

不規則波浪の浅水変形モデル — 一周波数領域における修正 KdV 方程式 —

間瀬 肇^{*}・James T. Kirby^{**}・栗林 賢一^{***}

1. はじめに

不規則波浪の浅水・砕波変形を精度良く算定することは、海岸構造物に作用する波力や漂砂量を評価するに当たり非常に重要である。現在、代表波高や波高分布を算定する種々の予測モデルが提案されているが、波別解析法に基づく便宜的なモデルがほとんどで波動理論に準拠した波の予測モデルは少ない。

本研究では、スペクトル解析法に基づく不規則波浪の浅水変形の予測モデルを検討する。スペクトル成分波の振幅変化を線形浅水変形理論により求めると、水深が比較的大きい領域では概ね実測値を説明できるが、ある程度水深が浅くなって非線形性が卓越してくると実測値と合わなくなる。海岸近くのアーセル数が $O(1)$ の浅海領域では非線形理論が必要となる。

Boussinesq 方程式は弱い分散性と有限振幅性を含んだ理論式であり、Peregrine (1967) が任意海底海浜に対する Boussinesq 方程式を導いて以来多くの実験的研究がなされ、さらに理論が発展させられてきた。岸からの反射が無視でき、岸方向のみへ波が伝播するという条件においては Boussinesq 方程式から KdV 方程式が得られる。Freilich and Guza (1984) は Boussinesq 方程式から任意スペクトルを有する風波の浅水変形理論（ただし汀線に直角入射する場合）、Liu et al. (1985) は屈折・回折を考慮した非線形波の浅水変形理論を導いた。ここでは、KdV 方程式を用いて不規則波浪の成分波に対する浅水変形式を導き、その適用性を水理実験で確かめる。また、得られた浅水変形式の特徴を考察し、適用範囲が広げられるよう修正することによって予測精度の向上を目指す。

2. KdV 方程式を用いたスペクトル成分波の浅水変形式

非線形性と分散性を含む Boussinesq 方程式は、浅海での波動理論として有用であることが知られている。代

表周波数 ω_0 、代表振幅 a_0 、代表水深 h_0 として、以下の無次元量を導入する。

$$t = \omega_0 t', \quad (x, y) = k_0(x', y') = \frac{\omega_0}{\sqrt{gh_0}}(x', y'), \\ h = \frac{h'}{h_0}, \quad u = \frac{u'}{[(a_0/h_0)\sqrt{gh_0}]}, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{a_0} \quad \dots (1)$$

ダッシュがついた変数が次元量である。Boussinesq 方程式は、以下の二つの無次元パラメータ

$$\varepsilon = \frac{a_0}{h_0}, \quad \mu^2 = \frac{\omega_0^2 h_0}{g} \quad \dots (2)$$

が $O(\varepsilon) = O(\mu^2) < 1$ という条件でのものである。

波は x の正方向（岸方向）にのみ伝播するものとし、次の変数を導入する。

$$\xi = \int \frac{dx}{C} - t, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \chi = \varepsilon x \quad \dots (3)$$

ここで、 $C = \sqrt{h}$ であり、水深変化は波長に比べて小さい、すなわち、

$$O(|\nabla h|) \leq O(\mu^2) \quad \dots (4)$$

とする。これらの変数および条件を用いて、Boussinesq 方程式から次式の任意海底地形に対する KdV 方程式が得られる（間瀬ら、1991）。

$$\zeta_\tau + C\zeta_\chi + \frac{1}{4C}h_\chi\zeta + \frac{3}{2C^2}\zeta\zeta_\xi + \frac{\mu^2 h^2}{6\varepsilon C^2}\zeta\zeta_{\xi\xi} = O(\varepsilon, \mu^2) \quad \dots (5)$$

固定座標系の表示に直せば次のようになる。

$$\zeta_t + \sqrt{h}\zeta_x + \frac{h_x}{4\sqrt{h}}\zeta + \frac{3\varepsilon}{2\sqrt{h}}\zeta\zeta_x + \frac{h^{5/2}\mu^2}{6}\zeta_{xxx} = 0 \quad \dots (6)$$

波は基本周波数 ω_1 に対して周期的であるとし、その調和成分の重ね合わせとして Fourier 級数表示する。

$$\zeta' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n' e^{i(\int k_n dx' - \omega_n t')} + \text{c.c.} \quad \dots (7)$$

$$\omega_n^2 = gk_n^2 h \quad \dots (8)$$

ここで、c.c. は式 (7) 右辺第 1 項の共役複素数であり、 $\omega_n = n\omega_1$ 、 k_1 を波数の基本成分とすると $k_n = nk_1$ である。式 (7) を a_0 、 ω_1 、 k_1 を用いて無次元化する。

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n e^{i n (\int \bar{k}_1 dx - \bar{\omega}_1 t)} + \text{c.c.} \quad \dots (9)$$

ここで、 $\bar{k}_1 = k_1/k_0$ 、 $\bar{\omega}_1 = \omega_1/\omega_0$ である。複素振幅 A_n は

^{*} 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学科

^{**} Ph. D. Assoc. Prof., Dept. Civil Engrg., Univ. of Delaware

^{***} 工修 JR 西日本

水深 h の変化と同程度にゆっくり変化するものとし、 x の関数とする。

$$\frac{dA_n}{dx} = \varepsilon \frac{dA_n}{d\bar{x}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

条件式 (10) のもとで、式 (9) を式 (6) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{dA_n}{dx} + \frac{h_x}{4h} A_n - \frac{\mu^2}{6} i n^3 \bar{k}_1^3 A_n \\ & + \frac{3\varepsilon i \bar{k}_1}{8h} \sum_l \sum_m \left[(l+m) A_l A_m e^{i(l+m-n)\varphi_1} \right. \\ & + (l-m) A_l A_m^* e^{i(l-m-n)\varphi_1} \\ & - (l-m) A_l^* A_m e^{i(-l-m-n)\varphi_1} \\ & \left. - (l+m) A_l^* A_m^* e^{i(-l-m-n)\varphi_1} \right] = 0; n=1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。ここで、* は共役複素数であり、 φ_1 は次式の基本成分に対する位相関数である。

$$\varphi_1 = \int \bar{k}_1 dx - \bar{\omega}_1 t \quad \dots\dots\dots (12)$$

式 (11) の非線形項で n 次成分に寄与するのは次の共鳴条件を満たす場合である。

$$\pm \omega_l \pm \omega_m - \omega_n = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\pm \bar{k}_l \pm \bar{k}_m - \bar{k}_n = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

すなわち、

$$\pm l \pm m - n = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$l, m, n \geq 1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

である。非線形項の第1項に関しては

$$l+m-n=0 \rightarrow m=n-l \quad \dots\dots\dots (17)$$

であり、また $m \geq 1$ より $l \leq n-1$ でなければならない。第2項に関しては

$$l-m-n=0 \rightarrow m=l-n \quad \dots\dots\dots (18)$$

であり、また $m \geq 1$ より $l \geq n+1$ である。第3項に関しては

$$-l+m-n=0 \rightarrow m=n+l \quad \dots\dots\dots (19)$$

となり、 $m \geq 1$ より $l \geq 1-n$ となるが、式 (16) より $l \geq 1$ である。第4項に関しては

$$l+m+n=0 \rightarrow m=-l-n \quad \dots\dots\dots (20)$$

となるが、式 (16) より成立しない。以上のことに加え成分波の個数を N として、式 (11) は次元量を用いて次のように変形される。

$$\begin{aligned} & \frac{dA_n}{d\bar{x}} + \frac{h_x}{4h} A_n - \frac{1}{6} i n^3 \bar{k}_1^3 h^2 A_n \\ & + \frac{3i n \bar{k}_1}{8h} \left[\sum_{l=1}^{n-1} A_l A_{n-l} + 2 \sum_{l=1}^{N-n} A_l^* A_{n+l} \right] = 0; \\ & n=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ただし、ダッシュは省略してある。式 (21) の左辺第2項は浅水変形、第3項は波の分散性、第4項は波の非線形干渉に寄与するものである(間瀬ら, 1991)。

3. 不規則波浪の浅水変形実験

3.1 実験装置および実験方法

実験は長さ 27 m, 幅 50 cm, 深さ 75 cm の両面ガラス張り水槽で行なった。この水槽の一端には電気油圧式不規則波発生装置が設置されている。水槽の他端には海底勾配が 1/20 の一様勾配の模型海浜を設置した。一様水深部の水深は 47 cm とした。実験に用いた不規則波は、ピーク周波数が 0.6 Hz の Pierson-Moskowitz 型スペクトルを有するもので、波群度係数 (Groupiness Factor) は 0.73 である。水位変動は、斜面法先部とそれより 2 m 造波板よりの地点、水深 30, 25, 20, 17.5, 15, 12.5, 10, 7.5, 5, 2.5 cm の各地点で測定した。データの記録時間は約 18 分、サンプリング間隔は 0.04 sec とした。

3.2 実験結果

図-1 は最大波高 H_{max} , 1/10 最大波高 $H_{1/10}$, 有義波高 $H_{1/3}$, 平均波高 $\bar{H}$ の岸沖方向の変化を沖波有義波高 H_0 (7.04 cm) で無次元化して、無次元水深 h/H_0 に対して示したものである。 H_{max} は $h/H_0=2.49$ (水深 17.5 cm) で最大となる。この地点より砕波が生じる。 $H_{1/10}$, $H_{1/3}$ および $\bar{H}$ は $h/H_0=1.78$ (水深 12.5 cm) から減少し始める。この地点から砕波が顕著になってくる。

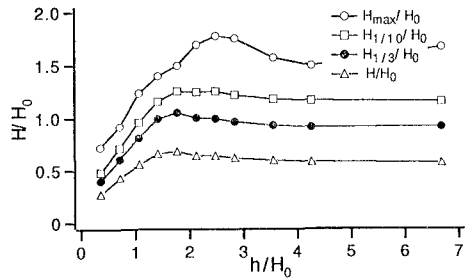


図-1 代表波高の岸沖変化

図-2 はエネルギースペクトルの実測値 (実線) と式 (21) の理論式による計算結果 (点線) を示したものである。スペクトルは次のように求めた。サンプリング間隔が 0.04 sec の約 18 分間のデータから、1 つ置きに取った 1024 個のサブセットを 10 個作る。各サブセットに対してスペクトル計算を行なった後、アンサンブル平均する。そのアンサンブル平均したスペクトル値を 3 個ずつ移動平均してスペクトルの推定値とした。したがって、自由度は 60、ナイキスト周波数は 6.25 Hz、分解周波数は 0.037 Hz である。

水深の大きい領域ではピーク周波数の 2 倍調和周波数周辺のエネルギーピークは見られないが、水深 15 cm の地点ではみられ、また 3 倍調和周波数周辺のエネルギー

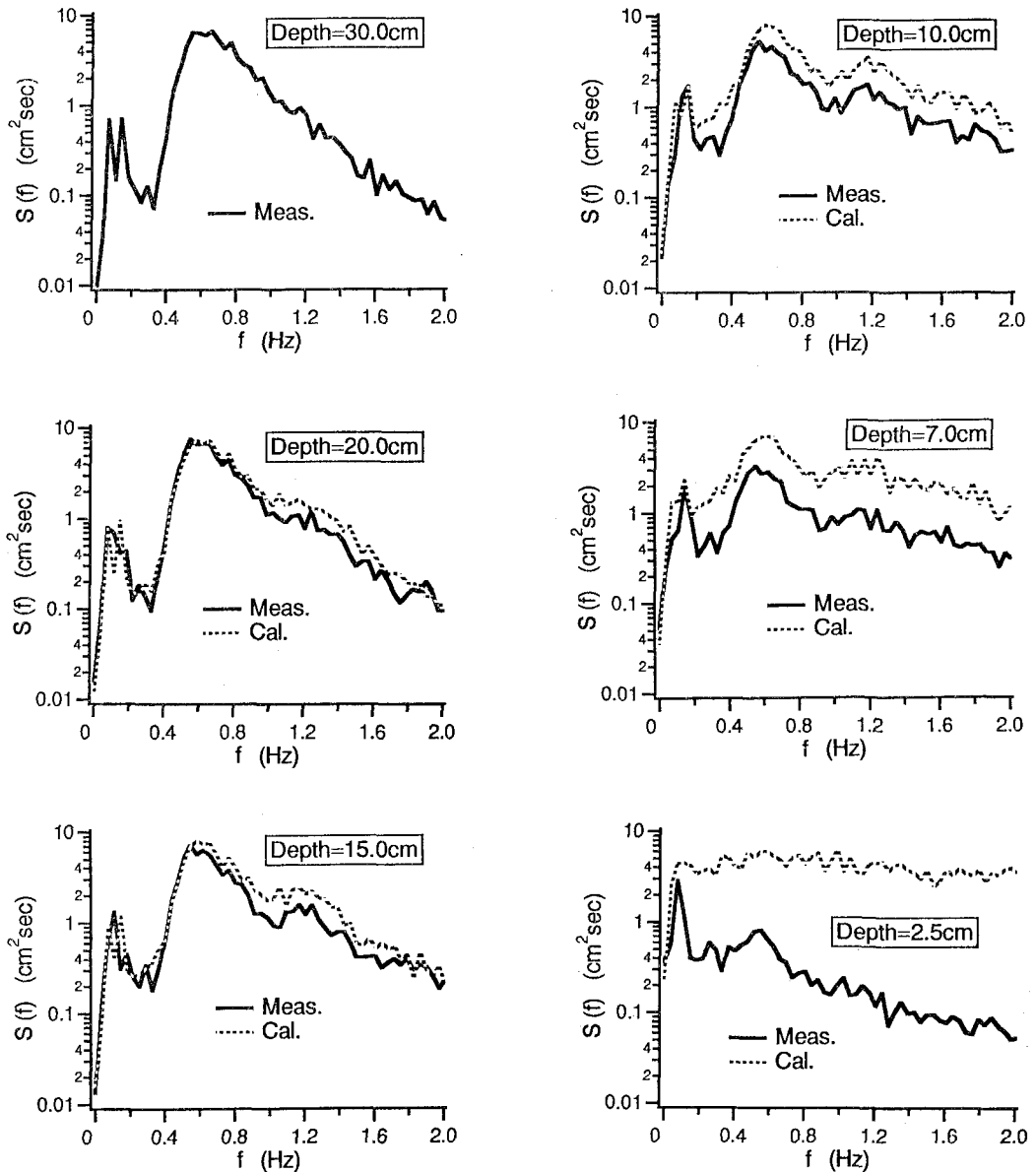


図-2 スペクトルの実測結果(実線)と式(21)による計算結果(点線)

ピークも若干現われている。水深 10 cm の地点におけるスペクトルは、沖でのそれに比べてピーク周波数周辺のエネルギー密度が減少しており、また高周波領域のエネルギー密度が全体に増加している。水深が 2.5 cm の地点ではピーク周波数であった 0.6 Hz のエネルギー密度がかなり小さくなり、低周波成分のエネルギー密度の方が大きくなっている。低周波領域の成分は 2 次干渉によるもの、多重反射によるもの、その他の要因によるものが混在しており、一つの要因で説明するのは無理である。

3.3 スペクトル変化に関する実験結果と式(21)による計算結果の比較

水深 30 cm の地点における各サブセットデータをフーリエ変換して求めた複素振幅 A_n を初期条件として式(21)により A_n の変化を計算してスペクトル値を求め、アンサンブル平均した後、3 個ずつ移動平均しスペクトル推定値とした。成分波の個数 N は 200 とした。式(21)の非線形連立微分方程式の数値計算に当たっては、Bulirsch-Stoer 法を用いた。

図-2 に、実験結果に加えて、式(21)による計算結

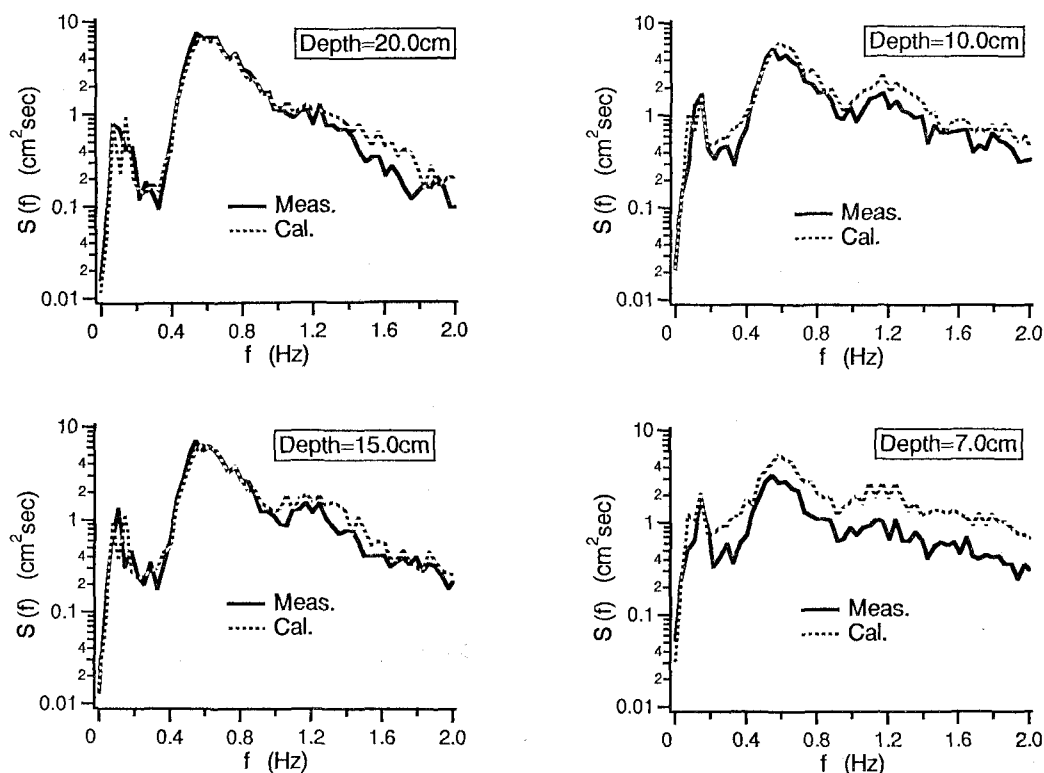


図-3 周波数領域における修正 KdV 方程式による計算結果 (点線) と実測結果 (実線)

果 (点線) をプロットしてある。計算結果は、実測結果と同様、水深が浅くなるにつれて 2 倍調和周波数周辺のエネルギー密度が増加する。計算結果の変化傾向は実測結果の傾向をよく表しているが、値自体は計算結果が大きい。これは、すべての成分波の浅水変形式として Green の式を用いていること、および砕波によるエネルギー減衰を考慮していないことによる。線形理論による計算結果は水深が浅くてもスペクトル形は相似形を保ったまま大きくなるだけで、ピーク周波数周辺のエネルギー密度の減少、高周波領域のエネルギー密度の増大は表せず、非線形項の重要性がわかる (間瀬ら, 1991)。

4. 周波数領域における修正 KdV 方程式

式 (21) における浅水変形項を次式に基づいて考察する。

$$\frac{dA_n}{dx} = -\frac{h_x}{4h} A_n \quad (22)$$

式 (22) を $x=0$ から x まで積分すると、

$$\frac{A_n(x)}{A_n(0)} = \left\{ \frac{h(x)}{h(0)} \right\}^{-1/4} \quad (23)$$

が得られる。これは Green の式であり、低周波成分の振幅算定に対しては妥当であるが、高周波成分に対しては振幅を過大に算定することになる。図-2 で、砕波が影

響しない領域においても、計算結果が実験結果より大きくなるのはこれが主な原因である。ここで、以下の式を考える。

$$\frac{dA_n}{dx} + \frac{(C_{gn})_x}{2C_{gn}} A_n = 0 \quad (23)$$

C_{gn} は次式で示される群速度である。

$$C_{gn} = \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{k_n} \left(1 + \frac{2k_n h}{\sinh 2k_n h} \right) \quad (24)$$

式 (23) を積分すると、

$$\frac{A_n(x)}{A_n(0)} = \left\{ \frac{C_{gn}(x)}{C_{gn}(0)} \right\}^{-1/2} \quad (25)$$

が得られる。これは微小振幅波理論の浅水変形式であり、長波領域では Green の式となる。すなわち、浅水変形を正しく表すには式 (23) がよい。

次に、分散項について考える。一定水深における線形波に対しては、式 (21) は次のようになる。

$$\frac{dA_n}{dx} - \frac{1}{6} i n^3 k_1^3 h^2 A_n = 0 \quad (26)$$

水位変動は

$$\zeta = \frac{1}{2} A_n e^{i(nk_1 x - n\omega_1 t)} + c.c. \quad (27)$$

で表される。ここで、

$$A_n = a_n e^{i\varphi_n} \quad (28)$$

と表す。ただし、 a_n は実数とする。式 (27) と (28) を

式 (26) に代入して、実数部と虚数部について整理した結果は次のようになる。

$$a_n = \text{constant} \dots\dots\dots (29)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{6} n^3 k_1^3 h^2 x \dots\dots\dots (30)$$

式 (28)～(30) を用いて式 (27) を書き直すと、

$$\zeta_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\{(nk_1 - \frac{1}{6} n^3 k_1^3 h^2)x - n\omega_1 t\}} + \text{c. c.} \dots\dots\dots (31)$$

が得られ、波速は次のようになる。

$$C_n = \frac{\omega_1}{k_1} \frac{1}{1 + (nk_1 h)^2/6} \dots\dots\dots (32)$$

ここで ω_1/k_1 は浅海長波の波速 $\sqrt{gh}$ であり、 nk_1 を改めて k とおくと、式 (32) は

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{1 + (kh)^2/6} \dots\dots\dots (33)$$

となる。微小振幅波理論の関係式は次のとおりである。

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh}} \dots\dots\dots (34)$$

式 (33) の関係式は $kh \leq 1.0$ では式 (34) の関係式の良い近似になっているが、 kh が大きくなると近似精度が悪くなる。分散項を以下にすると式 (34) の分散関係を表すことができる。

$$\frac{dA_n}{dx} - ink_1 \left(\sqrt{\frac{nk_1 h}{\tanh nk_1 h}} - 1 \right) A_n = 0 \dots\dots\dots (35)$$

以上のことから、式 (21) の浅水変形項を式 (23) におけるそれに置き換え、また式 (21) の分散項を式 (35) のそれに変えた次式の修正 KdV 方程式を提案する。

$$\frac{dA_n}{dx} + \frac{(C_{gn})_x}{2C_{gn}} A_n - ink_1 \left(\sqrt{\frac{nk_1 h}{\tanh nk_1 h}} - 1 \right) A_n$$

$$+ \frac{3ink_1}{8h} \left[\sum_{l=1}^{n-1} A_l A_{n-l} + 2 \sum_{l=1}^{N-n} A_l^* A_{n+l} \right] = 0; \\ n=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots (36)$$

式 (36) を用いた計算結果と実測結果を比較したものが図—3である。この図—3と図—2を比べると、修正式を用いた計算結果の方が実験結果に近づいているのがわかる。実験結果と計算結果の対応は水深が 10 cm まで良好であるが、 $h=10$ cm の地点では 1/10 最大波高、有義波高および平均波高が減少しエネルギーの減衰が生じているので、エネルギー減衰を考慮していない計算結果は実験結果より若干大きくなっている。これより水深が小さくなると理論モデルにエネルギー減衰項を導入しなければならない。

5. あとがき

砕波によるエネルギー減衰は振幅のみに影響するのか、あるいは位相にも影響するのかを今後詳細に検討し、エネルギー減衰項を理論式に導入するつもりである。

本研究は、京都大学後援会の助成による米国 Univ. of Delaware での研究の一部であり、ここに謝意を表する。

参 考 文 献

- Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 815-827.
- Freilich, M. H. and R. T. Guza (1984): Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves, Phil. Trans. Royal Soc. Lond., A311, pp. 1-41.
- 間瀬 肇・J. T. Kirby・栗林賢一 (1991): 不規則波浪の浅水変形に伴うスペクトル変化に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 34 号 B-2 (印刷中)。