

非定常緩勾配不規則波動方程式について

窪 泰浩*・小竹康夫**・磯部雅彦***・渡辺 晃****

1. 緒 言

港湾・海岸における波高分布の予測，海浜流の予測，構造物に作用する波力の算定，海浜変形の予測など港湾・海岸工学における種々の問題において，浅海域における波浪変形の正確な予測は不可欠である．浅海域における波浪変形で重要なものは，浅水変形，屈折，回折，反射，減衰，砕波であり，波浪の特性として重要なものに不規則性と非線形性（有限振幅性）がある．したがって，傾斜海浜上に構造物が設置されているような場合に波浪変形を予測するためには，不規則性と非線形性を考慮した上で，上述の変形現象を同時に解析する必要がある．現地における波浪の変形を考えると，不規則性の影響を取り入れることは特に重要である．それは，回折における遮蔽域への回り込みが主に方向分散性によって起こるものであったり，不規則性により波高分布が平滑化されたり，個々の波の砕波点がずれることにより砕波点付近の変化が平滑化されたり，方向分散性により屈折係数が減少したりするためであり，規則波と不規則波の計算結果を比較すると大きな差が生じることがある．

微小振幅の規則波の屈折や回折による変形の計算法については，これまで種々のものが提案されている．このうち，Berkhoff(1972)によって提案された緩勾配方程式は，屈折と回折の両方の効果を含む基礎方程式であり，それまでは便宜的に別個に取り扱われてきた2つの現象を同時に数値計算に取り入れることを可能にした．また，境界条件の取扱い易さや直感的な理解の容易さから，緩勾配方程式の未知数として線流量を追加し，水面変動と線流量に対する時間発展型の連立偏微分方程式とした非定常緩勾配方程式が，渡辺・丸山（1984）によって提案されている．渡辺・丸山のモデルには砕波減衰も含まれ，規則波の変形に関しては一般的な条件での計算が可能となっている．しかし，不規則波への拡張となると，渡辺ら(1988)で行ったように，岸沖1次元問題において

単一方向不規則波の変形計算を行うのが，計算アルゴリズムの複雑さや計算時間の点からみて限度であろう．したがって，多方向不規則波の平面的波浪場の計算には別の発想が必要となると思われる．

本研究の目的は，この問題を解決するため，入射された不規則波の屈折・回折・砕波変形を直接時系列的に計算するための基礎方程式を新たな考え方に基づいて導くことにある．また，方程式の有用性の検証の第一歩として，岸沖方向1次元変形問題を取り上げ，単一方向に進行する不規則波の浅水砕波変形の解析を試み，その結果を実験結果と比較する．

2. 基本的な考え方

(1) 基礎方程式の誘導

Berkhoff(1972)によって導かれた，緩勾配方程式は次式で表わされる．

$$\nabla(cc_g \nabla \hat{\eta}) + k^2 cc_g \hat{\eta} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに， c および c_g はそれぞれ波速および群速度， k は波数， ∇ は水平2方向の微分演算子であり， $\hat{\eta}$ は次式によって水面変動 η を与える複素水面変動振幅である．

$$\eta = \text{Re} \{ \hat{\eta} e^{-i\omega t} \} \dots\dots\dots (2)$$

上式中 i は虚数単位， ω は角周波数， t は時間を表わす．

不規則波の場合，水面変動を周波数の異なる無数の成分波 η_i の重ね合わせとして表せば，

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \dots\dots\dots (3)$$

となる．ここで成分波の複素水面変動振幅を $\hat{\eta}_i$ とすれば，

$$\eta_i = \text{Re} \{ \hat{\eta}_i e^{-i\omega_i t} \} \dots\dots\dots (4)$$

であり，屈折・回折による $\hat{\eta}_i$ の分布は式(1)と同様な次式によって計算される．

$$\nabla(c_i c_{gi} \nabla \hat{\eta}_i) + k_i^2 c_i c_{gi} \hat{\eta}_i = 0 \dots\dots\dots (5)$$

上式において， c_i ， c_{gi} ， k_i はすべて角周波数によって変化するため，異なる角周波数に対して，形式は同じであっても係数の値が異なるので，別々に解かなければならない．したがって，不規則波の計算を行うためには従来のように，まず規則波に分解し，それぞれの屈折・回折計算を行った上で，解を重ね合わせる必要がある．これは長い計算を必要とするばかりではなく，砕波減衰モデ

* 正 会 員 東京電力(株)
** 学生会員 東京大学大学院 土木工学専攻
*** 正 会 員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科
**** 正 会 員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

ルを組み込もうとすると困難が生じる。そこで、角周波数にかかわらず一定値をとる係数のみを含むように上式を変形する。

式(5)において i 番目の角周波数を代表角周波数 $\bar{\omega}$ と偏差 $\Delta\omega_i$ とに分け、

$$\omega_i = \bar{\omega} + \Delta\omega_i \quad \dots\dots\dots (6)$$

とにおいて、 k_i と $c_i c_{gi}$ を代表角周波数の周りに1次までテイラー展開すれば、

$$k_i = \bar{k} + \Delta k_i = \bar{k} + \frac{dk}{d\omega} \Delta\omega_i \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$c_i c_{gi} = \bar{c} \bar{c}_g + \Delta(c_i c_{gi}) = \bar{c} \bar{c}_g + \frac{d(cc_g)}{d\omega} \Delta\omega_i \quad \dots\dots\dots (8)$$

と書ける。したがって、式(5)は

$$\begin{aligned} & V(\bar{c} \bar{c}_g V \hat{\eta}_i) + V \left[\frac{d(cc_g)}{d\omega} V(\Delta\omega_i \hat{\eta}_i) \right] + \bar{k}^2 \bar{c} \bar{c}_g \hat{\eta}_i \\ & + \left(2\bar{k} \frac{dk}{d\omega} \bar{c} \bar{c}_g + \bar{k}^2 \frac{d(cc_g)}{d\omega} \right) (\Delta\omega_i \hat{\eta}_i) = 0 \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

のようになるが、ここで、 $\hat{\eta}_i$ を

$$\eta_i = \text{Re} \{ \hat{\eta}_i e^{-i\bar{\omega}t} \} \quad \dots\dots\dots (10)$$

のように定義すれば、次の関係式

$$\hat{\eta}_i = \hat{\eta}_i e^{-i\Delta\omega_i t} \quad \dots\dots\dots (11)$$

より

$$\Delta\omega_i \hat{\eta}_i = i \frac{\partial \hat{\eta}_i}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。これを式(9)に代入すると、

$$\begin{aligned} & V(\bar{c} \bar{c}_g V \hat{\eta}_i) + iV \left[\frac{d(cc_g)}{d\omega} V \left(\frac{\partial \hat{\eta}_i}{\partial t} \right) \right] + \bar{k}^2 \bar{c} \bar{c}_g \hat{\eta}_i \\ & + i \left(2\bar{k} \frac{dk}{d\omega} \bar{c} \bar{c}_g + \bar{k}^2 \frac{d(cc_g)}{d\omega} \right) \left(\frac{\partial \hat{\eta}_i}{\partial t} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

となり、これによって全ての係数が成分波の角周波数とは無関係に、代表角周波数のみによって決定されるようになった。式(13)中の2つの微分係数を実際に計算すると

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{\bar{c}_g} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(cc_g)}{d\omega} &= \frac{\bar{c}}{\bar{k}} \left[-2(1-\bar{n}) + \frac{1}{2\bar{n}}(2\bar{n}-1)\{1-(2\bar{n}-1) \right. \\ & \quad \left. \cdot \cosh 2\bar{k}d\} \right] \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

となるので、式(13)は

$$\begin{aligned} & V(\bar{\alpha} V \hat{\eta}_i) + iV \left[\bar{\beta} V \left(\frac{\partial \hat{\eta}_i}{\partial t} \right) \right] + \bar{k}^2 \bar{\alpha} \hat{\eta}_i + i\bar{\gamma} \frac{\partial \hat{\eta}_i}{\partial t} = 0 \\ & \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha} = \bar{c} \bar{c}_g \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \frac{\bar{c}}{\bar{k}} \left[-2(1-\bar{n}) + \frac{1}{2\bar{n}}(2\bar{n}-1)\{1-(2\bar{n}-1) \right. \\ & \quad \left. \cdot \cosh 2\bar{k}d\} \right] \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \bar{k} \bar{c} \left[2\bar{n} + \frac{1}{2\bar{n}}(2\bar{n}-1)\{1-(2\bar{n}-1) \cosh 2\bar{k}d\} \right] \\ & \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\bar{n} = 1/2(1+2\bar{k}d/\sinh 2\bar{k}d) \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。

式(16)における係数は周波数に無関係に一定値であるから、成分波を重ね合わせても成立ち、最終的には非定常緩勾配不規則波動方程式として次式を得る。

$$V(\bar{\alpha} V \hat{\eta}) + iV \left[\bar{\beta} V \left(\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} \right) \right] + \bar{k}^2 \bar{\alpha} \hat{\eta} + i\bar{\gamma} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

(2) 砕波減衰モデル

砕波などによるエネルギー減衰、つまり波高の変化は、緩勾配方程式に次式のようにエネルギー減衰項を組込むことによって評価が可能である。

$$V(cc_g V \hat{\eta}) + \bar{k}^2 cc_g(1+if_d)\hat{\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

この式から出発して、前節と同様な展開を行えば、エネルギー減衰項を含んだ非定常緩勾配不規則波動方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} & V(\bar{\alpha} V \hat{\eta}) + iV \left[\bar{\beta} V \left(\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} \right) \right] + \bar{k}^2 \bar{\alpha}(1+if_d)\hat{\eta} \\ & + i\bar{\gamma}(1+if_d)\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

不規則波の砕波変形に対する上式の適用は以下のように行う。従来のモデルで規則波の砕波変形を解析する際には、各地点の水面変動の時間波形を用いて砕波の判定や砕波減衰係数の評価を行ってきた。しかし、このモデルは水面変動の空間分布を微小な時間ステップごとに計算していくというものであるから、時々刻々の水面の空間波形が得られることになる。したがって、このモデルでは砕波の判定や砕波減衰係数の評価に空間波形を用いる方が便利であり、また、これは我々が実現象で観察するものと一致している。しかも、これにより不規則波の個別波ごとに砕波・非砕波を考慮することができるので、実現象に類似したシミュレーションモデルとなる。用いる波形の種類が異なっても、砕波に関する種々の実験定数は同じである。

まず、図-1のように岸から沖に向かってゼロダウンクロス法で個々の波を定義する。個々波の砕波点の決定には、磯部(1986)による近似式を用いる。いま、波頂位置での振幅 $|\eta|$ と水深 d との比を γ とすれば、

$$\gamma = |\eta|/d \quad \dots\dots\dots (24)$$

であり、この値が次式の砕波限界値 γ_b

$$\gamma_b = 0.8 \times \gamma'_b \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_b &= 0.53 - 0.3 \exp(-3\sqrt{d/L_0}) \\ &+ 5 \tan^{3/2} \beta \exp(-45(\sqrt{d/L_0} - 0.1)^2) \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

を越えたところで砕波が始まり、式(29)で表される再生限界値 γ_r 以下になると波が再生するものとする。このとき、個々の波について、その波が砕波しているものか否かを記憶しておく。ここに、 L_0 はピーク周波数など代表周波数に対する沖波波長、 $\tan \beta$ は海底勾配である。

なお、式(25)の係数0.8は不規則波が規則波よりも砕波しやすいことを考慮したものである。

次に、砕波が始まってからの波頂位置での砕波減衰係数 f_{Dmax} は次式で与え、図-1 のように個々の波の f_{Dmax} を線形補間し、砕波減衰係数 f_D を求め、次の時間ステップまでこの f_D を用いて計算を進める。ここに、 k_0 は代表周波数に対する沖波波数である。

$$f_{Dmax} = \frac{5}{2} \tan \beta \sqrt{\frac{1}{k_0 d}} \sqrt{\frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_s - \gamma_r}} \dots\dots\dots (27)$$

$$\gamma_s = 0.4 \times (0.57 + 5.3 \tan \beta) \dots\dots\dots (28)$$

$$\gamma_r = 0.135 \dots\dots\dots (29)$$

以下同様の手順で計算を進める。

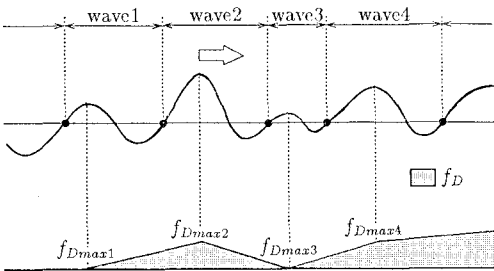


図-1 砕波モデルの概要

(3) 境界条件

自由透過型境界においては、大山ら(1990)が行ったように、外向きの波をエネルギー的に吸収する方法を用いる。すなわち、境界に沿って、式(23)におけるエネルギー減衰係数 f_D を外側に向かって徐々に増加させたエネルギー吸収帯を設け、外向きの波のエネルギーを吸収する。沖側の境界条件は、与えられた入射波が計算領域内に入射されるとともに、計算領域からの反射波が自由に領域外に出るというものでなければならない。このため、与えられた入射波の成分を $\bar{\eta}_{in}$ とすれば、境界内からの反射波成分 $\bar{\eta}_{out}$

$$\bar{\eta}_{out} = \bar{\eta} - \bar{\eta}_{in} \dots\dots\dots (30)$$

について、自由透過型境界条件を適用する。したがって、上式で定義される $\bar{\eta}_{out}$ を式(23)の $\bar{\eta}$ の代わりに代入し、上式の右辺に含まれる $\bar{\eta}$ について改めて整理すれば、

$$\begin{aligned} & F(\alpha F \bar{\eta}) + iF \left[\beta F \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \right) \right] + \bar{k}^2 \alpha (1 + i f_D) \bar{\eta} \\ & + i\bar{\gamma} (1 + i f_D) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = F(\alpha F \bar{\eta}_{in}) + iF \left[\beta F \left(\frac{\partial \bar{\eta}_{in}}{\partial t} \right) \right] \\ & + \bar{k}^2 \alpha (1 + i f_D) \bar{\eta}_{in} + i\bar{\gamma} (1 + i f_D) \frac{\partial \bar{\eta}_{in}}{\partial t} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

となる。式(31)において $\bar{\eta}_{in}$ は与えられるから、境界でのエネルギー吸収帯においても $\bar{\eta}$ が未知関数となり、右辺が入射波による強制外力項のような意味をもつ。

(4) 数値計算の方法

式(23)は時間に関する1階微分のみを含んでいるので、初期条件と境界条件を与えれば時間を追って解を求めることができる。初期条件としては静水状態を与えればよい。計算では差分法を用いることにし、精度の面から Crank-Nicholson 法を採用する。その場合、各時間ステップでのマトリックスは3項対角となるので高速に解を求めることができる。

図-2、図-3 は周期のわずかに異なる2波の合成波の伝播をそれぞれ深海条件と、長波条件の下で計算したものである。成分波の角周波数は平均角周波数 $\bar{\omega}$ に対して0.9 $\bar{\omega}$ と1.1 $\bar{\omega}$ とした。図の左側が沖側で、合成波の伝播の様子を上段から下段に向かって平均周期の1/2の間隔で時系列的に示している。なお、横軸は平均周期に対する波長で無次元化している。図-2 では群速度は位相速度の1/2であり、図-3 では群速度と位相速度は等しくなっており、周波数による分散性の効果を適切に評価できている。

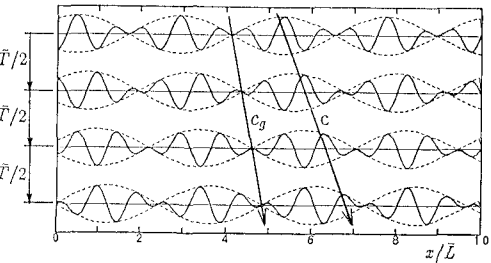


図-2 2成分波の伝播 (深海条件)

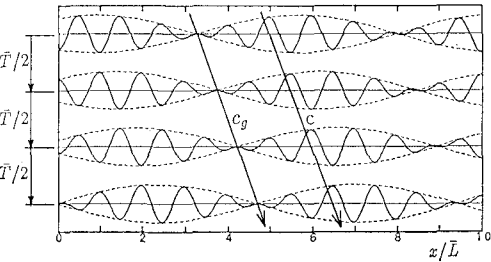


図-3 2成分波の伝播 (長波条件)

非定常緩勾配不規則波動方程式は、緩勾配方程式中の cc_g および $k^2 cc_g$ の各係数を、例えば図-4 のように代表角周波数 $\bar{\omega}$ での接線で近似することによって得られた式である。図中の Ω は式(32)で表される無次元角周波数である。

$$\Omega = \omega \sqrt{d/g} \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 ω は角周波数、 d は水深、 g は重力加速度である。 cc_g および $k^2 cc_g$ の各係数の近似精度は、代表角周波

数からの偏差の度合と水深によって異なることになる。

図-5, 図-6 は, 角周波数 ω_i の規則波の浅水変形計算結果と解析解(実線)との比較を行ったものであり, 深海波高に対する相対波高 H/H_0 と, 深海波長に対する相対水深 d/L_0 との関係で示したものである。計算は ω_i を一定として, 代表角周波数 $\bar{\omega}$ との比を $\omega_i/\bar{\omega}=0.7, 1.0, 1.3$ と変えて行った。図-5 は $d/L_0=0.5$ の深海から汀線付近までの計算結果であり, 図-6 は $d/L_0=0.2$ からの計算結果である。この結果から, 近似精度は角周波数の偏差と相対水深 d/L_0 によって決まり, 角周波数の偏差が同じであっても, 相対水深によって各係数の近似精度が変わるために, 計算領域が変われば計算精度も変化することが分かった。特に, $\omega_i/\bar{\omega}=1.3$ の場合, 図-5 では $d/L_0=0.1$ の前後で誤差が10%以上に達するのに対し, 図-6 では5%程度と小さくなる。

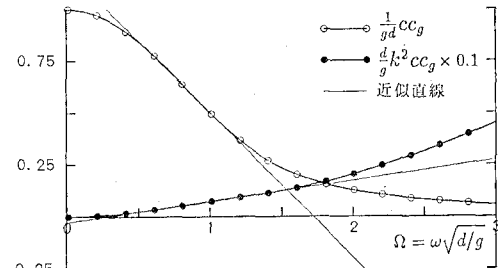


図-4 各係数の近似精度

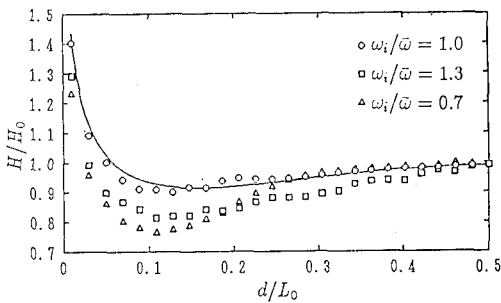


図-5 近似誤差が浅水変形計算に及ぼす影響

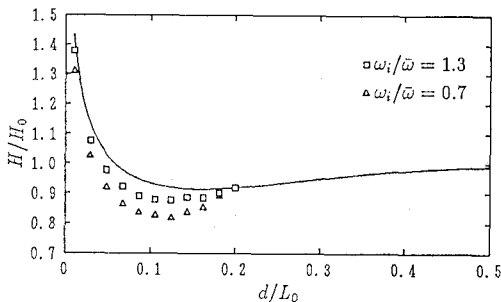


図-6 近似誤差が浅水変形計算に及ぼす影響

3. 計算結果と実験結果との比較

(1) 検証実験と計算条件

モデルの適用性を調べるために, 斜面上の波の変形について計算結果と実験結果の比較を行った。検討には, 渡辺ら(1988)が単一方向不規則波の浅水砕波変形を測定したものをを用いた。実験には, 2次元造波水槽(延長23m, 幅0.8m, 高さ1.04m)を用いている。一樣水深部の水深は40cm, 斜面勾配は1/30で, その沖側1m区間は1/10勾配である。実験に用いている3種の入射波のピーク周波数と有義波高は, case 1が0.5 Hzと5.4 cm, case 2が0.75 Hzと7.0 cm, case 3が0.75 Hzと9.2 cmである。25 cm または 50 cm 間隔で配置した測点ごとに, 容量式波高計で水面変動を測定している。データの記録時間間隔は0.02 s, 記録長は200 sである。

数値計算における格子間隔 Δx は10 cm, 時間間隔 Δt は0.02 sとした。入射波形は沖側の波形データをFFTにより周波数成分に分解し, そのうちピーク周波数 f_p に対して $0.25 f_p \sim 2.5 f_p$ の成分波のみを抽出し, 再合成して作成した。

(2) 波高の岸沖分布

水面変動 η の実測値と計算値より各点ごとの有義波高 $H_{1/3}$ と η の2乗平均平方根 η_{rms} を求め, 各ケースに対する岸沖分布の形で表示したのが図-7~9である。図で $x=0$ cm は斜面沖側端の位置, $x=1000$ cm が静水時汀線位置である。計算における沖側入射境界は $x=-40$ cm に位置する。

$H_{1/3}$ の分布についてみると, 3ケース共に砕波点付近で計算値は実験値よりも下まわっている。これは, 非定常緩勾配不規則波動方程式では有限振幅性による波峰の尖鋭化が再現できないためである。一方 η_{rms} については, 砕波帯内外共に計算値と実測値の一致度は良好である。 η_{rms} がポテンシャルエネルギーの平方根に比例することからすれば, 本モデルは砕波による不規則波のエネルギー減衰をもよく表現しているといえる。

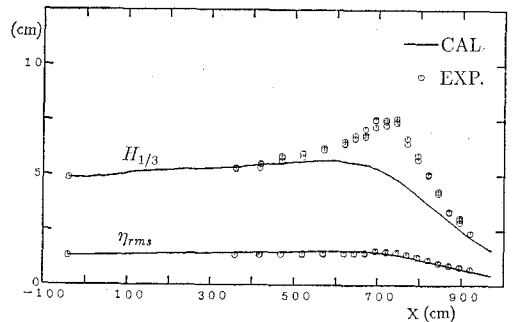
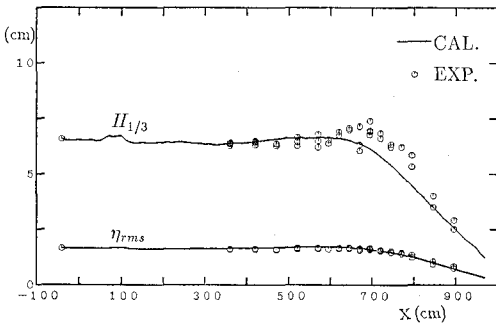
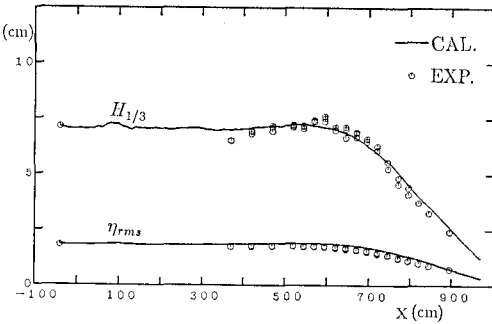
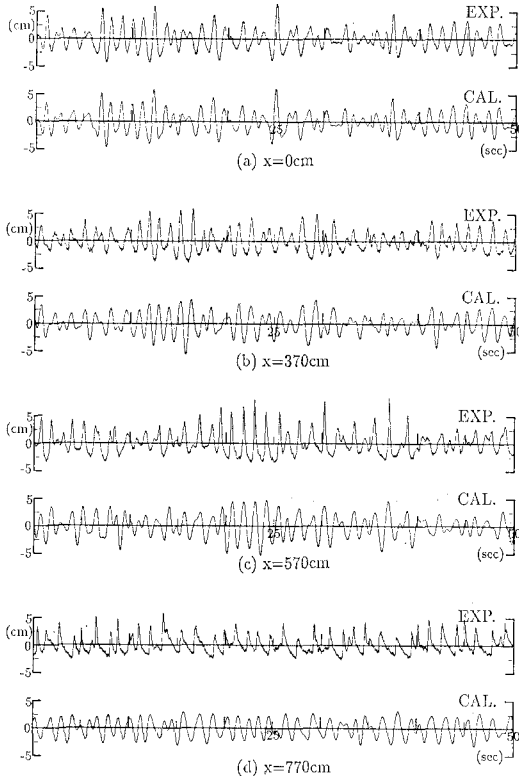


図-7 $H_{1/3}$ と η_{rms} の岸沖分布 (case 1)

図-8 $H_{1/3}$ と η_{rms} の岸沖分布 (case 2)図-9 $H_{1/3}$ と η_{rms} の岸沖分布 (case 3)図-10 水面変動 η の時間波形 (case 3)

(3) 水面変動の時間波形

case 3 の実験と計算における水面変動の時間波形を、4点について図-10に示す。(a)は沖側境界点の η で、計算波形はこの点での実測波形を前述の周波数成分で近似したものである。(b)は砕波帯外、(c)は平均的な砕波点の近傍、(d)は砕波点と汀線の間付近に相当する。計算は微小振幅波理論に基づくため、砕波点近傍から砕波帯内にかけて顕著となる波峰の尖鋭化や波形の前傾化等は表現できないが、相対的な波高の大小の連なり等の波群としての特徴はかなりよく表現されている。

4. 結 論

不規則波の屈折・回折・砕波変形を時系列的に数値シミュレーションするため、非定常緩勾配不規則波動方程式を導いた。これは、緩勾配方程式に時間項を導入する代わりに、含まれる係数値を周波数と無関係なものにしたものである。これにより各成分波の解を求めてからそれらを重ね合わせる必要がなくなり、不規則波形を直接時系列的に求めることが可能になる。

方程式の有用性の検証の第一歩として、この研究では岸沖方向1次元変形問題、すなわち単一方向不規則波の浅水砕波変形について数値計算結果と実験結果との比較を行った。その結果、方程式が微小振幅波理論に基づくものであるため、有限振幅性による波峰の尖鋭化や波形の前傾等は表現できないが、より強い非線形現象である砕波変形に対して、水面変動の r. m. s. 値の岸沖分布をかなり精度よく求めることが可能であることがわかった。今後、さらに平面問題への適用性の検討を進めて行くことにより、最終的に線形波動水槽と呼べるような不規則波の変形の数値シミュレーションモデルができるものと期待される。

参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1986): 放物型方程式を用いた不規則波の屈折・回折砕波変形の計算法, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 134-138.
- 大山 巧・灘岡和夫 (1990): 数値波動水槽における開境界処理のための数値消波フィルターの開発, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 16-20.
- 渡辺 晃・丸山康樹 (1984): 屈折・回折・砕波減衰を含む波浪場の数値解析法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 103-107.
- 渡辺 晃・磯部雅彦・泉宮尊司・中野英樹 (1988): 非定常緩勾配方程式による不規則波の浅水変形の解析, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 173-177.
- Berkhoff, J. C. W. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 471-490.