

吹き出し分布法による非線形波動場の発生と開境界処理

中 村 孝 明*・田 中 良 弘**

1. 結 言

近年、境界要素法による波動場の非線形性を考慮した時刻歴計算がさかんに研究されている。しかし、係留浮体などの運動する物体を含んだ実用的な計算は、ほとんど行なわれていない。その中、Vinje・Brevig (1980) らは、Euler/Lagrange 表記法を用い、浮体の有限振幅運動をふまえた波浪中揺動問題を扱った。しかし対象とする物体は Small body で、物体からの反射波が予想される Large body を扱うことはできない。これは開境界処理法が未解決のまま残されていることによる。開境界処理法として、Orlanski Condition や減衰機能を持たせる方法があり、非線形波動場への拡張も進んでいる。しかし、自由表面の水粒子運動を Lagrange 的表記法により追跡する方法での開境界処理は、これまで検討された例はない。更に、実用的観点で浮遊構造物の波浪応答問題への拡張を考えた場合、構造物からの反射波側すなわち造波側での反射波の処理も解決する必要がある。本研究の目的は浮遊構造物の係留解析において、構造物の有限振幅運動を含めた非線形性を総括的に扱うことのできる数値解析法の確立にある。本論文では特に、著者らの提案 (1990) する Source Line による造波方法と、開境界処理法について Euler/Lagrange 表記による非線形波動場への拡張を行ない、その妥当性について明らかにしている。

2. 解析理論

2.1 解析手法の背景と基本条件

自由表面の非線形境界条件を考慮した境界要素法による時刻歴計算では、自由表面上の N. P. (nodal points) の運動において二つの方法に分類できる。一つは Nakayama (1983), 大山 (1985), Brorsen・Larsen (1987) らによる上下の水位変動に着目し、N. P. を移動させる方法と、Longuet-Higgins・Cokelet (1976), Dold・Peregrine (1984), 中山 (1989) らが提案した水粒子運動に着目する方法とがある。係留浮体等の有限振幅運動を想定した解析では後者

を選択する必要がある。この場合、自由表面との整合性から、開境界上の N. P. も水粒子運動と一致した運動をさせなければならない。しかし、非線形計算では質量輸送を伴うことから、自由表面付近と海底面付近では質量輸送量に差が生じ、双方の N. P. は時間と共に離れることが予想される。結果的に長時間の計算は困難になる。即ち、N. P. は、運動する物体近傍では水粒子を追跡し、開境界上では鉛直方向のみの運動に限定することが望ましい。そこで、N. P. の運動を、水粒子と共に運動する区間と、上下の水位変動と共に運動する区間とに分ける。流体領域を図-1 のように定義する。図中 $\beta=0$ の区間では N. P. は y 方向のみ運動し、 $\beta=1$ の区間では x, y 方向へ水粒子と共に運動する。 $\beta=0\sim 1$ の区間は双方の区間での不連続性を回避する目的から漸近区間とした。図-1 において、右側の開境界は水粒子と共に運動し、左側の開境界は y 方向のみの運動となる。

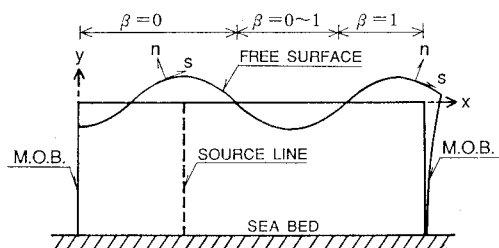


図-1 流体領域の定義

領域内に Source が存在するので、速度ポテンシャルは Poisson 方程式を満足する必要がある。

$$\nabla^2 \phi = q \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 q は単位面積当たりの Volume Flux を示し、流速場を $[u, v] = \nabla \phi$ と定義する。Green の第 2 公式より以下の境界積分方程式を導くことができる。

$$\alpha \phi(P) = \int_S [\phi(Q) G_n - \phi_n(Q)] dS + \int_V q G dV \dots \dots \dots (2)$$

ここで α は、境界上の点 P における内角、 n は外向き法線方向を表わし、 $\phi_n(Q)$, G_n を、 n に関する偏微分と

* 正会員 (株) 篠塚研究所 研究員
** 正会員 Ph. D (株) 篠塚研究所 主席研究員

定義する。また G はグリーン関数で、一定水深の水底条件を満足する。Source の強度は、入射波高 ζ_0 の 2 次 Stokes 波より計算する。(2) 式を離散化する際、 ϕ , ϕ_n は要素内で 1 次関数で近似されるものとする。

2.2 Nodal Points の運動記述方法

自由表面境界及び開境界上における水粒子の座標を、 ξ , η で表わし、次の様に置く。

$$\xi(y, t) = x \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\eta(x, t) = y \quad \dots\dots\dots (4)$$

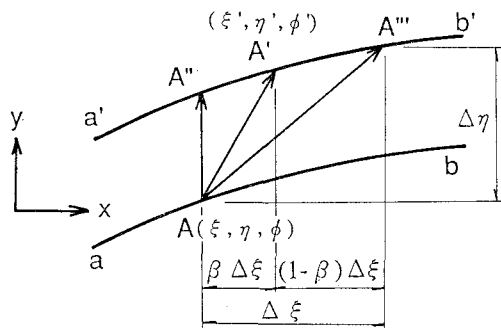


図-2 Nodal Point の運動

図-2 に示す様に、 t 時刻での自由表面 $a-b$ が $t+\Delta t$ 時刻に $a'-b'$ へ移動したとする。この時、 $a-b$ 上の任意の点 A は、 Δt 時間後、水粒子と共に運動する場合は A''' へ移動し、上下の水位変動と共に運動する場合は A から A'' へ移動する。ここでは、 A が Δt 時間後 A'' と A''' の間の点 A' へ移動することを考える。この時、速度ポテンシャル ϕ も ϕ' に変化するものとする。図中 $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ は、水粒子の移動量を表わす。なお、 t 時刻での $a-b$ 上の速度ポテンシャルはすべて既知と考える。 β 値は 0 から 1 までの値を取り、 A 点の水平方向移動量を制御するパラメータである。

Lagrange 式記述により、運動を伴い変化する物理量を時間を追って追跡する。 $D(\)/Dt$ を Lagrange 微分と定義すると、図-2 において、 A から A' へ水粒子の移動を考えた場合、微分は次の様に表わすことができる。

$$\begin{aligned} \frac{D(\)}{Dt} &= \frac{\partial(\)}{\partial t} + \beta u \frac{\partial(\)}{\partial x} \\ &\quad + \{v + (\beta - 1)u\eta_x\} \frac{\partial(\)}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここで、 u , v は A 点での x , y 方向の流速で、 η_x は点における $a-b$ の傾きである。(5) 式において、 $\beta=1$ の時 A''' への移動を意味し、 $\beta=0$ の時 A'' への移動を意味する。 ξ , η , ϕ について、2 次オーダーまでの Taylor 展開を考えると、

$$\xi' = \xi + \Delta t \frac{D\xi}{Dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{D^2\xi}{Dt^2} + \dots\dots\dots (6)$$

$$\eta' = \eta + \Delta t \frac{D\eta}{Dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{D^2\eta}{Dt^2} + \dots\dots\dots (7)$$

$$\phi' = \phi + \Delta t \frac{D\phi}{Dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{D^2\phi}{Dt^2} + \dots\dots\dots (8)$$

(3), (4) 式を微分すると、

$$\frac{D\xi}{Dt} = \beta u \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = v + (\beta - 1)u\eta_x \quad \dots\dots\dots (10)$$

更に ϕ については次の様に表わされる。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \phi_t + \frac{D\xi}{Dt}u + \frac{D\eta}{Dt}v \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで自由表面の力学的境界条件を用いる。

$$\phi_t + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + g\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 g は重力加速度を表わす。

(11) 式は、(12) 式と速度場の定義を用いると、次の様に表わされる。

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - g\eta + \frac{D\xi}{Dt}u + \frac{D\eta}{Dt}v \quad \dots\dots\dots (13)$$

(9), (10), (13) 式により、Taylor 展開の 1 次の項まで求められる。これらの式を更に微分して、Taylor 展開の 2 次の項は以下の様に求められる。

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2} = \beta \frac{Du}{Dt} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{D^2\eta}{Dt^2} = \frac{Dv}{Dt} + (\beta - 1) \left\{ \frac{Du}{Dt}\eta_x + u \frac{D\eta_x}{Dt} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{D^2\phi}{Dt^2} &= \left(\frac{D\xi}{Dt} - u \right) \frac{Du}{Dt} + \left(\frac{D\eta}{Dt} - v \right) \frac{Dv}{Dt} \\ &\quad - g \frac{D\eta}{Dt} + u \frac{D^2\xi}{Dt^2} + v \frac{D^2\eta}{Dt^2} \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{Du}{Dt} = u_t + \beta uu_x + \{v + (\beta - 1)u\eta_x\}u_y \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = v_t + \beta vv_x + \{v + (\beta - 1)u\eta_x\}v_y \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{D\eta_x}{Dt} = v_x - u_x\eta_x + (\beta - 1)u\eta_{xx} \quad \dots\dots\dots (19)$$

(9), (10), (13), と (14)~(16) 式を (6)~(8) 式に代入することで Δt 時間後の A' 点の位置及び速度ポテンシャルが求められる。この作業を順次くり返すことで、非線形性を考慮した波動場の計算が可能となる。 u , v , u_t , v_t 等の計算は境界積分方程式を解くことで求められるが、その計算過程は中山 (1989) により説明されている。

2.3 開境界処理の方法

非線形問題における開境界処理では、質量輸送も含めた波の逸散を考える必要がある。開境界処理について

は、減衰機能を持たせる方法が Larsen・Dancy (1983), 大山・灘岡(1990)らにより考案されている。しかし、これらの方法では、質量輸送も含めた波の逸散が行なわれているか確かめられていない。Oralski Condition は、非線形の波についても適用されることから質量輸送も含めた波の逸散が可能と考えられる。Oralski Condition は、以下の様に表わされる。

$$\phi_x = -(1/C)\phi_t \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで C は波速を表わし、一般的には開境界上で未知数であり数値的に求める必要がある。著者らの方法は、自由表面上の物理量より予測するもので、(20) 式は、(12) 式より次の様になる。

$$C = \frac{(u^2 + v^2)/2 + g\eta}{u} \quad \dots\dots\dots (21)$$

(21) 式中の u, v, η は開境界近傍の自由表面上の値を用いる。開境界の N.P. の運動については、自由表面と同様に ξ, η で表わし (5) 式の微分を用いる。 ϕ の微分は (11) 式に (20) 式を代入することで求められる。

$$\frac{D\phi}{Dt} = -Cu + \frac{Du}{Dt}u + \frac{D\eta}{Dt}v \quad \dots\dots\dots (22)$$

更に 2 回微分は

$$\begin{aligned} \frac{D^2\phi}{Dt^2} = & -C \frac{Du}{Dt} + \frac{D^2\xi}{Dt^2}u + \frac{D\xi}{Dt} \frac{Du}{Dt} \\ & + \frac{D^2\eta}{Dt^2}v + \frac{D\eta}{Dt} \frac{Dv}{Dt} \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

(22), (23) 式を (8) 式に代入することで、 Δt 時間後の開境界上の速度ポテンシャルが求められる。ここで (5) 式中の η_x は自由表面と開境界との交点の値を用いる。

開境界上の N.P. は $\beta=1$ の場合その点の水粒子運動を追跡し、 $\beta=0$ の場合自由表面と開境界との交点の鉛直運動に連動した上下運動となり、N.P. 相互の距離が離れすぎたり接近しすぎることはない。従って、ここに示す開境界は、Moving Open Boundary (M.O.B.) と言える。

3. 数値計算

3.1 Source Line における反射波の透過

Source Line による造波と反射波の透過について検討する。水深 1.0 m, 長さ 12.0 m の水槽を想定し、左端に完全反射境界、右端に M.O.B. を設ける。入射波は波高 $H=0.05$ m, 周期 $T=1.5$ s とし、離散化は一波長を 20 等分とし $\Delta t=0.025$ s とした。M.O.B. での波速は解析的に求められる一定値 Co を用いる。又、 $\beta=1$ とし、開境界上の各々の N.P. は水粒子運動を追跡する。計算開始より 15 s から 16.5 s における 0.15 s ごとの水面形状を図-3 に示す。Source Line より左側では Standing Wave になっているが右側では波が進行している。これより、Source Line より発生した波が不透過壁で反射し、

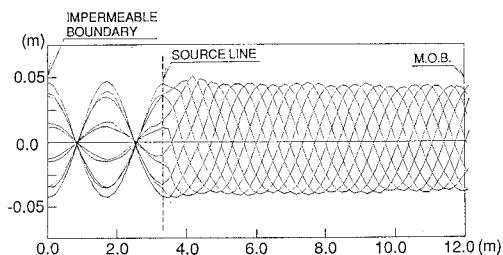


図-3 左端完全反射の水面形状

Source Line を通過し M.O.B. から逸散していることがわかる。

3.2 パラメータ β 値による水面形状への影響

水槽の長さを 13.4 m とし、左右端に M.O.B. を設け中央点より Source を発生させる。入射波、離散化等の条件は前述と同じとする。水面形状を図-4 に示す。 β 値は同図に示した様に変化させた。左右の水面形状はまったく一致しており、 β 値を変動させることによる水面形状への影響はない。図-5 に β 値が 0.2, 0.5, 1.0 の自由表面上の N.P. の運動軌跡を示す。結果は定常状態に至った段階での 3 周期間で、縦、横軸共に入射波振幅で無次元化している。水平方向にはパラメータ β 値によって制限された運動となっているが、鉛直方向には水面の上下運動を追跡している。これにより、自由表面の N.P. の水平運動を必要区間に応じ、制御することが可能となり、浮体等の有限振幅運動を考慮した波浪中動揺問題を扱う際の要素技術の一端となる。

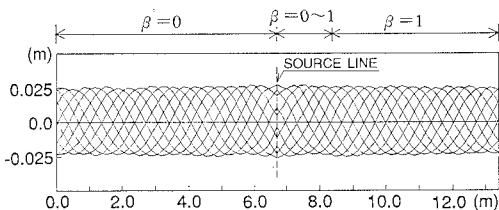


図-4 パラメータ β 値による水面形状への影響

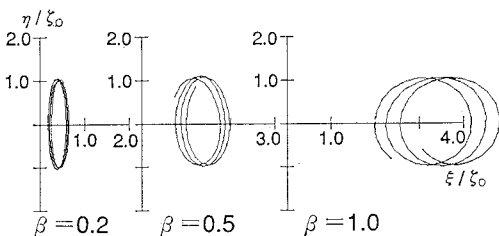


図-5 パラメータ β 値による N.P. の運動軌跡

3.3 開境界処理の検討

a) 波速計算点による検討

水槽長を 13.4 m とし、左右端に M.O.B. を設け、左端では一定波速 C_0 を用い、右端のみ変動波速とし、波速計算点の違いによる反射波の有無を検討する。Source line は左端より 1 波長の位置に設置し、入射波、離散化等の条件は前述と同じとする。また、 $\beta=0$ で行なう。検討は M.O.B. 上 (Case 3) と 1 要素手前の N.P. (Case 2) で波速を計算する。その際、計算波速は長波の波速を上限とする。水面形状を図-6 に示す。比較のため、一定波速 C_0 を用いた場合を Case 1 に示す。それぞれ計算開始より 15.0 s から 16.5 s について 0.075 s ごとの水面形状である。図-7 に計算波速の時系列を示す。図中破線は、2 次の Stokes 波により求めた一定波速 C_0 である。

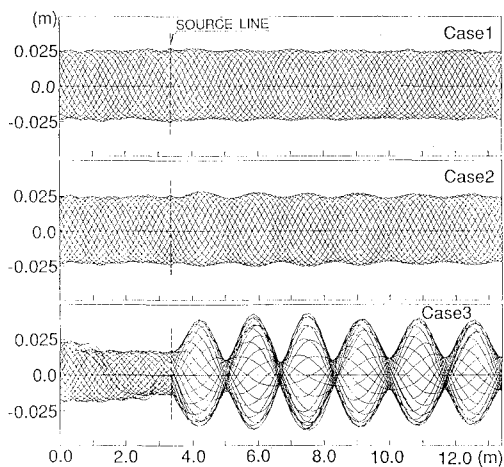


図-6 波速計算点による水面形状への影響

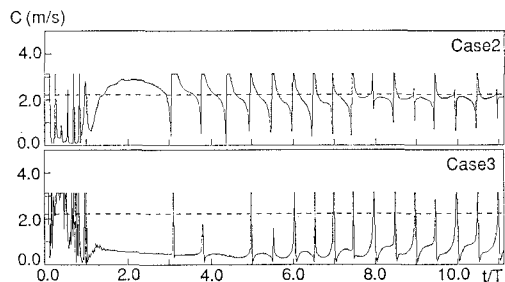


図-7 波速計算点による計算波速への影響

Case 3 では計算波速は著しく小さく、水面形状からも反射波が現われているのが分かる。水面形状、計算波速共に、著者ら (1990) による線形計算結果と類似している。この問題について著者らは、二つの異なる境界条件を持つ特異点であることから波速計算点としては不適切

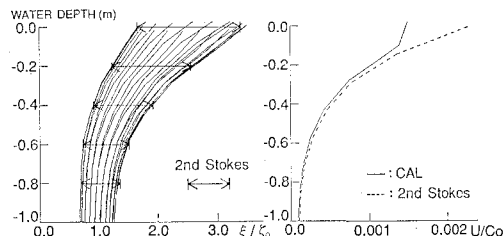
であると考えた。非線形波動場においても同様の理由と考えられる。Case 2 では、定常状態での計算波速は周期的ではあるが不安定で C_0 に比べ多少小さい。水面形状からも若干の反射波の存在が認められ、その値は、反射率にして 6% 程度である。Case 1 においても水面形状に多少の変動が見られ、反射率としては 2% 程度である。Case 1. 及び Case 2 のいずれの場合も、線形計算の場合よりも若干大きな反射率を示すが、実用上の計算においては、それ程問題にならないと考えられる。

これらの検討より、変動波速として Oranski Condition を用いる場合の波速計算点としては、著者ら (1990) の線形計算の場合と同様に、M.O.B. より 1 要素手前の自由表面上の N.P. が最も安定している。

b) 質量輸送の検討

M.O.B. 上での水粒子運動を Stokes 波と比較し、開境界での本計算スキームの妥当性について検討する。水槽、計算条件は前述 Case 1 と同じで $\beta=1$ とする。

図-8 (a) に定常状態に至った段階での 1 周期間の M.O.B. の運動軌跡を示す。横軸は水平運動を入射波振幅で無次元化している。同図に 2 次の Stokes 波の水粒子の運動振幅を矢印で比較する。両者は良好な一致を示している。図-8 (b) には定常状態に至った段階での 1 周期間の平均質量輸送速度 U を示す。横軸は質量輸送速度を一定波速 C_0 で無次元化している。破線は 2 次の Stokes 波から得られる質量輸送速度分布である。自由表面と M.O.B. との交点では、他点と比べ本計算値が小さく、連続性に欠ける。これは、この交点が異なる二つの境界条件を有する特異点であることによるものと考えられる。交点以外の M.O.B. 上の N.P. では、開境界としての条件だけが課せられており、解析解との一致は良好である。これにより、開境界処理としての M.O.B. は、質量輸送も含め波の逸散が可能であることが分かる。



(a) M.O.B. の運動軌跡

(b) 平均質量輸送速度

図-8 M.O.B. の水粒子運動

c) 不規則波の検討

長さ 20 m と 30 m の二つの水槽を用意し、それぞれ同じ条件の 2 成分波を発生させ、水面形状等から M.O.B.

の不規則波の逸散状況について検討する。波周期は $T_1 = 2.4$ s, $T_2 = 1.5$ s で波高は $H_1 = H_2 = 0.05$ m とし $\Delta x = 0.28$, $\Delta t = 0.024$ s とする。波速計算は M. O. B. より 1 要素手前の N. P. で行ない T_1 の波速 C_1 を上限, T_2 の波速 C_2 を下限とする。図-9 に計算開始より 21.6 s から 24.0 s まで 0.12 s ごとの水面形状を示す。双方の水面形状は良く合っており、反射波は極めて小さい。更に詳しく調べるため、20 m 水槽の計算波速とその点の水位変動の時刻歴と、30 m 水槽の同じ位置の計算波速とその点の水位変動を図-10 に比較する。計算波速は、違いはあるものの水位が Still Level を Cross するタイミングは一致している。また、時刻歴の水位変動は、良好な一致を示している。以上より、不規則波の波速の計算方法としては、不規則波を構成する成分波の最大波速と最小波速より、上限と下限を設定する方法が、最も有効な開境界処理であることが分かる。

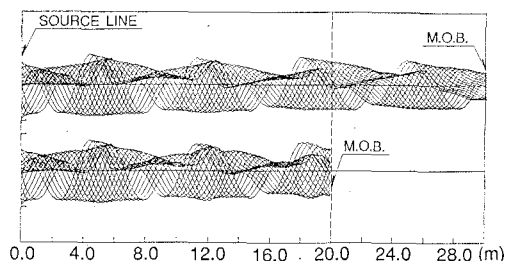


図-9 2成分波の水面形状

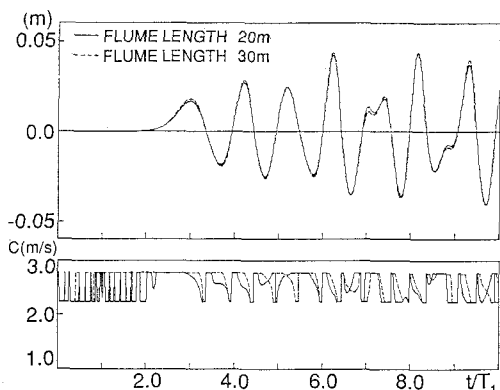


図-10 2成分波の水位変動と計算波速

4. 結 論

Euler/Lagrange 表記法による非線形波動場において Source Line による造波と、開境界処理法の提案を行な

い、種々の検討の結果、次の結論を得た。

- 1) Source Line による非線形波動場の造波方法によれば、構造物等からの反射波を、Source Line で透過することができ、係留浮体の応答計算に有効である。
- 2) 非線形波動場における有限振幅運動する浮体の応答計算において、パラメータ β 値の導入は重要な意味を持つ。 β 値を変化させても、安定した非線形波動場の計算が可能である。
- 3) 提案した M. O. B. (Moving Open Boundary) は、質量輸送も含めた波の散逸ができる。
- 4) 不規則波の場合、M. O. B. の波速は、M. O. B. から 1 要素手前の自由表面上の N. P. における物理量より計算する。その際、不規則波を構成する成分波の最大の波速と最小の波速より、波速の上限と下限を設ける方が、波を有効的に散逸することができる。

今後、実用的な計算法への拡張として、波形勾配の大きい波や多数の成分波からなる不規則波について検討を重ね、本計算法の有効範囲や適用限界について明らかにする必要がある。また、係留浮体を含めた計算手法の確立も課題である。

参 考 文 献

- 大山 巧(1985): 境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 555-559.
- 大山 巧, 灘岡和夫(1990): 数値波動水槽における開境界処理のための数値消波フィルターの開発, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 16-20.
- 田中良弘, 中村孝明(1990): 吹き出し分布法による波動場の発生と開境界処理, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 11-15.
- 中山 司(1989): 自由表面を有する流体の非定常運動の境界要素解析, 日本機械学会, No. 890-2, シンポジウム講演論文集, pp. 65-68.
- Brorsen, M. and J. Larsen(1987): Source Generation of Nonlinear Gravity Waves with the Boundary Integral Method, Coastal Eng., No. 11, pp. 93-113.
- Dold, J. W., and Peregrine, D. H. (1984): Steep Unsteady Water Waves. An Efficient Computational Scheme, Coastal Eng., No. 8, pp. 955-967.
- Larsen, J. and Dancy, H. (1983): Open Boundaries in Short Wave Simulations-A new approach, Coastal Eng., No. 7, pp. 285-297.
- Longuet-Higgins, M. S. and E. D. Cokelet(1976): The deformation of steep surface waves on water I. A numerical method of computation, Proc. R. Soc. Lond., A. 350, pp. 1-26.
- Nakayama, T. (1983): Boundary Element Analysis of Nonlinear water wave Problems, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19, pp. 953-970.
- Vinje, T. and Brevig, P. (1980): Nonlinear two-dimensional shipmotion, SIS Report, Norwegian Institute of Technology., pp. 92.