

無限列任意断面柱体群に作用する地震時動水圧の解析

清川 哲志*

1. はじめに

前報(清川ら, 1989)で、水中に任意に配置された任意断面柱体群に作用する地震時動水圧解析法を示したが、対象とする柱体数は有限であった。一方、現実の海岸・海洋構造物を見ると、杭桟橋のように一方向に長い場合が多く、それをそのまま有限本数の理論でモデル化することはほとんど不可能であった。そこで本研究では、一方向に無限に連なった柱体群を考え、これに作用する2次元動水圧理論を導いた。これは、現象の空間的周期性に着目し、周期境界条件を満足するグリーン関数を用いたもので、数値計算は繰り返しの一単位についてのみ行えばよい。したがって、有限本数の理論で多数の柱体をモデル化するのに比較して、計算機容量、計算時間ははるかに少なくて済む。本論文では、この理論について述べるとともに、数値計算に基づいて無限列柱体群に作用する地震時動水圧特性を明らかにする。また、实用上重要かつ理論的にも興味深い問題である何本程度から無限とみなせるかということに関して考察する。

2. 解析理論

(1) 基礎方程式と境界条件

図-1に示すように、任意の断面を有する2次元柱体群が、 x 方向に間隔 d で無限に繰り返しているものとする。そして、これらの柱体群が周囲を取り囲む流体中で x 軸と θ の角度をなし、角振動数 ω の調和振動をしているものとする。ただし、それぞれの柱体は、同位相、同振幅で、すべて同方向に振動するものとする。流体は非粘性の圧縮性流体で、流体運動は非回転であると仮定する。このとき流体運動は速度ポテンシャル

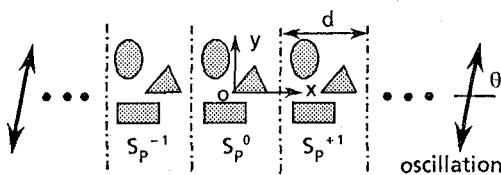


図-1 座標系と記号の定義

によって記述することができる。速度ポテンシャルを $\phi(x, y)e^{-i\omega t}$ (i : 虚数単位, t : 時間) とすると、その空間部分 $\phi(x, y)$ は次の境界値問題の解として求められる。

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 + (\omega^2/c^2)\phi = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\partial\phi/\partial n = v_n \quad (\text{on } S_p^m, m=0, \pm 1, \dots) \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\phi(x+d, y) = \phi(x, y) \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\lim_{|y|\rightarrow\infty} \{\partial\phi/\partial|y| - i(\omega/c)\phi\} = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここに、式(1)は2次元圧縮性流体中の速度ポテンシャルの挙動を支配する基礎方程式で、2次元 Helmholtz 方程式、式中の c は水中音速である。式(2)は柱体表面における柱体の運動速度と水粒子速度の連続条件で、 v_n は各柱体表面における柱体表面運動速度の法線方向成分、 n による微分は柱体表面での法線方向微分を表す。式(3)は、現象の空間的周期性を表すもので、柱体群の繰り返しの単位幅 d の周期関数となることを表している。また、式(4)は無限遠方では外向き進行波のみが存在するという放射条件を表す。

(2) グリーン関数

グリーン関数 G は、次の境界値問題の解として定義される。

$$\begin{aligned} \partial^2 G/\partial x^2 + \partial^2 G/\partial y^2 + (\omega^2/c^2)G \\ = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$G(x+d, y; \xi, \eta) = G(x, y; \xi, \eta) \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\lim_{|y|\rightarrow\infty} \{\partial G/\partial|y| - i(\omega/c)G\} = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 δ はディラックのデルタ関数、 (ξ, η) は領域内の点を表すパラメタ。

式(5)~(7)を満足するグリーン関数 G を変数分離による固有関数展開の形で求める。まず、グリーン関数 G は式(6)に示される周期性を有するから、次のように x に関する周期 d の複素フーリエ級数を仮定する。

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n \in Z} F_n(y; \xi, \eta) e^{i2\pi nx/d} \quad \dots \dots \dots (8)$$

ここに、 $F_n(y; \xi, \eta)$ は ξ, η をパラメタとした y に関する未知関数、 Z は整数の集合。

式(8)を式(5)に代入すると次式を得る。

$$\sum_{n \in Z} [\partial^2 F_n / \partial y^2 - l_n F_n] e^{i 2 n \pi x / d} = -\delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \quad (9)$$

ただし、 l_n は次式で定義される定数である。

$$l_n = (2\pi n/d)^2 - (\omega/c)^2 \quad (10)$$

$e^{i 2 n \pi x / d}$ を $[-d/2, +d/2]$ で正規化した $\sqrt{1/d} e^{i 2 n \pi x / d}$ を用いて $\delta(x - \xi)$ を展開すると次式を得る。

$$\delta(x - \xi) = \sum_{n \in Z} (1/d) e^{i 2 n \pi (x - \xi) / d} \quad (11)$$

これを式 (10) の右辺に代入し、 $\delta(y - \eta)$ を総和記号の中に入れると、次の関係式を得る。

$$\sum_{n \in Z} [\partial^2 F_n / \partial y^2 - l_n F_n] e^{i 2 n \pi x / d} = -\sum_{n \in Z} \delta(y - \eta) (1/d) e^{i 2 n \pi (x - \xi) / d} \quad (12)$$

式 (12) が任意の x, y について成り立つための必要十分条件として次の式 (13), (14) が導かれる。

$$F_n(y; \xi, \eta) = (1/d) f_n(y; \eta) e^{-i 2 n \pi \xi / d} \quad (n \in Z) \quad (13)$$

$$d^2 f_n / d y^2 - l_n f_n = -\delta(y - \eta) \quad (n \in Z) \quad (14)$$

次に f_n を求める。 $y \neq \eta$ の領域に対しては、式 (14) の右辺は 0 となり、一般解は $a_n^+(\eta), a_n^-(\eta) (n \in Z)$ を η をパラメタとする任意定数として次式のように表される。

$$f_n(y; \eta) = a_n^+(\eta) e^{+v_n y} + a_n^-(\eta) e^{-v_n y} \quad (15)$$

ただし、 v_n は次式で定義される定数。

$$v_n = \begin{cases} -\sqrt{l_n} & (l_n > 0) \\ i\sqrt{-l_n} & (l_n < 0) \end{cases} \quad (16)$$

ここで、放射条件 (7) を考えると、 $y > \eta$ の領域では、電分大きな正の y に対して有限かつ y 軸の正の方向へ進む波でなければならない。したがって、右辺第一項のみ採用される。同様に $y < \eta$ の領域では、右辺第二項のみ採用され、 f_n は次式のようになる。

$$f_n(y; \eta) = \begin{cases} a_n^+(\eta) e^{+v_n y} & (y > \eta) \\ a_n^-(\eta) e^{-v_n y} & (y < \eta) \end{cases} \quad (17)$$

式 (17) は $y \neq \eta$ で式 (14) および放射条件を満足している。したがって、 $y = \eta$ における特異性を満足するように係数 $a_n^+(\eta), a_n^-(\eta) (n \in Z)$ を決めればよい。

グリーン関数の $y = \eta$ における特異性は、次に示す f_n の連続性とその導関数の不連続性に起因する（今村、1982）。

$$\begin{cases} f_n(\eta^+; \eta) = f_n(\eta^-; \eta) \\ df_n / dy|_{y=\eta^+} - df_n / dy|_{y=\eta^-} = -1 \end{cases} \quad (18)$$

そこで、式 (17) をこれに代入すると、次のように未定係数 $a_n^+(\eta), a_n^-(\eta) (n=0, \pm 1, \dots)$ に関する連立方程式が各 n ごとに得られる。

$$\begin{cases} a_n^+(\eta) e^{+v_n \eta} = a_n^-(\eta) e^{-v_n \eta} \\ v_n a_n^+(\eta) e^{+v_n \eta} - (-v_n) a_n^-(\eta) e^{-v_n \eta} = -1 \end{cases} \quad (19)$$

そしてこれを解くと、次のようになる。

$$\begin{cases} a_n^+(\eta) = -(1/2v_n) e^{-v_n \eta} \\ a_n^-(\eta) = -(1/2v_n) e^{+v_n \eta} \end{cases} \quad (20)$$

これらの係数を式 (17) に代入してまとめると次のようになる。

$$f_n(y; \eta) = -(1/2v_n) e^{+v_n |y - \eta|} \quad (21)$$

以上、求められた $f_n(y, \eta)$ を式 (13) に代入し、さらにそれを式 (8) に代入すると、グリーン関数が次式のような形で求められる。

$$G(x, \xi, \eta) = -\frac{1}{2d} \sum_{n \in Z} \frac{1}{v_n} e^{i 2 n \pi (x - \xi) / d + v_n |y - \eta|} \quad (22)$$

式 (22) が求めるグリーン関数である。この右辺の級数項は式 (10) で定義された l_n を負とする整数に対しこれ以外の全ての整数に対して減衰散乱項を表している。

(3) 積分方程式と離散化

拡張されたグリーンの定理と求められたグリーン関数 (22) により次の積分方程式が得られる（グリーンの定理の適用範囲は繰り返しの一単位、すなわち、 x 方向に幅 d , y 方向に $\pm\infty$ の矩形領域）。

$$(1/2)\Phi(\xi, \eta) = \int_{S_p} (\Phi \cdot \partial G / \partial n - G v_n) ds \quad (23)$$

ここに、点 (ξ, η) は柱体上の点、右辺の積分は繰り返しの一単位内にある柱体群の表面上での線積分。また、 n による微分は流体領域に対して内向きにとる。

次に、柱体群の断面境界線を N 個の線分要素に分割する。そして、点 (ξ, η) を各要素の中点 $M_i(x_i, y_i)$ ($i=1 \sim N$) とする。このとき、要素上での Φ, v_n の値を P_i における値で代表させることにすると、式 (23) は $i=1 \sim N$ に対し、次式のように表される。

$$\frac{1}{2}\Phi(i) = \sum_{j=1}^N \left\{ \Phi(j) \int_{A_j} \partial G / \partial n ds - v_n(j) \int_{A_j} G ds \right\} \quad (24)$$

ここに、 $\Phi(j), v_n(j)$ 等は点 M_j におけるそれぞれの関数値を表す。また、 A_j は j 番目要素（以下では j 番目要素長を表す場合もある）。

これをマトリクス表示すると次式となる。

$$(1/2)[I] - [D_G] \cdot \{\Phi\} = \{W\} \quad (25)$$

ただし、 $[I]$ は単位マトリクス、マトリクス $[D_G]$ および定数ベクトル $\{W\}$ の要素は以下のように定義される。

$$\begin{cases} [D_G]_{ij} = \int_{A_j} \partial G / \partial n ds \\ \{W\}_i = -\sum_{j=1}^N v_n(j) \int_{A_j} G ds \end{cases} \quad (26)$$

式中の $v_n(j)$ は、次式によって計算される。

$$v_n(j) = \{n_x(j) \cos \theta + n_y(j) \sin \theta\} U \quad (27)$$

ただし、 U は振動速度振幅。

(4) マトリクス要素の計算式

式(26)の積分は、 $i \neq j$ の場合には十分細かく（例えば、 $A/cT < 0.005$ 、 $T=$ 周期）要素分割すれば、要素の中点における関数値と要素長の積で近似できる。しかし、 $i=j$ の場合、グリーン関数の特異性により、関数値が無限大に発散する。また、 $i \neq j$ の場合でも、 $y_i=y_j$ の場合には収束が極めて遅くなる。そこで、そのような場合には積分を厳密に行う必要がある。この結果を示すと次の式(28)、(29)のようになる。

$$\int_{A_j} G ds = -(1/2d) \sum_{n \in Z} (1/v_n) e^{-i2n\pi(x_j-x_i)/d} \\ \times \{(e^{\alpha n \epsilon} - 1)/\alpha_n + (e^{\alpha n \epsilon} - 1)/\alpha_n^*\} \quad (28)$$

$$\int_{A_j} \partial G / \partial nds = (1/2d) \sum_{n \in Z^*} e^{-i2n\pi(x_j-x_i)/d} \\ \times (A_n + B_n) \quad (29)$$

ただし、 Z^* は 0 を除く整数の集合、 α_n 、 α_n^* 、 A_n 、 B_n は n をパラメタとする定数で次式で表される。

$$\begin{cases} \alpha_n = v_n |n_x(j)| + i(2n\pi/d)n_y(j) \\ \alpha_n^* = v_n |n_x(j)| - i(2n\pi/d)n_y(j) \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} A_n = n_y(j) \operatorname{sign}\{n_y(j)\} \\ \cdot \{(e^{\alpha n \epsilon} - 1)/\alpha_n^* - (e^{\alpha n \epsilon} - 1)/\alpha_n\} \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} B_n = i(2n\pi/dv_n)n_x(j) \\ \cdot \{(e^{\alpha n \epsilon} - 1)/\alpha_n + (e^{\alpha n \epsilon} - 1)/\alpha_n^*\} \end{cases}$$

ここに、 $n_x(j)$ 、 $n_y(j)$ は、 M_j における単位法線ベクトル $\mathbf{n}(j)$ の x 、 y 成分、 $\operatorname{sign}(x)$ は x の符号が正のとき 1、負のとき -1 である。

式(28)は $1/n^2$ のオーダで収束する。しかし、式(29)は $1/n$ のオーダなので、さらにこの収束を加速する。

A_n 、 B_n は、十分大きな $|n|$ に対して次式となる。

$$\begin{cases} A_n \sim -(id/n\pi)n_y(j)^2 \operatorname{sign}\{n_x(j)\} \\ B_n \sim -(id/n\pi)n_x(j)^2 \operatorname{sign}\{n_x(j)\} \end{cases} \quad (|n| \rightarrow \infty) \quad (32)$$

したがって、式(29)は次のように書くことができる。

$$\int_{A_j} \partial G / \partial nds = -\operatorname{sign}\{n_x(j)\}/\pi \sum_{n \in N} (1/n) \\ \times \sin\{2n\pi(x_j-x_i)/d\} + \sum_{n \in N} C_n \quad (33)$$

ここに、 N は自然数の集合、 C_n は次式で定義される。

$$C_n = (1/2d) \{e^{-i2n\pi(x_j-x_i)/d} (A_n + B_n) \\ + e^{i2n\pi(x_j-x_i)/d} (A_{-n} + B_{-n})\} \\ + \operatorname{sign}\{n_x(j)\}/\pi \sum_{n \in N} (1/n) \sin\{2n\pi(x_j-x_i)/d\} \quad (34)$$

式(33)の右辺第一項の級数和は厳密に求めることができ (Gradshteyn and Ryzhik, 1980)，最終結果は次式となる。

$$\int_{A_j} \partial G / \partial nds = \operatorname{sign}\{n_x(j)\} \left(\mp \frac{1}{2} + \frac{x_j - x_i}{d} \right) \\ + \sum_{n \in N} C_n \quad (35)$$

この右辺第二項の級数は $\sum 1/n^2$ 同じ程度の収束速さである。ただし、復号は、 $x_j > x_i$ のとき負、 $x_j < x_i$ のとき正をとるものとする。

(5) 動水圧と付加質量

動水圧は線形化したベルヌイの式から求められ、点 M_i における動水圧振幅 p_i は次式となる。

$$p_i = i\rho\omega\phi_i \quad (i=1 \sim N) \quad (36)$$

各柱体が受ける流体力は、動水圧による圧力の各方向成分を柱体まわりで積分することによって得られる。 \mathbf{F}_i を i 番目柱体に作用する流体力振幅ベクトルとすると、

$$\mathbf{F}_i \simeq i\rho\omega \sum_j \mathbf{n}(j) \cdot \phi^*(j) \cdot A_j \quad (37)$$

ただし、 j に関する級数和は各柱体ごとにとる。

流体力は振動加速度に比例し、この比例定数によって次のように付加質量 \mathbf{M}_i が定義される。

$$\mathbf{M}_i \simeq \rho \sum_j \mathbf{n}(j) \cdot \phi^*(j) \cdot A_j \quad (38)$$

ただし、 ϕ^* は単位速度 ($U=1$) に対する速度ボテンシャル。

以下に述べる数値計算では、付加質量係数を付加質量と構造物のそれぞれ x 、 y 方向投影面の幅を直径とする円柱の排水質量との比として定義している。

3. 数値計算結果と考察

(1) 単列円柱の動水圧分布

円断面柱体の場合の動水圧分布の計算結果を例として示す。図-2 は、無次元化した動水圧 $p/\rho\alpha D$ (p :動水圧 (tonf), ρ :流体密度 (ton/m³), α : 加速度 (gal), D : 直径 (m)) の変動振幅分布で、 $(\omega/c)D=0.1$ の場合である。柱体は一列で、振動方向は柱体列と直交方向、左より $D/d=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ (d : 柱体間距離) である。図中には、各々の柱体の水平および鉛直方向の付加質量係数 C_x 、 C_y 、および ω/c で無次元化した座標 $\omega x/c$ 、 $\omega y/c$ を示してある。また、比較のために単独円柱の動水圧分布も示してある。これからわかるように、柱体間距離が相対的に短くなるにつれて動水圧が大きくなり、その結果、例えば $D/d=0.8$ の場合、付加質量係数は単独の場合に比較して 3 倍以上になる。

(2) 単列角柱の動水圧分布

次に柱体断面が正方形である場合の動水圧分布の計算結果を図-3 に示す。この場合も、柱体は一列で、振動方向は柱体列と直交方向、左より $D/d=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ (D : 辺長) である。また、比較のために単独角柱の動水圧分布も示してある。角柱で特徴的なのは、柱体間距離が短くなるにつれて側面動水圧は増加するが、前

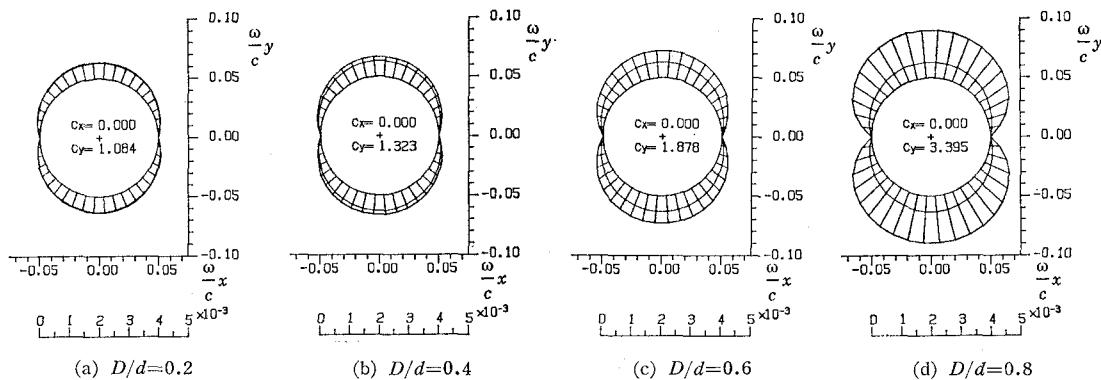


図-2 単列円柱の動水圧分布

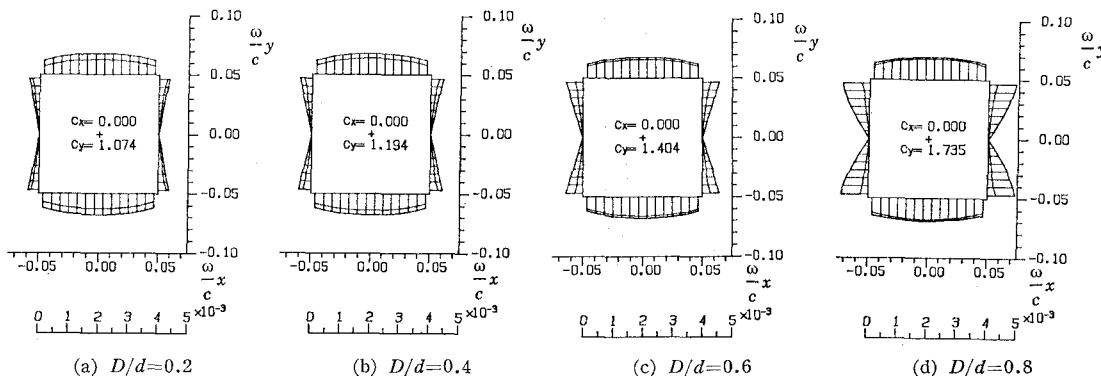


図-3 単列角柱の動水圧分布

面動水圧はむしろ減少していることである。しかし、付加質量係数は柱体間距離の減少に伴って増加していることがわかる。柱体間距離の減少により、前面動水圧が減少する理由は、波動の干渉効果と考えられるが、明確に説明することは困難である。前面動水圧が小さくなるにもかかわらず付加質量係数が増加しているのは、最大動水圧が作用する位相の問題で、柱体間距離が減少すると前面各点における位相がそろってくることによる（柱体間距離が0になると完全に一致する）。

(3) 複列円柱の動水圧分布

実際の構造物では杭桟橋のように、柱体が複列になる場合が多い。ここでは、3列円柱の場合を例にとって複数列となった場合について考察する。

図-4は3列円柱の動水圧分布の一例で、振動方向は柱体列に直交方向、 $D/d=0.5, 0.7, \omega D/c=0.1$ の場合である。この図において、振動方向に対して向かい合う柱体間の圧力が外側表面上の値に比べて小さくなっているのと同時に、内側の円柱の動水圧が外側に比べて小さいことがわかる。これは、柱体間の流体が柱体列と一体となって運動する結果生じる一種の閉塞効果である。しかし、注意が必要なのは、動水圧の振幅は小さいにもかかわらず、この閉塞効果により、内側の柱体に作用す

る動水圧の位相が各点で一致してくるため、付加質量係数の値はむしろ内側の方がわずかに大きくなっていることである。また、単列柱体の場合、 $D/d=0.5, 0.7$ に対し、付加質量係数 C_y の値は各々 1.543, 2.416 であるから、複列の場合の方が小さいことがわかる。これは、複列の場合閉塞効果によって内側の圧力が小さいため、同時刻に作用する同一方向力としては、小さくなっているためである。

(4) 有限本数の場合との比較

本論文では、柱体群が無限に続いているものとして理論を導いているが、実際に無限に続く構造物は存在しないわけであるから、何本程度から無限とみなせるかということは、実用上重要であるのと同時に理論的にも興味深い。ここでは、この問題について考察する。

同一断面の構造物が、 $2n$ 本、間隔 d で直線状に並んでいるものとする。このとき構造物表面を $S^{-n}, \dots, S^{-1}, S^{+1}, \dots, S^{+n}$ とする。これに対し、仮想的な柱体列 $\dots, S^{-n-2}, S^{-n-1}$ および $S^{+n+1}, S^{+n+2}, \dots$ を考える。このとき、上記の問題は、実際の構造物の影響が仮想柱体列からの影響に比べてどの程度大きいか？という問題になる。基礎方程式は、式(1)に示した2次元ヘルムホルツ方程式で、その場合、ポテンシャルの挙動は、ハ

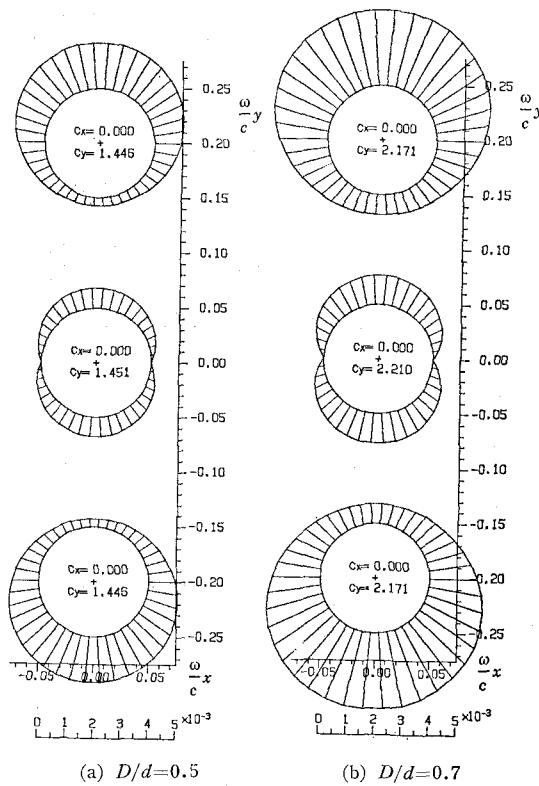


図-4 3列円柱の動水圧分布

ンケル関数で示される。したがって、原点で観測するとき、これより十分離れた柱体 S^n の影響は、ハンケル関数の漸近形より、次式に比例すると考えてよい。

$$\sqrt{\frac{2\pi}{(\omega/c)d|n|}} \times e^{i((\omega/c)d|n|+\pi/4)} \dots \quad (39)$$

したがって、実際の柱体 $S^{\pm 1}$ からの影響は、近似的に、次式のように表される。

$$\text{Real} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{(\omega/c)d}} \times e^{i((\omega/c)d+\pi/4)} \dots \quad (40)$$

一方、同様な考え方から、仮想的な柱体列からの影響は、次式で表現できる。

$$\text{virtual} \approx 2 \sum_{n=n+1}^{+\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{(\omega/c)d n}} \times e^{i((\omega/c)d n+\pi/4)} \dots \quad (41)$$

したがって、

$$|\text{virtual}| < \sqrt{\frac{2\pi}{(\omega/c)d n}} \times \frac{2\pi}{(\omega/c)d} \dots \quad (42)$$

これより、次の関係が得られる。

$$\frac{|\text{real}|}{|\text{virtual}|} < \sqrt{n} \frac{\omega d}{2\pi c} = \sqrt{n} \frac{d}{L} \dots \quad (43)$$

ただし、 L は水中音波の波長。

式(43)より、間隔が相対的に広いかあるいは本数が多いかによって無限とみなせるかどうかが決まることが理解できる。

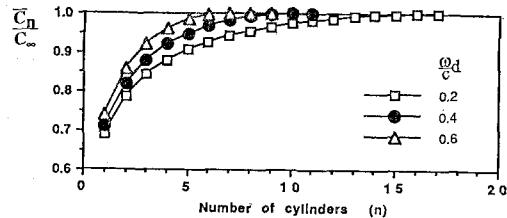


図-5 有限本数理論による平均付加質量係数と無限列理論による付加質量係数の比の柱体本数による変化

図-5は、横軸に柱体の本数 n 、縦軸に全柱体 (n 本)で平均した付加質量係数 \bar{C}_n と無限列としたときの付加質量係数 C_∞ との比 \bar{C}_n/C_∞ をとり、 $\omega d/c$ をパラメタとして本数の増加による収束の様子を示したものである。ここで、有限本数場合の付加質量係数は、清川ら(1989)による解析理論によって求めている。この図から、本数 n の増加によっていずれも無限列の場合に漸近し、その速さは $\omega d/c$ が大きいほど速いことがわかる。そして、この結果は上で考察した事実と一致する。試みに、 $\bar{C}_n/C_\infty > 0.99$ を条件に、上記パラメタを計算すると、 $\sqrt{n}(d/L) = 0.13 \sim 0.21$ となる。そして、この場合、相対的に低振動数、狭間隔の方が収束判定パラメタは小さい。 $\sqrt{n}(d/L) = 0.21$ がかなりの高振動数、大設置間隔に対応する値であること、また、工学的には $\bar{C}_n/C_\infty > 0.99$ より緩い条件で無限と見なしてよいであろうことを考えると、 $\sqrt{n}(d/L) > 0.1$ が無限と見なせるかどうかの一応の目安となろう。これに従えば、例えば、振動数を 5Hz、設置間隔を 10m とすると、無限と見なせる本数は 9本以上、2Hz、10m とすると、56本以上となる。このように無限と見なせる本数は、振動数、設置間隔等の影響を大きく受ける。また、いずれにしても、単独柱体に比較して付加質量係数が増加するから、多柱効果を考慮して設計することが必要になると考えられる。

4. 結 語

以上、本論文では無限列任意断面柱体群に作用する地震時動水圧を求める汎用解法として、圧縮性を考慮したグリーン関数を用いた直接境界積分法を示し、幾つかの柱体群を例に数値計算を行い、その特徴を考察した。また、何本から無限と見なせるかを判断するパラメタを示した。

参 考 文 献

- 今村 勤 (1982): 物理とグリーン関数、岩波全書、p. 264.
- 清川哲志・稻田 裕 (1989): 任意形状柱体群に働く地震時動水圧の解析、海岸工学論文集、第36巻、pp. 729-733.
- Gradshteyn, I. S. and I. M. Ryzhik (1980): Table of integrals, series, and products, Academic Press, p. 1156.