

DEM 法と MAC 法の併用による粒子群の 沈降分散挙動のシミュレーション

小田一紀*・重松孝昌**・氏本浩介***

1. はじめに

バージ船等から水中に投下された土砂の沈降・分散挙動や水底における堆積過程に関する研究は従来より数多く行われている。小川ら(1969)はバージ船から投棄される土砂の水中落下挙動および水底における分散挙動をモデル化して解析しており、実験値と比較してその妥当性を検討している。武藤ら(1974)はフルード則を適用した模型実験よりバージ船から投棄された土砂群の堆積形状に及ぼす諸因子について詳細な検討を行っており、土砂の堆積形状が投下水深によって変化することを確認している。また室田ら(1988)は、土砂群の落下時にみられる土砂と水の混相流体塊の運動を観察し、それらの落下挙動を投入土砂の粒径や投入量などによって分類することができるとしている。

しかしこれらの実験的研究には、周囲流体と土砂粒子の相互干渉等の影響を含んだ実験定数が導入されており、水中を沈降する粒子群の挙動を詳細に予測するところまでに至っていない。

堀江(1983)は上述の実験的研究に対して、土砂の沈降分散挙動が密度流的な現象に支配されているという仮定の下に、MAC 法を用いて数値的にそれらの挙動を解析する試みを行っている。その手法は個々の土砂粒子の運動を取り扱うのではなく、複数の土砂粒子に1つのマーカーを対応させ、これらのマーカーと周囲の流体の平均密度を有する密度流の運動方程式を解いて全体の運動を論ずるものであり、この方法では土砂粒子と周囲流体との間の相互作用は考慮していない。そのため実際の土砂粒子群の重量を用いてマーカー重量を設定するとマーカーの運動速度が過大になるため、マーカー重量を実際的な値より大幅に低減させなければならない。しかも、それは試行錯誤的に行わなければならない。

そこで、筆者らは堀江(1983)の計算手法を拡張して、個々の粒子の挙動の解析には、粒子間に作用する衝突・摩擦

力など個別要素法 (Discrete Element Method; 以下, DEM 法と称す) を用い、粒子群の沈降に伴う周囲流体の挙動の解析には MAC 法を用いるという解析法を採用し、MAC 法のみによる問題点の改良を試みる。DEM 法は、粒子間の力の伝達が作用・反作用の法則にしたがうものとして粒状体の動力学的挙動を数値的に解析するもので、Cundall (1974) が提唱した手法である。土質工学の分野では土石流解析 (内田ら, 1989) やサイロ内の岩質粒状体の流動解析 (木山ら, 1983)、斜面の安定問題の解析などに用いられている。ここでは、これらの数理モデルの併用によって土砂の沈降分散挙動を2次元に解析し、さらに底面と粒子の間に摩擦力を考慮して土砂の堆積形状を求める。

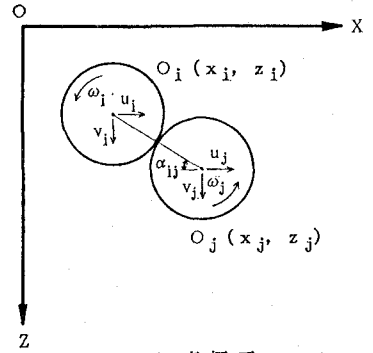


図-1 座標系

2. 計算手法

2.1 接触時の粒子の変形量と粒子間作用力

以下に DEM 法の原理を簡潔に述べる。図-1 に示すように2次元座標系を設定すると、円柱要素 i (半径: r_i) と要素 j (半径: r_j) の接触条件は次式となる。

$$r_i + r_j \geq \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

また、接触中の Δt 間の2粒子 i と j の法線方向および接線方向の接触相対変位は、

$$(\delta_n)_{i,j} = (u_i - u_j)\Delta t \sin \alpha_{ij} + (w_i - w_j)\Delta t \cos \alpha_{ij} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(\delta_s)_{i,j} = (u_i - u_j)\Delta t \cos \alpha_{ij} - (w_i - w_j)\Delta t \sin \alpha_{ij} + (r_i \omega_i - r_j \omega_j)\Delta t \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\sin \alpha_{ij} = -\frac{x_i - x_j}{R_{i,j}} \quad \cos \alpha_{ij} = -\frac{z_i - z_j}{R_{i,j}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

* 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 大阪市立大学助手 工学部土木工学科

*** 松下電器産業(株)

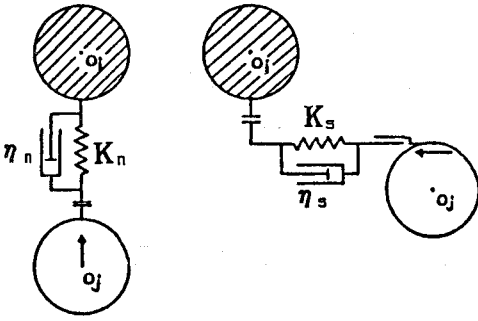


図-2 粒子間作用力

ここに、 $R_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$, $(\delta n)_{i,j}$ および $(\delta s)_{i,j}$ はそれぞれ粒子 i, j の法線方向の相対変形量増分（接近を正）と接線方向の相対変形量増分（反時計回りを正）を表し、 u_i, w_i は粒子 i の x 方向および z 方向の速度、 ω_i はその回転角速度を表す。

図-2 に示すように 2 粒子の接触面に作用する力を、法線方向に作用する圧縮力 f_n と接線方向に作用するせん断力 f_s に分けて考える（ただし、粒子間の引張力は認めない）。この時、法線方向の作用力として Δt 間に生じた法線方向の相対変形量増分 $(\delta n)_{i,j}$ に比例する反力増分 Δe_n と相対変形速度 $(\delta n)_{i,j}/\Delta t$ に比例する減衰力 Δd_n を仮定すると、法線方向の作用力は次式で表される。

$$[f_n]_{i,j,t} = [e_n]_t + [d_n]_t \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$[e_n]_t = [e_n]_{t-\Delta t} + \Delta e_n \\ = [e_n]_{t-\Delta t} + K_n(\delta n)_{i,j} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$[d_n]_t = \Delta d_n = \eta_n(\delta n)_{i,j}/\Delta t \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $[e_n]_t < 0$ のとき

$$[e_n]_t = [d_n]_t = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 K_n は弾性スプリングの剛性定数、 η_n はダッシュポットの粘性定数を表す。

同様に接線方向の作用力について考える。すなわち、接線方向の相対変形増分 $(\delta s)_{i,j}$ に比例するせん断力増分 Δe_s と相対変位速度 $(\delta s)_{i,j}/\Delta t$ に比例するせん断減衰力 Δd_s を仮定すると、接線方向の作用力は

$$[f_s]_{i,j,t} = [e_s]_t + [d_s]_t \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$[e_s]_t = [e_s]_{t-\Delta t} + \Delta e_s \\ = [e_s]_{t-\Delta t} + K_s(\delta s)_{i,j} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$[d_s]_t = \Delta d_s = \eta_s(\delta s)_{i,j}/\Delta t \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $[e_s]_t < 0$ のとき

$$[e_s]_t = [d_s]_t = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$[e_s]_t > \mu[e_n]_t$ のとき

$$[e_s]_t = \mu[e_n]_t \times \text{SIGN}([e_n]_t) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$[d_n]_t = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 K_s はせん断弾性スプリングの剛性定数、 η_s はせん断ダッシュポットの粘性定数、 μ は粒子間の摩擦係

数、 $\text{SIGN}(y)$ は変数 y の正負を表す。

2.2 粒子に作用する流体力の算定

粒子が流体中に運動するときには、慣性力、抗力および揚力が考えられるが、ここでは慣性力と抗力のみを考慮することにする、抗力は次式で表される。

$$[f_x] = -\frac{1}{2}C_D A \rho_w u' \sqrt{u'^2 + w'^2} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$[f_z] = -\frac{1}{2}C_D A \rho_w w' \sqrt{u'^2 + w'^2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 ρ_w は流体密度、 V は粒子の体積、 C_D は抗力係数、 A は粒子の投影面積、 u', w' はそれぞれ x, z 方向の粒子と流体間の相対速度を表す。

本研究では、抵抗係数 C_D を次式で表す。

$$C_D = \frac{24}{Re} + C_{D0} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 Re はレイノルズ数を表し、次式で表される。

$$Re = \frac{r \sqrt{u'^2 + w'^2}}{\nu} \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(17)において $C_{D0} = 2.0$ とおくと高レイノルズ数まで適用できる Rubey(1933)の沈降速度式に対応する C_D が得られる。

2.3 粒子の運動解析

粒子の密度を ρ_s 、回転角加速度を $\dot{\omega}$ とすると、粒子 i の運動方程式は、

$$(m + m')\ddot{u} = \sum_j [F_x]_{ij} + [f_x] \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$(m + m')\ddot{w} = \sum_j [F_z]_{ij} + [f_z] + V(\rho_s - \rho_w)g \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$(I + I')\dot{\omega} = \sum_j [M]_{ij} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに m', I' は付加質量係数および付加慣性モーメントである。また、 $[F_x]_{ij}, [F_z]_{ij}, [M]_{ij}$ は、それぞれ要素 i に作用する法線方向および接線方向作用力の x 方向成分、 z 方向成分ならびに中心回りのモーメント（反時計回りを正とする）で、次式で表される。

$$[F_x]_{ij} = -[f_n]_{i,j,t} \sin \alpha_{ij} + [f_s]_{i,j,t} \cos \alpha_{ij} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$[F_z]_{ij} = -[f_n]_{i,j,t} \cos \alpha_{ij} - [f_s]_{i,j,t} \sin \alpha_{ij} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$[M]_{ij} = -r_i [f_s]_{i,j,t} \quad \dots\dots\dots (24)$$

これらの式から時刻 t における加速度および角加速度が求められ、これを時間増分 Δt で積分することによって速度・角速度が、さらにこれを積分すると Δt 間の変位および角変位が求められる。このようにして得られた変位増分より各粒子の新しい位置が決定され、繰り返し計算することによって時間変化に伴うそれぞれの粒子の運動を求めることができる。

2.4 周囲流体の運動解析

以上が DEM 法の概要であるが、本研究ではこのようにして求められた粒子の運動によって発生する連行流等の周囲流体の運動を解析するため、DEM 法で取り扱っ

た粒子を物性マーカーとして MAC 法で取り扱い、周囲流体の運動を解析することにする。流体の運動を解析する際に用いた基本式は、

x 方向の運動方程式:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_x \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \nu_z \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots(25)$$

z 方向の運動方程式:

$$0 = -g - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \dots\dots\dots(26)$$

連続の式:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(27)$$

である。

ここに、 u_0 、 w_0 はそれぞれ x 方向および z 方向の流体の流速成分、 p は圧力、 g は重力加速度を表す。

本研究で用いた MAC 法は、計算領域にメッシュを設定し、それぞれのメッシュに存在するマーカー (DEM 法で取り扱った粒子) の個数を数え、流体を含めた各メッシュの平均密度を計算し、各メッシュ間の密度差を流体運動の起動力とするものである。各メッシュの密度差を求めた後、基本式の差分化を行って各タイムステップ毎の水位を求め、さらに各メッシュの流速を求める。つぎに、MAC 法によって得られるマーカー位置における流体の速度 (u_0 , w_0) に対する DEM 法によって得られる粒子の速度 (u , w) の相対速度

$$u' = u - u_0 \quad \dots\dots\dots(28)$$

$$w' = w - w_0 \quad \dots\dots\dots(29)$$

を用いて式 (15)、(16) で表される粒子に作用する抗力を算定する。すなわち、本手法は土粒子の運動解析に DEM 法を、また周囲流体の運動解析には MAC 法を用いてそれぞれを別々に解析するが、流体と粒子の相対速度を用いた流体抵抗を介して相互干渉の効果を評価している。

3. 計算条件と計算手順

3.1 諸定数

本手法で用いた DEM 法は陽的に解を求める方法であるので、解の安定性と収束性を得るためにはタイムステ

ップを十分に小さく取る必要がある。ここでは、木山ら (1983) を参考にして $\Delta t = 10^{-5}$ sec とする。DEM 法で用いたその他の諸定数を表-1 に示す。

一方、MAC 法による流体の運動解析では、水平方向の計算範囲を 200 cm とし、分割数は 80、したがってそのメッシュ幅は $\Delta x = 2.50$ cm と一定にする。水深は 10 ~ 50 cm の範囲で変化させるが、鉛直方向の分割数は 20 と一定にする。また、DEM 法のタイムステップが非常に小さいため、粒子の移動量も微小となる。このことは MAC 法中のマーカーの移動量が小さいことを意味し、それ故、DEM 法と同じタイムステップで MAC 法を計算しても繰り返し計算量が増加するのみで、 Δt 間の流況の変化はほとんどないと考えられる。したがって、MAC 法のタイムステップは $\Delta t = 10^{-4}$ s とした。また MAC 法で取り扱う係数のうち、重要な係数として渦動粘性係数が挙げられる。ここでは須田 (1971) による次式で表される渦動粘性係数の算定式を用いた。

$$\nu = 4 + 0.26\nu_0 + 32 \times 10^{-8} \nu_0^2 \quad \dots\dots\dots(30)$$

ここに、 ν_0 は流体の流速を表す。

また付加質量係数は $m' = 1.0$ 、付加慣性モーメントは $I' = 0$ ととする。

3.2 計算手順

図-3 に示すように、その底が水面に接するように設けられた容器の中に、直径 0.3 cm、単位体積質量 2.65 g/cm³ の円形断面粒子を 233 個 (見かけの体積約 300 cm³)、粒子間にわずかに空隙ができるように配置する。次に、容器の底を閉じたままの状態 で重力落下のシミュレーション計算を行い、容器内における初期静的安定状態を作る。その後、容器の底を瞬時に開き、水中を落下する粒子群および周囲流体の運動を解析する。

4. 計算結果

図-4(a)~(d) は、水深 $h = 10$ cm の時の粒子群の沈降挙動と周囲の流況の計算結果を経時的に表したものである。これらの図から以下のようなことが概括される。

投入後 0.1 秒では、ほとんどの全粒子が容器の底から流出を完了している。粒子群下端中央部から左右に分かれてそれぞれ時計回り方向および反時計回り方向に発生

表-1 計算における諸定数

剛性バネ定数	$K_s/\rho g = 4.23 \times 10^4$	(cm)
	$K_b/\rho g = 1.05 \times 10^4$	(cm)
粘性定数	$\eta_n/\rho g = 2.47$	(cm・s)
	$\eta_t/\rho g = 1.24$	(cm・s)
摩擦係数	$\mu = \tan \theta = \tan 30^\circ = 0.577$ (粒子間)	
	$\mu = \tan \theta = \tan 30^\circ = 0.577$ (粒子と壁面)	
	$\mu = \tan \theta = \tan 10^\circ = 0.176$ (粒子と水底)	

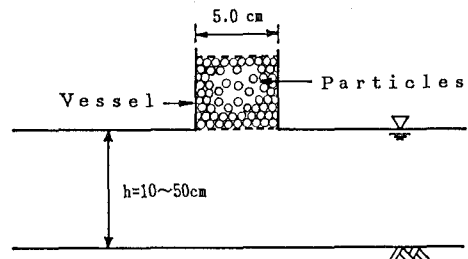


図-3 計算条件

する循環流の影響で粒子群両側部から下部にかけての粒子は既に左右への分散と舞上がりを見せ始めている。0.15秒後では、粒子群は水深の半分程度まで沈降しているが、中央部は側部より早く沈降し、側部は遅れ、さらに一層の舞上がりを見せている。これは粒子群より上層および下層の流体は共に下降し、中央部の粒子群はこれによって沈降が加速されるが、粒子群の側部は発達した循環流の上向き速度成分の影響で沈降が減速されるためである。0.20秒後では、粒子群の下部は着底し、側方へ広がり始めている。粒子群より上方の流体は水面付近では上向き方向に中層より下側では下向き方向に動き、複雑な流況を示している。0.30秒後では、循環流で、舞い上がった若干の粒子を除いてほぼ粒子群の沈降は完了している。なお、以上の流速ベクトル図からも想像されるように、粒子群の投入にとまって投入口を中心として水面変動が生じることがわかる。

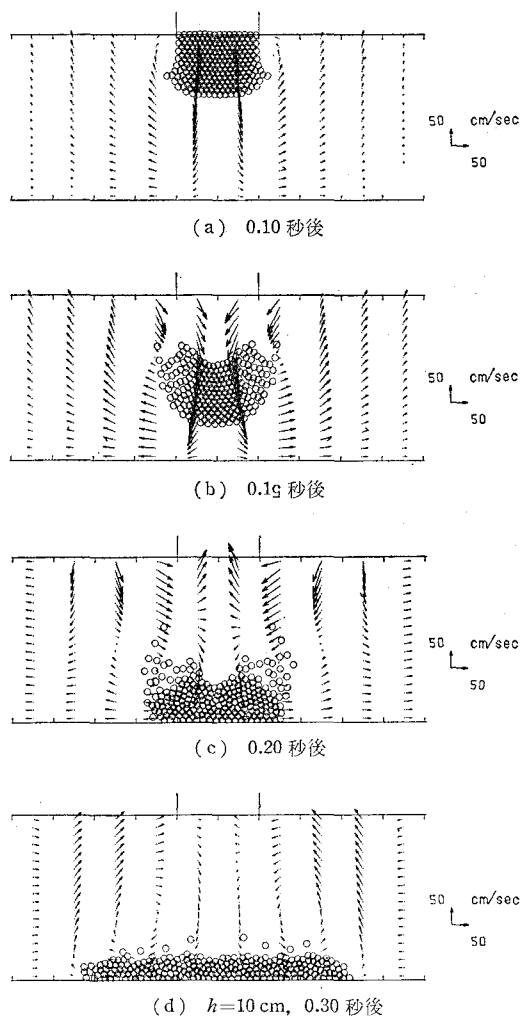
以上の粒子群および流体の挙動は水深が増大しても基本的には同じであるが、粒子群の沈降過程における鉛直方向の分散と舞い上がりは水深の増加と共に一層増大し、かつ水底での広がり幅も増す。

図—4 を見るとき、粒子群の沈降速度が単一粒子の落下速度に比べて非常に大きいことに気が付く。本手法によれば、粒子群の中には $h=10$ cm の時には約 100 cm/s, $h=30$ cm の時には約 230 cm/s, $h=50$ cm の時には約 320 cm/s もの早い流速を示す粒子もある。小川ら (1969) は実験によって水深が 26 cm および 46 cm の時の粒子群の終末沈降速度を 164~248 cm/s と得ており、これらと比較すれば本手法による計算値はそれほど過大な値ではないように思われる。

図—5 は水深を 10 cm, 30 cm, 50 cm と変えたときの、水深と堆積幅の関係を示したものである。この図より、水深が深くなるほど堆積幅が広くまた堆積高さが低くなる傾向が示されており、武藤ら (1974) の研究と同様の傾向が示されていることがわかる。ただし、堆積形状については、武藤らのように水深が深くなるにつれてその堆積形状が三角形状から双頭型、扁平と変化するような明瞭な差はみられなかった。また、室田ら (1988) は平均粒径が $d=3.38$ mm の砂を用いて筆者らの計算とほぼ同一の投入条件で実験を行い、その堆積形状について報告している。その実験結果による堆積幅と本手法による計算値を比較して表したものが表—2 である。表—2 によると、本シミュレーションによる堆積幅と実験値とは非常に整合性がよいことがわかる。

5. 結 論

本研究で用いた手法は、個々の土砂粒子の運動を解析する DEM 法と、粒子の運動に誘起される周囲流体の運



図—4 粒子群の沈降挙動と周囲の流況 ($h=10$ cm)

動を解析する MAC 法を併用することによって、個々の粒子の運動と周囲流体の運動を同時に表現しようと試みた新しい手法である。本手法を用いて簡単な条件の下で粒子群の沈降分散挙動のシミュレーションを試みた結果、粒子群の沈降挙動は個々の粒子がばらばらに分散するのではなく、室田らが指摘しているように塊となって沈降することがわかった。また、本手法によると沈降中に粒子群の側方から舞い上がる粒子の挙動を再現することができるが、MAC 法のみではこのような粒子の挙動を再現することはできず、MAC 法のみによる手法の問題点を改良できたものと考えられる。さらに、本手法による堆積幅の計算値と室田らの実験値を比較すると、両者の整合性が良く、本手法の有用性を示すことができた。今後は本手法を用いて投入条件や粒径分布が粒子群の沈降分散挙動に及ぼす影響について検討したい。

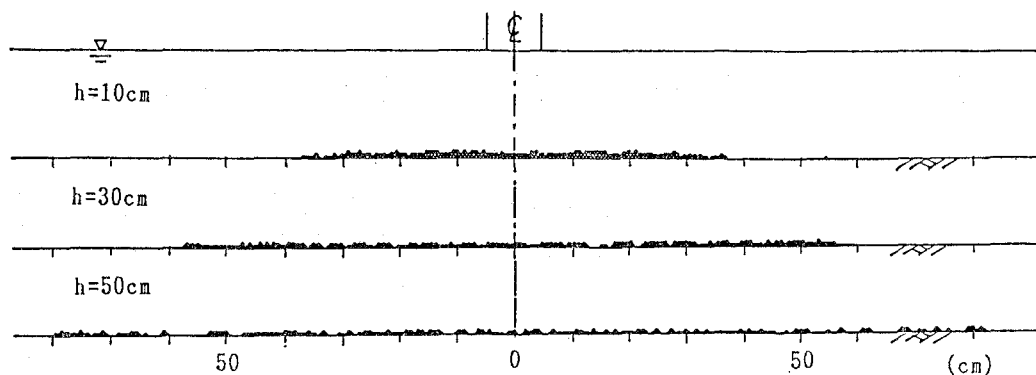


図-5 落下粒子群の堆積形状

表-2 堆積幅の計算値と実験値

水深 (cm)	堆 積 幅 (cm)	
	計 算 値	実 験 値
10	38.24	約40
30	60.02	約50
50	83.99	-----

参 考 文 献

- 内田吉彦・伯野元彦 (1989): 岩屑流・土石流解析への個別要素法の応用, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第13巻, pp. 323~328.
- 例えば, 応用水理学 下 I (1971), 石原藤次郎・本間仁編, p. 46.
- 小川 元・竹内益雄 (1969): 土捨船による投棄土砂の分散, 土木学会論文報告集第161号, pp. 39~49.

- 木山英郎・藤村 尚 (1983): カンドルの離散剛要素法を用いた岩質流状態の重力流動の解析, 土木学会論文報告集 第333号, pp. 137~146.
- 武藤碩夫・吉井総介・石田 勉 (1974): 大規模埋立用底開ページによる土砂投下の研究, 三菱重工業技報, Vol. 11, No. 1, pp. 92~104.
- 堀江 毅 (1983): MAC 法による直投土砂の初期拡散に関する数値解析, 港研資料 No. 471, pp. 1~34.
- 室田 明・中辻啓二・玉井昌宏・町田博紀 (1988): 海域での土砂投下における密度流現象, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 777~781.
- Cundall, P. A. (1974): Rational Design of Tunnel Supports—A Computer Model for Rock Mass Behavior Using Interactive Graphics for the Input and Output of Geometrical Data, Technical Report MRD-2-74, Missouri River Division, U.S. Army Corps of Engineers.
- Rubey, W.W. (1933): Settling Velocities of Gravel, Sand, and Silt, American J. of Science., Vol. 25, No. 148, pp. 325~338.