

波高の中分点位置の確率特性

木村 晃*・太田隆夫**・松見吉晴***

1. はじめに

波別解析法は不規則波の解析法の1つで、ゼロダウンクロス法あるいはゼロアップクロス法で不規則波を1波毎に分け、その波が波高・周期の等しい規則波と同じ力学的特性を有すると考える方法である。しかしこの方法には次のような問題点がある。たとえば図-1に示した2つの波は波高・周期が同じであるが、峰、平均静水面、谷の位置の関係が大きく異なっている。従来のゼロクロス法ではこれらの波は同じ波と認識される。しかし、例えばこれらの波が堤体に作用する場合を考えると、全波圧や波力モーメント、打ち上げ高さが異なることが予測される。また著者の一人は、このような相違が浅海域の碎波現象では見かけ上の水深変化に対応することを明らかにしている(木村ら, 1986)。このように図-1の2波は力学的な相違をもつ場合がある。著者の一人は、このようなゼロクロス波の特性を波高中分点位置の変動量で評価することを試み、いくつかの検討を行っている(木村ら, 1988, 1989)。そこでは波高中分点位置の確率分布を正規分布と仮定した検討が行われている。しかしこれは理論的に導かれたものではなく、特に波高の小さい部分では正規分布とかなり異なるデータの分布が得られる。本研究は包絡線法による理論的検討から波高中分点位置の確率分布を導き、数値シミュレーション

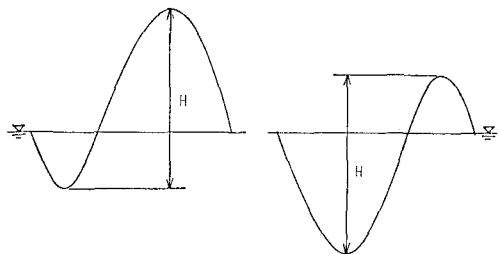


図-1 ゼロクロス波の相違

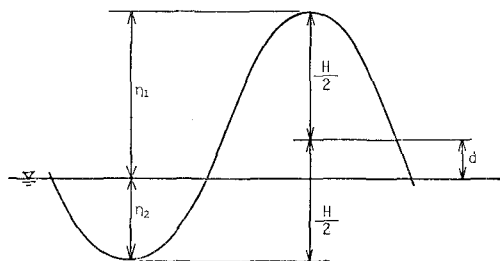


図-2 波高中分点位置の定義

との比較によってその妥当性を示したものである。

2. 波高の中分点位置の定義と特性

2.1 定義

広帯域スペクトルの場合ゼロクロス波の波高中分点の位置は静水位と一致せず、これを中心として分布する。この波高中分点の変動は前述のように、実質的には静水位の変動、すなわち水深の変化に対応する場合もあり、この場合にはゼロクロス波の力学的特性に影響を与える。ここでは図-1に示した2つの波の差を、図-2に示す波高中分点と静水位との距離 d の差として定量的に評価することを試みる。

図-2からわかるように、 d は次式で与えられる。

$$d = (\eta_1 - \eta_2)/2 \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 η_1 はゼロクロス波の峰の位置と静水位までの距離、 η_2 は静水位と谷の位置までの距離 ($\eta_1, \eta_2 > 0$)。また d は $(-H/2, H/2)$ の範囲の値をとる。すなわち、この範囲外では波の谷あるいは峰が静水位より上あるいは下となり、ゼロクロス波として定義されなくなる。

2.2 特性

まず数値シミュレーション結果を用いて d の特性を説明する。不規則波のシミュレーションは逆FFT法を用いて行った。期待スペクトルのピーク周波数 f_p は1 Hz、サンプリング間隔 $\Delta t = 0.05$ s とした。期待スペクトルとしては次式で表される Wallops スペクトルを用いた。

$$S(f) = (f/f_p)^{-m} \exp[m/4 \{1 - (f/f_p)^{-4}\}] \dots \dots (2)$$

* 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部社会開発システム工学科

** 正会員 工修 鳥取大学助手 工学部社会開発システム工学科

*** 正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部社会開発システム工学科

式(2)で形状パラメータ m を 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20 と 7 種類変えて計算した。不規則波形はゼロダウクロス法で処理し、すべてのゼロクロス波の峰と谷の水位を求め、式(1)により d を計算した。図-3 にシミュレーションによる d の分布を示した。各図の縦軸は d を各々の波の波高で割った値を、横軸は波高を平均波高で正規化した値をとって示した。図-3 の広帯域スペクトル ($m=5$) の場合、 $H/\bar{H} < 1$ の領域で d/H は ± 0.5 の限界値付近にまで達しているが、波高が大きくなるにつれ、0 付近に集中するようになりばらつきも小さくなる。狭帯域スペクトル ($m=20$) の場合、 d/H が ± 0.5 付近に分布するのは波高がごく小さい領域のみで、 $m=5$ に比べて分布の範囲は大幅に小さくなっている。これらの図より波高が大きくなるほど、また、スペクトルの帯域幅が狭くなるほど、ゼロクロス波の峰と谷の水位の大きさの差は相対的に小さくなることがわかる。

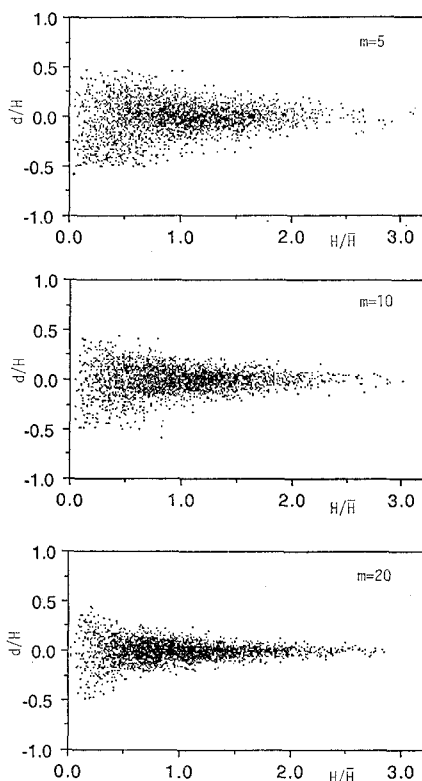


図-3 波高中分点位置の分布

3. 波高の中分点位置の確率分布

3.1 2次元 Rayleigh 分布

式(1)に示したように、 d は η_1 と η_2 の差で表される。峰の水位と谷の水位の現れる時刻は通常平均周期の半分程度離れており、この程度の間隔では η_1 と η_2 は相

互に相関をもつ。したがって d の確率分布を導く際には両者の結合確率特性を考えなければいけない。ゼロクロス波の峰および谷の水位そのものの確率分布を導くことは困難であり、従来よりこれらの確率分布を包絡線振幅の確率分布に置き換えて検討するという方法がとられている。すなわち、不規則波の包絡線は若干の誤差 (Tayfun, 1989) はあるもののほぼゼロクロス波の峰と谷を通り、これらの水位は各々同じ時刻の包絡線振幅で置き換えられる。これはゼロクロス波の峰と谷の水位の結合確率分布を一定時間間隔離れた 2 点の包絡線振幅の値の結合確率分布に等しいとすることになる。ここでも d の確率分布を導く際にこの仮定を採用する。すなわち、 η_1 と η_2 を各々同時刻の包絡線振幅 A_1 , A_2 と置き換える。したがって、式(1)より

$$d = (A_1 - A_2)/2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。 A_1 , A_2 を包絡線振幅の平均値 $\bar{A}$ で正規化したものを ξ_1 , ξ_2 ($\xi_1, \xi_2 > 0$) とすると、これらは次式で表される Rayleigh 分布に従う。

$$p(\xi) = \frac{\pi}{2} \xi \exp \left[-\frac{\pi}{4} \xi^2 \right] \quad \dots\dots\dots (4)$$

周辺分布として式(4)を満たし、かつ相互に相関をもつという条件だけでは両者の結合確率分布を求めることは出来ないが、シミュレーション結果を用いた検討により、スペクトル形にかかわらず次式の 2 次元 Rayleigh 分布 (Rice, 1954) が両者の結合確率分布として良好な特性をもつことを確認した。

$$p(\xi_1, \xi_2) = \frac{\pi^2 \xi_1 \xi_2}{4(1-\kappa^2)} \exp \left[-\frac{\pi(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{4(1-\kappa^2)} \right] \cdot I_0 \left[\frac{\pi \kappa \xi_1 \xi_2}{2(1-\kappa^2)} \right] \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 I_0 は 0 次の第 1 種変形ベッセル関数、 κ は包絡線振幅の相関パラメータで次式で与えられる。

$$\kappa = (\rho^2 + \lambda^2)^{1/2} / m_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \rho &= \int_0^\infty S(f) \cos 2\pi(f - \bar{f}) \frac{t}{2} df \\ \lambda &= \int_0^\infty S(f) \sin 2\pi(f - \bar{f}) \frac{t}{2} df \\ \bar{f} &= m_1 / m_0 \end{aligned}$$

ここで $S(f)$ は不規則波のスペクトル、 m_n はスペクトルの n 次モーメントである。また $t/2$ は包絡線振幅 A_1 , A_2 間の時間差であり、ここではゼロクロス波の平均周期の $1/2$ で与える。図-4 に式(2)で $m=5$ とした場合のシミュレーション結果と式(5)との比較を示したが両者の対応は良好である。この他のスペクトル形においても同様の良好な適合性が確認された。なお、 κ の算定に際しては、時間差 t の選択も重要である。これについては 3.3 で述べる。

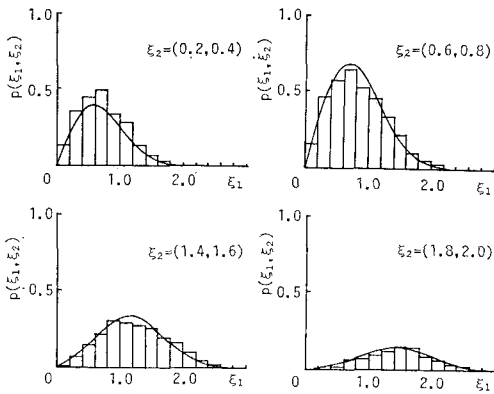


図-4 2次元 Rayleigh 分布とデータの比較

3.2 波高中分点位置の確率分布

3.1 で ξ_1, ξ_2 の結合確率分布として 2 次元 Rayleigh 分布を用いることの妥当性を示した。ここではこの分布を用いて d の確率分布を導く。

いま、 $A_1 + A_2 = H$ となる集合を考える。この両辺を $\bar{H} = 2\bar{A}$ で正規化すると、

$$\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) = \zeta \quad (7)$$

となる。式 (7) より

$$\xi_2 = 2\zeta - \xi_1 \quad (8)$$

これを式 (5) に代入し、変数変換を施すと ξ_1 と ζ の結合確率分布を得る。

$$p(\xi_1, \zeta) = \frac{\pi \xi_1 (2\zeta - \xi_1)}{2(1 - \kappa^2)} \exp \left[-\frac{\pi \{ \xi_1^2 + (2\zeta - \xi_1)^2 \}}{4(1 - \kappa^2)} \right] \cdot I_0 \left[\frac{\pi \kappa \xi_1 (2\zeta - \xi_1)}{2(1 - \kappa^2)} \right] \quad (9)$$

式 (9) を ξ_1 について積分すると、 ζ の確率分布を求めることができる。

$$p(\zeta) = \int_0^{2\zeta} p(\xi_1, \zeta) d\xi_1 \quad (10)$$

ここで、式 (10) の積分範囲は $\xi_1, \xi_2 > 0$ の条件より決定される。つぎに式 (3) の両辺を $\bar{H} = 2\bar{A}$ で正規化する。

$$\delta = (\xi_1 - \xi_2)/4 \quad (11)$$

式 (11) に $\xi_2 = 2\zeta - \xi_1$ を代入して

$$\delta = (\xi_1 - \zeta)/2 \quad (12)$$

したがって

$$\xi_1 = 2\delta + \zeta \quad (13)$$

となる。式 (13) を式 (9) に代入し、変数変換を行うと、 δ と ζ の結合確率分布を得る。

$$p(\delta, \zeta) = \frac{\pi^2 (\zeta^2 - 4\delta^2)}{1 - \kappa^2} \exp \left[-\frac{\pi (\zeta^2 + 4\delta^2)}{2(1 - \kappa^2)} \right] \cdot I_0 \left[\frac{\pi \kappa (\zeta^2 - 4\delta^2)}{2(1 - \kappa^2)} \right] \quad (14)$$

波高中分点位置の定義より

$$-H/2 < d < H/2 \quad (15)$$

であり、この式を $\bar{H}$ で正規化すると

$$-\zeta/2 < \delta < \zeta/2 \quad (16)$$

式 (14) では ζ によって δ の範囲が変化するので新たに

$$\varepsilon = \delta/\zeta = d/H \quad (17)$$

として、第 2 項までを式 (14) に代入し、変数変換を行うと ε と ζ の結合確率分布を得る。

$$p(\varepsilon, \zeta) = \frac{\pi^2 \zeta^2 (1 - 4\varepsilon^2)}{1 - \kappa^2} \exp \left[-\frac{\pi \zeta^2 (1 + 4\varepsilon^2)}{2(1 - \kappa^2)} \right] \cdot I_0 \left[\frac{\pi \kappa \zeta^2 (1 - 4\varepsilon^2)}{2(1 - \kappa^2)} \right] \quad (18)$$

さらに、 ζ が起こる場合の ε の確率分布は

$$p(\varepsilon|\zeta) = p(\varepsilon, \zeta)/p(\zeta) \quad (19)$$

で与えられる。ここで、 $p(\zeta)$ は式 (10) により与えられる。また式 (16), (17) より

$$-1/2 < \varepsilon < 1/2 \quad (20)$$

であり、したがって式 (18) および (19) は 2. で述べた d の存在範囲の条件を満たしている。結果的に、式 (19) により $\zeta = H/\bar{H}$ を与えたときの $\varepsilon = d/H$ の確率分布が計算されることになり、図-3 に示したデータとの比較を行うことができる。

3.3 時間差 t

式 (18), (19) より ε の確率分布を求める際には、相関パラメータ κ の値が重要となる。式 (6) に示したように、 κ は不規則波のスペクトル $S(f)$ と代表周波数 $\bar{f}$ および包絡線振幅間の時間差 $t/2$ より計算される。 $\bar{f}$ は式 (6) のようにスペクトルから求めた平均周波数で与えられる。3.1 で述べたように、 $t/2$ はゼロクロス波の平均周期の $1/2$ で与えられる。したがって、 t の値としては、次の 2 つの平均周期が考えられる。

$$T_{01} = m_0/m_1$$

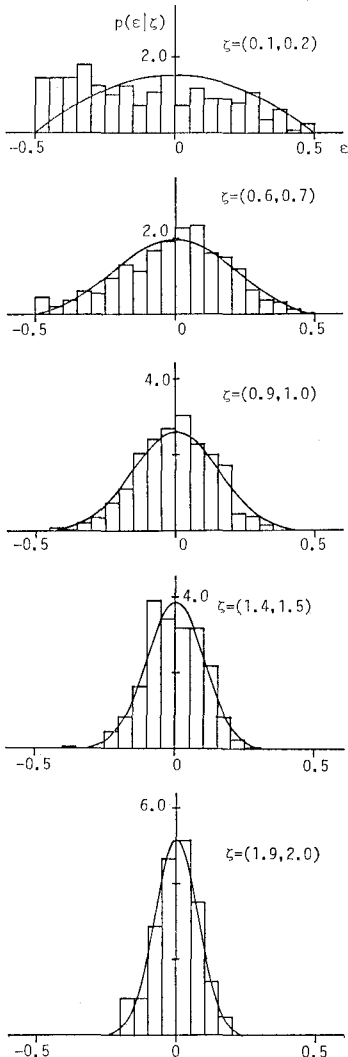
$$T_{02} = (m_0/m_2)^{1/2}$$

合田ら (1974) は、海の波については T_{02} の値は波形から直接求めた周期よりも小さくなると述べている。しかし、シミュレートした不規則波形から平均周期を求めたところ、どのスペクトル形でも T_{02} とほぼ一致したことから、ここでは t にこの値を用いることにした。

4. 数値シミュレーションの結果と理論の比較

2. で述べた数値シミュレーションの結果を用いて 3. で導いた理論の妥当性を検討した。図-5 に波高を与えたときの $\varepsilon = d/H$ の分布を示した。図中のヒストグラムは数値シミュレーションから求めた ε の頻度分布を示すもので、実線は式 (19) から計算した理論分布である。ヒストグラムについては $\zeta = H/\bar{H}$ を 0.1 毎のランクに分け、各々のランクごとに ε の相対頻度を求めて比較に

用いた。一方、理論分布は $\zeta=0.05, 0.15, \dots, 2.45$ について計算した。図より波高の小さい部分を除いて理論とデータの対応は非常によいことがわかる。波高が小さい場合にはゼロクロス波の定義限界ぎりぎりまでデータが存在するが、理論分布では $\varepsilon=\pm 0.5$ で確率密度はゼロになるため幾分対応の悪い部分がある。しかし、工学的に問題となる一定以上の波高の波においては、理論式は非常によい推定値を与えていることがわかる。



図—5 波高中分点位置の理論分布とデータの比較

図—6 には数値シミュレーションから求めた ε の標準偏差と、理論分布から求めた標準偏差の比較を示した。図中の実線が理論によるもの、○がシミュレーションによるものである。理論分布の標準偏差は、式 (18), (19) より次式のように与えられる。

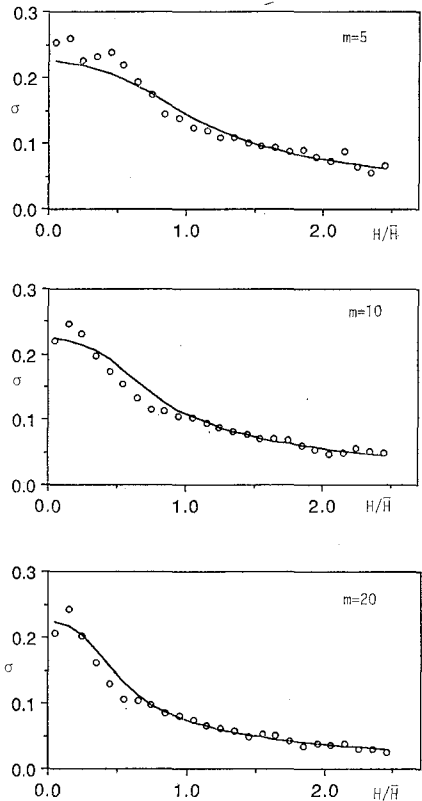
$$\sigma = \{\bar{\varepsilon}^2 - (\bar{\varepsilon})^2\}^{1/2} \dots \dots \dots (21)$$

ここに、

$$\bar{\varepsilon}^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \varepsilon^2 P(\varepsilon|\zeta) d\varepsilon$$

$$\bar{\varepsilon} = \int_{-1/2}^{1/2} \varepsilon P(\varepsilon|\zeta) d\varepsilon$$

いずれのスペクトル形においても、波高の小さな領域では両者に相違がみられるが、その他の部分ではよく一致している。



図—6 波高中分点位置の標準偏差

5. 実用の際に用いる κ の値の計算について

ここではゼロクロス波の平均的な波形の波高中分点の変動量について検討する。4. では κ の計算にはもとのスペクトルを用いたが、実用の際には次式で整形（一種の狭帯域化）したものを修正スペクトル $S_E(f)$ として κ の計算に用いることを提案する。

$$S_E(f) = S(f) \begin{cases} -\frac{0.265}{m} + 0.794 < f/f_p < \frac{1.333}{m} + 1.354 \\ S_E(f) = 0 & \text{その他の周波数帯} \end{cases} \dots \dots \dots (22)$$

木村ら (1990) はさきに不規則波に対する包絡線として

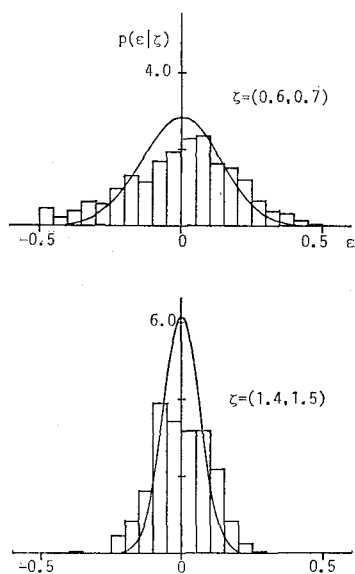


図-7 修正スペクトルによる波高中分点の理論分布

スプラインあるいは直線による方法を提案した。これは包絡線から不必要な変動を除いたものを用いて、合理的に波高の相関パラメータを計算する方法を提案したものである。式(22)はこの方法による結果を定式化したもので、修正スペクトルをもとに Rice の定義により計算すると上述の直線に近い包絡線が得られる。またこれを用いて逆 FFT 法で計算すると、もとの波形から物理的

には無意味と思われる微小な凹凸が除去された不規則波形が得られる。図-7は $m=5$ の場合の $S_B(f)$ から計算した ϵ の分布形で、図-5に対応するものである。図からわかるように修正スペクトルを用いた方の分布幅が幾分減少する。ゼロクロス波の物理特性(例えば水粒子速度: 瀬山ら, 1979)に関する検討の際、微小な凹凸を除去した波形から決めた波高、周期を用いた場合の方が実測値と理論式との対応が良い。したがって実際の現象に波高中分点の変動量を考慮する際は、ここで提案する程度の κ の方が望ましいと考える。

参考文献

- 木村 晃・瀬山 明 (1986): 斜面上の不規則波の碎波限界について, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 174-178.
- 木村 晃・後藤克史・瀬山 明 (1988): 浅海域における不規則波の波高変化について, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 168-172.
- 木村 晃・山田良作 (1989): 斜面上における不規則波の波高の頻度分布の変化, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 114-118.
- 木村 晃・太田隆夫 (1990): 不規則波の波高の確率分布について, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 116-120.
- 合田良実・永井康平 (1974): 波浪の統計的性質に関する調査・解析, 港研報告, 第13巻第1号, pp. 3-37.
- 瀬山 明・木村 晃・国友慶記 (1979): 浅海域の風波の水粒子速度に関する研究, 第26回海岸工学講演会論文集, pp. 11-15.
- Rice, S. O. (1954): Noise and stochastic processes edited by W. Nelson, Dover, pp. 133-294.
- Tayfun, M. A. (1989): Envelope, phase, and narrow-band models of sea waves, J. Wrtway., Port, Coast., and Ocean Eng., ASCE, Vol. 115, No. 5, pp. 594-613.