = k'_1(x', y') \dots \dots \dots (22)$$

図から, 波高分布については Ur による変化は小さいものの, 峰高分布については防波堤前面で Ur の値によって大きく変化することが分かる. 図-5 は $Ur=1.60$, $\varepsilon=0.17$ のときの回折波高を入射波高で割って回折係数として表示したもので, 比較のため $Ur \approx 0$ としたときの計算結果も破線で示してある. 防波堤先端から離れた背面付近を除くと両者はほぼ一致しており, 回折波高に及ぼす非線形性の影響は小さいことがわかる. 同様な傾向は $\alpha=90^\circ$ の計算結果においても見られた.

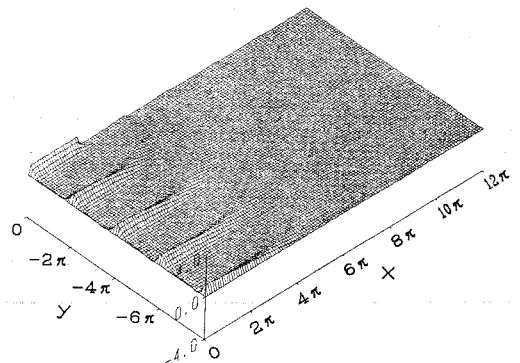
4. 両翼防波堤による回折

一直線上に並んだ2本の防波堤に対しては線形ポテンシャルの表示式(17)がすでに防波堤における境界条件を完全には満足しない近似解であるため, 高山(1981)によって近似解の精度が保証されている $\alpha=90^\circ$ についてのみ検討を加えた.

開口幅が $B'=4\pi/k'_1$ の両翼防波堤による回折波形を $Ur=1.60$, $\varepsilon=0.17$ として計算した結果を図-6に示す.

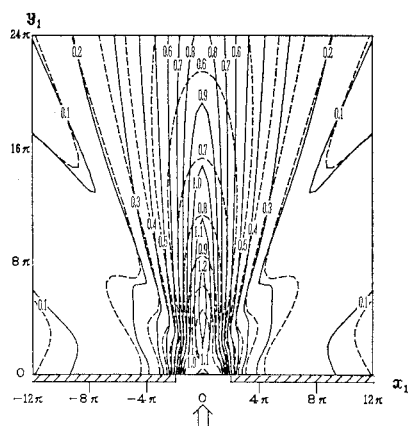
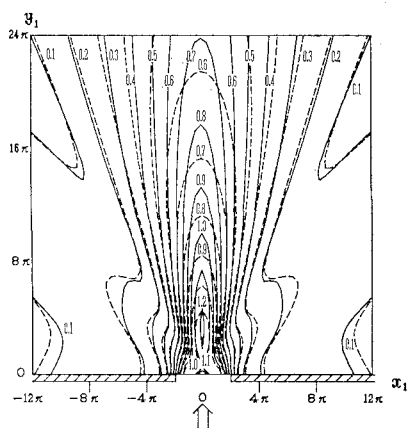


(a) 防波堤前面での空間波形



(b) 防波堤背後の空間波形

図-6 両翼防波堤による回折波形

図-7 両翼防波堤による回折係数 ($U_r=1.60$)図-8 両翼防波堤による回折係数 ($U_r=0.80$)

防波堤前面の反射領域における峰高については防波堤近傍でも遠方のものとはほぼ同一であり、非線形干渉項による影響は小さい。

図-7 および図-8 は、同じ開口幅の両翼防波堤背後の回折係数をそれぞれ $U_r=1.60$, $\epsilon=0.17$ および $U_r=0.80$, $\epsilon=0.085$ として求めたもので、比較のため $U_r \approx 0$ の線形解を破線で示してある。図から、半無限堤の結果と異なり回折波高の分布が U_r の値によって大きく変化することがわかる。開口部背後の波の進入方向では、 U_r が大きくなるほど回折による波高低減率は小さくなっている。ただし、図に示すように、防波堤の遮蔽域では U_r の値にかかわらず線形理論解との差異は小さい。

5. おわりに

半無限堤に対するゾンマフェルトの解析解を用いてクノイド波の回折波の近似解を求め、その解の特性を調べた。その結果得られた主要な結論は次のとおりである。

1) 非線形干渉項の影響は防波堤方向に対する入射角が小さくなるほど大きくなり、弱非線形干渉を仮定したここでの理論解の適用範囲は入射角が 45° 以上のときである。

2) 回折波の空間波形は線形理論解によるものとは大きく異なり、防波堤前面では特徴的な四辺形状や六角形状の波模様が形成される。

3) 入射波高に対する回折係数は、半無限堤においては線形理論解と比べて有意な差異は見られないものの、堤体回りの峰高を比較すると線形理論解よりも大きく、両者の差はアーセル数の増加に従って大きくなる。

4) 両翼防波堤においては、背後の回折係数は線形理論解のものと著しく異なっており、アーセル数の増加に従って開口部付近の波高低減率は小さくなる傾向が見られる。

参考文献

- 喜岡 渉・姜 林 (1990): クノイド波による湾水振動の解析, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 160-164.
- 高山司可 (1981): 波の回折と港内波高分布に関する研究, 港湾技研資料, No. 367, 140 p.
- Benny, D.J. and J.C. Luke (1964): On the interactions of permanent waves of finite amplitude, J. Math. Phys., Vol. 43, pp. 309-313.
- Mei, C.C. (1983): The applied dynamics of ocean surface waves, Wiley-Interscience, 740 p.
- Miles, J.W. (1977): Diffraction of solitary waves, J. Appl. Math. Phys., Vol. 28, pp. 889-902.
- Penny, W.G. and A.T. Price (1952): The diffraction theory of sea waves by breakwaters, and the shelter afforded by breakwaters, Phil. Trans., Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 244, pp. 236-253.
- Wiegel, R. L. (1964): Water wave equivalent of Mach-reflection, Proc. 9th Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 82-102.
- Yoon, S.B. and P.L.-F. Liu (1989): Stem waves along breakwater, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 115, No. 5, pp. 635-648.
- Yoon, S.B. and P.L.-F. Liu (1990): Stem waves and hexagonal wave pattern in shallow water, Proc. of U.S.-Japan 2nd Workshop on Tsunami Research, pp. 75-89.
- Yue, D.K.P. and C.C. Mei (1980): Forward diffraction of Stokes waves by a thin wedge, J. Fluid Mech., Vol. 99, pp. 33-52.