

Fokker・Planck 方程式を用いた波および乱れによる 砂粒子運動の理論的解析

泉 宮 尊 司*・古 俣 弘 和**

1. 結 論

波浪による砂粒子の移動現象を解明することは、海浜地形変化を予測する上で極めて重要である。これまでの漂砂量に関する研究では、正味の漂砂量をシールズ数のべき乗で評価する、いわゆるパワーモデルが主流を占めていた。このモデルは、数多くの実験結果によりその適用性が検証されており、また計算が比較的簡単であるために、二次元および三次元海浜変形の予測に用いられている。しかしながら、このモデルでは底面流速波形の効果や定常流の影響、あるいは波の不規則性の効果を一般的に取り入れることはかなり困難である。また、蛍光砂を用いた漂砂方向の現地調査にみられるように、砂粒子が拡散しながら移動している効果を取り入れることも難しい。そこで本研究では、個々の砂粒子の運動に着目し、波および乱れの効果と取り入れた砂粒子の運動の運動方程式を用いて、理論的な解析を行うことを試みる。この方法の利点は、流れや波の不規則性なども取り込み易いことである。不規則な外力を取り入れた運動方程式を解析的に解くために、Fokker・Planck 方程式に変換して理論解を得ている。得られた Fokker・Planck 方程式は、確率密度関数に関して移流拡散型の偏微分方程式となっており、物理的な意味も明確なものとなっている。本手法の妥当性を検証するために、半周期後の砂粒子の存在確率の理論値と実測値との比較も行われている。

2. 波および乱れによる砂粒子の運動の理論的解析

波による砂粒子の運動を取り扱った研究には、Eagleson and Dean (1961)、日野ら (1982) および土屋・清水 (1982) などの研究がある。これらの研究が契機となって、砂粒子の運動を数値的に解析することによって、漂砂量を算定しようとする研究が行われるようになってきた (山下ら, 1983; 沢本ら, 1984; 山下・金沢, 1989)、また、砂粒子の運動方程式を簡略化して、理論的に漂砂

量を算定した、河田 (1989) および河田・土屋 (1990) 等の研究も行われるようになった。このように、砂粒子の運動方程式を用いて漂砂量を算定する方法は、有力な方法となりつつある。本研究では、これまでの研究のように決定論的な取扱いではなく、乱れ等による不規則外力を考慮した確率論的な解析を試みる。

(1) 砂粒子の運動方程式

非定常流速場に置かれた砂粒子の運動方程式は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\pi d^3}{6} \rho_s \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = & -C_M \alpha_1 \frac{\pi d^3}{6} \rho \left\{ \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} - \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\} \\ & - C_D \alpha_2 \frac{\pi d^2}{8} \rho (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}) |\mathbf{u}_p - \mathbf{u}| \\ & + \frac{\pi d^3}{6} (\rho_s - \rho) \mathbf{G} + \frac{\pi d^3}{6} \rho \mathbf{F} \quad \cdots \cdots (1) \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{u}_p$ は砂粒子の移動速度ベクトル、 $\mathbf{u}$ は水粒子の速度ベクトル、 ρ_s は砂粒子の密度、 ρ は水の密度、 d は砂粒子径、 C_M は慣性係数、 C_D は形状抵抗係数、 $\mathbf{G}$ は重力ベクトル、 $\mathbf{F}$ は単位体積当たりの外力ベクトル、 α_1 および α_2 はそれぞれ遮蔽係数を表す。式 (1) において、右辺の最後の項が平均的な摩擦項および不規則外力を表す。

式 (1) は、砂粒子の運動に関する Lagrange 的な記述であるが、波の 1 周期間の砂の移動量は波長に比べてかなり小さいので、砂粒子の初期の位置に関して水粒子速度を Taylor 展開すると、

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_p, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_{p0}, t) + (\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_{p0}) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}_{p0}, t) \quad \cdots \cdots (2)$$

$$d\mathbf{u}(\mathbf{X}_p, t)/dt = d\mathbf{u}/dt + \mathbf{u}_p \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}_{p0}, t) \quad \cdots \cdots (3)$$

となる。また、慣性係数 $C_M = 0.5$ 、形状抵抗係数 $C_D = \nu b/|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}|d$ とすると、式 (1) の運動方程式は、次式のように書き改められる。

$$\begin{aligned} A_3 \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} + \{A_1 - A_2 \nabla \mathbf{u}\} \mathbf{u}_p - A_1 \mathbf{X}_p \nabla \mathbf{u} \\ = A_2 \frac{d\mathbf{u}}{dt} + A_1 \mathbf{u} + (\rho_s/\rho - 1) \mathbf{G} + \mathbf{F} \quad \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

ここに、 $A_1 = \alpha_2 b \nu / d^2$ 、 $A_2 = \alpha_1 / 2$ 、 $A_3 = \rho_s / \rho + \alpha_1 / 2$ である。

これより、問題を簡単にするために砂粒子の一次元運

* 正会員 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科

** 工修 新潟市役所 都市開発部

動を考える。式(4)において、外力項を平均的な摩擦項と不規則外力項とに分離すると、

$$\begin{aligned} A_3 \ddot{X}_p + \{A_1 - A_2(\partial u / \partial x)\} \dot{X}_p - A_1(\partial u / \partial x) X_p \\ = A_2(\partial u / \partial t) + A_1 u - A_4 \text{sign}(u_p) + f(t) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

を得る。ここに、 $A_4 = \mu(\rho_s/\rho - 1)g$ である。 μ は砂粒子に働く摩擦係数である。また、 X_p は砂粒子の移動距離を表し、 $\dot{X}_p = u_p$ 、 $\ddot{X}_p = du_p/dt$ 、 $f(t)$ は不規則外力を表す。式(5)は、 X_p に関する外力項を含む2階の常微分方程式となっていることがわかる。このような有階の常微分方程式は変数の変換により、ベクトルマルコフ過程に変換されることが示されている(Akaike, 1974)。したがって、このような場合にも Brown 運動の解析に用いられている Fokker-Planck 方程式を導くことができる。

(2) Fokker-Planck 方程式とその解

一般に確率過程がベクトルマルコフ過程であれば、 Δt 秒後の確率密度関数 $P(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t + \Delta t)$ は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t + \Delta t) = \int \int P(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}, t) \\ \times \Psi(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u}) d(\Delta \mathbf{x}) d(\Delta \mathbf{u}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\Psi(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u})$ は遷移確率である。式(6)を $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ の回りに Taylor 展開すると次式を得る(たとえば、山内, 1986)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = \left[- \left(\frac{\partial}{\partial x_1} D_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} D_2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} D_{11} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} D_{12} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} D_{22} \right] P \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに、 $x_1 = X_p$ 、 $x_2 = u_p$ であり、係数 D_i および D_{ij} はそれぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} D_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E(\Delta x_1) / \Delta t = x_2 \\ D_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E(\Delta x_2) / \Delta t \\ = [A_2(du/dt) - A_1 u - A_4 \text{sign}(u_p) \\ - \{A_1 - A_2(\partial u / \partial x)\} x_2 + A_2(\partial u / \partial x) x_1] / A_3 \\ D_{11} = 0, \quad D_{12} = 0 \\ D_{22} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E(\Delta x_2^2) / \Delta t = \sigma_T^2 / 2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $E(\quad)$ はそれぞれの確率変数の期待値を示す。また、 σ_T は不規則外力の強度を示すパラメタである。式(7)および(8)より、砂粒子が時間 t 秒後に x_1 の位置にあり、速度 x_2 で運動している確率 $P(x_1, x_2, t)$ に関する偏微分方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \partial P / \partial t + x_2 \partial P / \partial x_1 + \phi(t) P + \phi(x_1, x_2, t) \partial P / \partial x_2 \\ = \{\sigma_T^2 / 2\} \partial^2 P / \partial x_2^2 \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに、 $\phi(t)$ および $\phi(x_1, x_2, t)$ は、

$$\begin{aligned} \phi(t) = - \{A_1 - A_2(\partial u / \partial x)\} / A_3 \\ \phi(x_1, x_2, t) = [A_2(\partial u / \partial t) + A_1 u - A_4 \text{sign}(u_p) \\ - \{A_1 - A_2(\partial u / \partial x)\} x_2 - A_1(\partial u / \partial x) x_1] / A_3 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。

ここで、得られた Fokker-Planck 方程式を解くために、まず確率密度関数 $P(x_1, x_2, t)$ を、

$$P(x_1, x_2, t) = F(x_1, x_2, t) \exp \left\{ - \int_0^t \phi(t) dt \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

と表し、式(9)に代入すると次式を得る。

$$F_t + x_2 F_{x_1} + \phi F_{x_2} = \{\sigma_T^2 / 2\} F_{x_2 x_2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

さらに、以下に示すような座標変換を行う。

$$\xi = \xi(x_1, x_2, t), \quad \eta = \eta(x_1, x_2, t) \quad \dots\dots\dots (13)$$

この変換によって式(12)は、次式となる。

$$\begin{aligned} F_t + (\xi_t + x_2 \xi_{x_1} + \phi \xi_{x_2}) F_\xi \\ + (\eta_t + x_2 \eta_{x_1} + \phi \eta_{x_2}) F_\eta \\ = \{\sigma_T^2 / 2\} \{ \xi_{x_2}^2 F_{\xi\xi} + 2 \xi_{x_2} \eta_{x_2} F_{\xi\eta} + \eta_{x_2}^2 F_{\eta\eta} \\ + \xi_{x_2 x_2} F_\xi + \eta_{x_2 x_2} F_\eta \} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

理論解を得るために、座標変換 (ξ, η) に対して次の条件を課すことにする。

$$\begin{aligned} \xi_t + x_2 \xi_{x_1} + \phi \xi_{x_2} = 0 \\ \eta_t + x_2 \eta_{x_1} + \phi \eta_{x_2} = 0 \\ \xi_{x_2 x_2} = 0, \quad \eta_{x_2 x_2} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(15)を満たす ξ および η は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \xi = \{q_2(x_1 - r) - q_2(x_2 - \dot{r})\} / W(t) \\ \eta = \{-q_1(x_1 - r) - q_1(x_2 - \dot{r})\} / W(t) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $\dot{r}$ は時間に関する微分を示し、 q_1, q_2 、および r は、次の微分方程式の1次独立な同次解および非同次解であり、 $W(t)$ は q_1, q_2 の Wronskian である。

$$\ddot{y} + h(t) \dot{y} + g(t) y = f_1(t) \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} h(t) = \{A_1 - A_2 \cdot \partial u / \partial x\} / A_3 \\ g(t) = - \{A_1 / A_3\} \partial u / \partial x \\ f_1(t) = \{A_2 / A_3\} \dot{u} + \{A_1 / A_3\} u - \{A_4 / A_3\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

上述の座標変換により、式(14)は次式に変換される。

$$F_t = (\sigma_T^2 / 2) \{ \xi_{x_2}^2 F_{\xi\xi} + 2 \xi_{x_2} \eta_{x_2} F_{\xi\eta} + \eta_{x_2}^2 F_{\eta\eta} \} \quad \dots\dots\dots (19)$$

上式の解は、 $t=0$ で $\xi=\xi_0$ および $\eta=\eta_0$ とすると

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2\pi A^{1/2}} \exp \left[- \{a(\xi - \xi_0)^2 \right. \\ \left. + 2h(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) + b(\eta - \eta_0)^2\} / 2A \right] \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a = \sigma_T^2 \int_0^t \eta_{x_2}^2 dt, \quad b = \sigma_T^2 \int_0^t \xi_{x_2}^2 dt \\ h = - \sigma_T^2 \int_0^t \xi_{x_2} \eta_{x_2} dt, \quad A = ab - h^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる(Chandrasekhar, 1943)。以上のことから、確率密度関数 $P(x_1, x_2, t)$ は、式(20)を式(11)に代入するこ

とによって、次式のように表される。

$$P(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi\Delta^{1/2}} \exp \left[-\{a(\xi - \xi_0)^2 + 2h(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) + b(\eta - \eta_0)^2\} / 2\Delta - \int_0^t \phi dt \right] \dots\dots\dots (22)$$

さらに、任意の時刻における砂粒子の移動距離の確率分布である $P(x_1, t)$ は、式(22)を x_2 について $-\infty \sim +\infty$ まで積分して得られる。

$$P(x_1, t) = \frac{1}{[2\pi(aq_2^2 - 2hq_1q_2 + bq_1^2)]^{1/2}} \cdot \exp \left[-\frac{\{x_1 - (\xi_0q_1 + \eta_0q_2 + r)\}^2}{2(aq_2^2 - 2hq_1q_2 + bq_1^2)} \right] \dots\dots\dots (23)$$

上式により、分散と平均値が時間の関数である Gauss 分布となっていることがわかる。

(3) 数値計算法

確率密度関数 $P(x_1, x_2, t)$ および $P(x_1, t)$ を求めるためには、新座標 (ξ, η) の値を求める必要がある。このためには、式(17)の1次独立な解 q_1, q_2 および非同次解 $r(t)$ を求めなければならない。本研究では、級数解法および Runge・Kutta・Gill 法の2解法を用いた。底面流速波形が微小振幅波理論により得られるとすると、式(17)は次のような形の微分方程式となる。

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2 \sin \tau)y' + \lambda_3 \sin \tau y = 0 \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 λ_1, λ_2 および λ_3 は定数であり、ダッシュは τ に関する微分を表わす。級数解法による場合には、第7次まで厳密に求め、そのより高次の項は、微小と思われる項を省略して漸化式より100項程度まで求めた。半周期までの結果を、Runge・Kutta・Gill 法と比較したところ、ほぼ一致したものが得られた。一方、非同次解 r は、1次独立な解 q_1, q_2 を用いて次のように表される。

$$r(t) = q_1 \int_0^t \frac{-f_1(t)q_2}{W(t)} dt + q_2 \int_0^t \frac{f_1(t)q_1}{W(t)} dt \dots\dots\dots (25)$$

このような方法により、 (ξ, η) が決定されたならば、式(22)および式(23)により容易に確率密度関数が算定できる。

3. 計算結果および実測値との比較

(1) 移動距離分布

Fokker・Planck 方程式を用いた本計算法の妥当性および適用性を検証するために、幾つかの計算例および実験結果との比較を示す。波の条件として、波高 8 cm、水深 20 cm、周期は 0.8, 1.0, 1.5, 2.0 s の4ケースを選んだ。砂粒子の比重は 2.65 とし、粒径は 0.3 mm ~ 1.2 mm までの5種類とした。

図-1 は、半周期間の砂粒子の移動距離分布の変化を示したものである。この図の場合、砂粒子に働く摩擦係数 $\mu=0.0$ 、 $\alpha_2b=1.92$ 、不規則外力の強度を示すパラメ

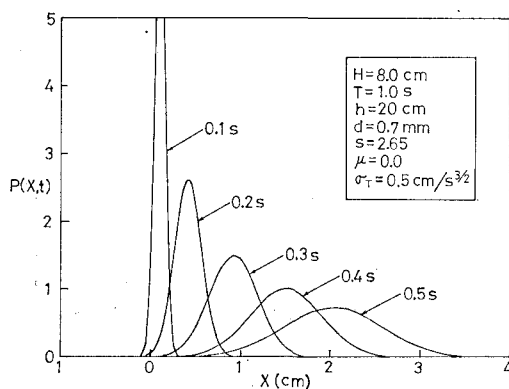


図-1 砂粒子の移動距離分布の変化(摩擦なし)

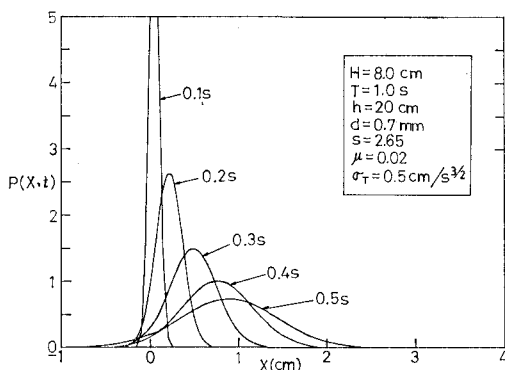


図-2 砂粒子の移動距離分布の変化(摩擦あり)

タ $\sigma_T=0.5 \text{ cm/s}^{3/2}$ 、波高 $H=8.0 \text{ cm}$ 、周期 $T=1.0 \text{ s}$ としたときのものである。初期時間 $t=0 \text{ s}$ に $x=0 \text{ cm}$ にあった砂粒子は、広がりながら x が正の方向へ移動していることがわかる。このような条件のものでは、平均移動量が半周期で約 2 cm にもなり、かつ広がり幅もかなり大きくなる。一方、図-2 は摩擦係数を $\mu=0.02$ とし、その他の条件は同一にしたときの移動距離分布を示したものである。この図より、砂粒子に働く摩擦力を考慮すると、平均移動量は小さくなるが、広がり幅は殆ど変化しないことがわかる。

図-3 は、形状抵抗係数の大きさによる移動距離分布の違いを示している。この図において、摩擦係数は $\mu=0.0$ 、 $\sigma_T=0.6$ を用い、形状抵抗係数の大きさを示す α_2b の値を 1.8 および 3.6 としている。数値計算は級数解を用いている。形状抵抗係数の値を大きくすると半周期間の平均移動距離は大きくなるが、分散の値は $\alpha_2b=1.8$ の分散より小さくなっている。これは、不規則外力の大きさを一定としたため、波動流による規則外力と不規則外力との比の値が、 $\alpha_2b=1.8$ の方が相対的に大きくなるため、このような結果になったと考えられる。

図-4 は、一周期間の平均移動距離と砂粒子径との関

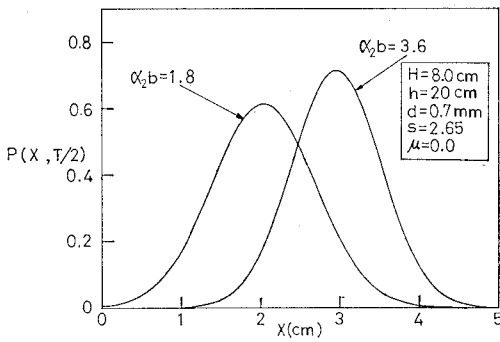


図-3 形状抵抗係数の大きさによる移動距離分布の違い

係を示したものである。この図においては、 $\mu=0.0$ 、 $\sigma_T=0.06\text{ cm/s}^{3/2}$ なる値を用い、Runge・Kutta・Gill法を用いて計算を行った。砂粒子径が大きくなるにしたがい、一周期間の平均移動距離もほぼ単調に減少している様子がわかる。なお、0.2 mmの砂粒子に対しても同様な計算を行ったが、計算過程において一部に数値発散を生じたので、この図には示していない。

これまでの結果より、本研究による理論解は、砂粒子の形状抵抗係数 C_D 、不規則外力の大きさを示す σ_T および摩擦係数 μ の値によって、平均移動距離および分散の値が変化することがわかった。これらの値の概略値を決定するために、砂粒子の波による移動に関する実験を行った。

実験は所定の水深に木板を水平に設置し、その上に粒径 0.7 mm の砂粒を 100 個程度置き、波を作用させて 8 ミリビデオカメラを用いて撮影した。そのビデオ画像より 100 個程度の砂粒子の一周期間の移動距離を測定し、移動距離分布を求めた。その結果は、図-5 のヒストグラムで示されている。理論計算については、広がり幅が一致するように σ_T の値を決定した。その結果、 $\sigma_T=$

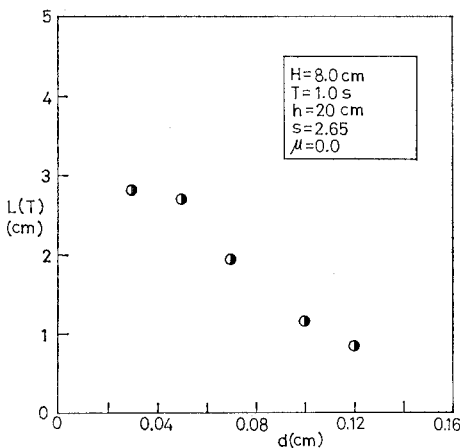


図-4 一周期間の平均移動距離と砂粒子径との関係

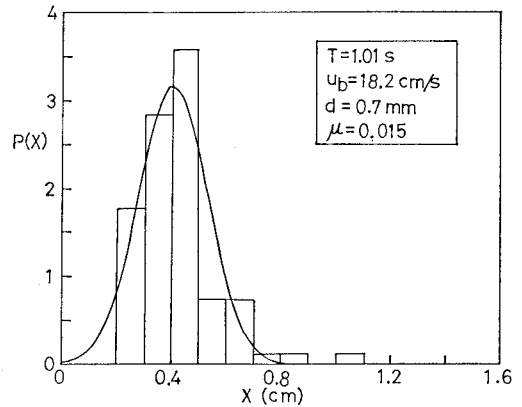


図-5 一周後の移動距離分布の実測値との比較

0.06 $\text{cm/s}^{3/2}$ なる値が得られた。 $\alpha_2 b$ および μ に関しては、平均移動量のみでは決定できないので、 $\alpha_2 b=3.6$ として摩擦係数 μ の値を算定した。この場合、 $\mu=0.015$ 程度の値が得られた。これらの値を採用すると、図にみられるように、実測値と理論値がほぼ一致した結果となる。実験結果が非対称な分布となっているのは、砂粒子が角ばっているものが存在していたことや、砂粒子の粒径が 0.6 mm ~ 0.8 mm のものが混在していたからであろうと思われる。理論計算におけるパラメタの決定に関しては、 σ_T については底面摩擦速度と粒径等の関数になると考えられ、また摩擦係数 μ についても底面摩擦係数および砂の粒径等の関数になると考えられるが、これらの一般的な関係を見いだすことは、今後の重要な課題といえる。

(2) 分散の時間変化

現地海浜における蛍光砂の調査にみられるように、砂粒子は拡散しながら移動している。本研究による方法では、このような砂粒子の拡散現象を説明できることが大きな特徴である。図-6 は移動距離分布の分散の時間変化を示したものである。図の縦軸は分散値を σ_T^2 で割った値を示している。このときの σ_T は、0.6 $\text{cm/s}^{3/2}$ であ

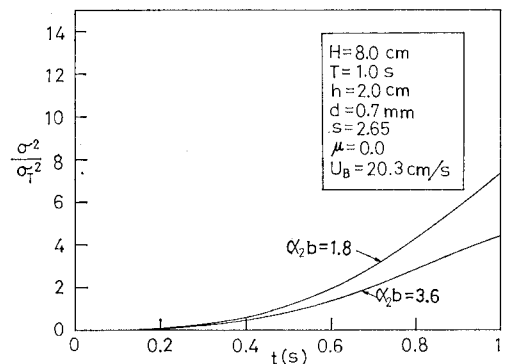


図-6 移動距離分布の分散の時間変化

る。この図より、時間とともに砂粒子の分散が増大し、その増加の程度が時間の2乗程度になっていることがわかる。

4. 結 論

本研究では、波動場での個々の砂粒子の運動を、波動流とともに乱れや底面から受ける不規則外力を考慮して確率論的な解析を行った。その結果、次のようなことが明かとなった。

(1) 不規則外力を含む砂粒子の運動方程式より、確率密度関数に関する運動方程式ともいえる Fokker・Planck 方程式を導いた。その結果、確率密度関数に関して移流・拡散型の偏微分方程式が得られた。この方程式より、不規則外力の強度は、砂粒子の拡散に寄与することが明かとなった。

(2) Fokker・Planck 方程式を変数変換により、確率密度関数 $P(x_1, x_2, t)$ および存在確率 $P(x_1, t)$ の理論解を得た。その結果、任意時間後の砂粒子の存在確率は、平均値と分散が時間とともに変化する Gauss 分布となることがわかった。

(3) 一周期後の砂粒子の移動距離分布の実測値と比較を行い、ほぼ一致することが確認できた。しかしながら、理論におけるパラメタの値の一般的な決定法については今後の研究課題である。

(4) 本研究では、微小振幅波理論に基づく底面流速による砂粒子の運動のみについてその解析例を示したが、本研究による方法は、定常流や任意の底面流速波形の効果も容易に取り入れることができる。また、砂粒子の運動より漂砂量も算定できるので、将来極めて有望なモデルとなると思われる。

最後に、本研究の一部は文部省科学研究費一般研究B(代表者:新潟大学理学部・立石雅昭助教授)の補助を受けたことを付記し、感謝いたします。また、図面の作成に協力いただいた、本学大学院生・浅井尚之君に感謝いたします。

参 考 文 献

- 河田恵昭 (1989): 傾斜海浜における漂砂量則について, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 289-293.
- 河田恵昭・土屋義人 (1990): 岸沖沿岸漂砂量則の統一表示, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 259-263.
- 沢本正樹・山下俊彦・秋山義信 (1984): 流れおよび砂移動の物理機構を考慮した波による砂運の安定解析, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 376-380.
- 土屋義人・清水 潔 (1982): 波による球状粒子の移動機構, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 233-237.
- 日野幹雄・山下俊彦・米山 晋 (1982): 波による砂粒子の運動と掃流砂量に関する研究, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 213-217.
- 山内保文監修 (1986): 船舶・海洋技術者のための不規則現象論, 海文堂, pp. 83-92.
- 山下俊彦・沢本正樹・秋山義信・山崎泰助 (1983): 波動場での砂粒子の移動確率と掃流砂量に関する研究, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 194-198.
- 山下俊彦・金沢一郎 (1989): 非定常性に着目した掃流砂の移動機構, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 254-258.
- Akaike, H. (1974): Markovian Representation of Stochastic Processes and its Application to the Analysis of Autoregressive Moving Average Processes Annals, Institute of Statistical Mathematics, Vol. 26, pp. 243-247.
- Eagleson, P. S. and R. G. Dean (1961): Wave-induced motion of bottom sediment particles, Trans. ASCE, Vol. 126, Part 1, pp. 1162-1189.
- Chandrasekhar, S. (1943): Stochastic Problems in Physics and Astronomy, Reviews of Modern Physics, Vol. 15, No. 1, pp. 1-89.