

球状構造物に作用する回折波力

水谷法美*・岩田好一朗**・松岡滋治***

1. 緒 言

資源に乏しいわが国では、石油などの海上・海中備蓄の必要性は今後更に増大すると考えられる。貯蔵タンクの形状の一つとして、水圧に対して最も有利な形状である球状構造物が挙げられる。大型球状構造物に作用する波力を正確に算定するためには、回折波力の特性を解明する必要があるが、この種の研究は非常に少ない（例えば、Havelock, 1954; Garrison and Rao, 1971; Black, 1975）。最近、岩田・水谷ら（1989）は、数値解析結果に基づいて没水球体に作用する回折波力や質量係数などの特性、波力の計算に回折波理論を必要とする範囲などを明らかにしたが、水理実験による検証を行っていない。また、球状構造物（着底半球、半没水球体、没水球体）を取り扱った従来の理論は線形理論に基づくものであり、また、水理実験も極めて波高の小さい波を対象としており、有限振幅性の波による波力の特性や線形理論の適用性を論議した研究は行われていない。本研究は、球状構造物に作用する回折波力の特性を数値解析と水理実験の両面から考究するものである。

2. 数値解析

(1) わき出し分布法 (SDM)

本研究では、数値解析手法としてわき出し分布法 (SDM) を採用する。これは、SDM では、自由表面と底面の境界条件も既に満足する Green 関数を使うため、波力のみ計算に対しては計算量が減り、計算時間を大きく短縮化できるためである。以下に SDM の概略について説明する。

非粘性・非圧縮性流体の非回転運動を扱う。図-1 に示すように、一様水深 h の水域に半径 a の球体が、 $(x, y, z) = (0, 0, -d)$ に中心位置を持つように固定されている。この水域に波高 H_1 、角周波数 σ ($=2\pi/T$, T は波の周期) の微小振幅波が x の負の方向から入射してくる。この水域の速度ポテンシャル Φ は、入射波と

回折波の速度ポテンシャル、 ϕ_I と ϕ_D の和として次式で与えられる。

$$\Phi = (\phi_I + \phi_D) e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (1)$$

本論では、 ϕ_I を微小振幅波理論の解で与える。以下、球座標系 (図-1 参照) を使って表示する。任意の点 (r, θ, ϕ) における ϕ_D は、境界面上の点 (R, Θ, Ψ) に配置された強さ $f(R, \Theta, \Psi)$ のわき出しによる速度ポテンシャルの和として次式で与えられる。

$$\phi_D(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \int f(R, \Theta, \Psi) G(r, \theta, \phi, R, \Theta, \Psi) dS \dots\dots (2)$$

ここに、 G は Green 関数で次式で与えられる (John, 1950)。

$$\begin{aligned} G(r, \theta, \phi, R, \Theta, \Psi) = & q \cosh k(s+r \cos \theta) \\ & \cdot \cosh k(s+R \cos \Theta) H_0^{(1)}(kQ) \\ & + \Sigma_n q_n \cos k_n(s+r \cos \theta) \\ & \cdot \cos k_n(s+R \cos \Theta) K_0(k_n Q) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

上式で、 $H_0^{(1)}$ と K_0 は、それぞれ 0 次の第 1 種 Hankel 関数と第 2 種変形 Bessel 関数であり、 Σ_n は $n=1$ から ∞ までの総和を示す。また、 Q と q 、および q_n は式 (4) で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Q &= \sqrt{(r \sin \theta)^2 + (R \sin \Theta)^2} \\ &\quad - 2rR \sin \theta \sin \Theta \cos(\phi - \Psi) \\ q &= \frac{2\pi i (k^2 - \sigma^4/g^2)}{(k^2 - \sigma^4/g^2)h + \sigma^2/g} \\ q_n &= \frac{4(k_n^2 + \sigma^4/g^2)}{(k_n^2 + \sigma^4/g^2)h - \sigma^2/g} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 g は重力加速度、 k と k_n は次式の解である。

$$\sigma^2/g = k \tanh kh = -k_n \tan k_n h \dots\dots\dots (5)$$

Green 関数は、連続式、自由表面と底面、および無限遠方の境界条件を満足している。したがって、球体表面での不透過条件 (式 (6)) を満足するようにわき出し分布関数 f を決めればよいことに

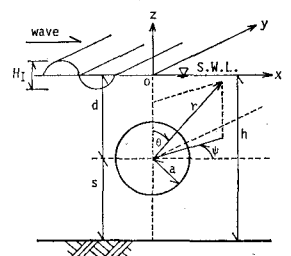


図-1 座標系と記号の説明

* 正会員 工博 名古屋大学助手 工学部土木工学科
 ** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科
 *** 工修 名古屋鉄道株式会社

なる。

$$\partial(\phi_I + \phi_D)/\partial r = 0 \quad (\text{at } r=a) \quad \dots\dots\dots (6)$$

(2) わき出し分布関数 f の決定方法

Green 関数 G は、 $Q=0$ のとき特異性を有する。このため、式 (6) に式 (3) を代入し、特異点周りの積分を先に行えば (Fenton, 1978), 解くべき方程式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} & -(1/2)f(a, \theta, \psi) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int f(a, \theta, \psi) \frac{\partial G(r, \theta, \phi, a, \theta, \psi)}{\partial r} dS(a, \theta, \psi) \\ & = -\partial\phi_I/\partial r \quad (\text{at } r=a) \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

球体表面上に配置されるわき出し分布関数 f は、軸対称性を考慮すると次式のようにフーリエ級数展開できる。

$$f(a, \theta, \psi) = \sum f^{(m)}(\theta) \cos m\psi \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $f^{(m)}$ は f の m 次のフーリエ係数で、 $\sum$ は $m=0$ から ∞ までの総和を示す。

円筒関数の加法定理を使い、 $(\phi-\psi)$ の対称性を考慮すると Green 関数 G は以下の様に展開できる。

$$\begin{aligned} G(r, \theta, \phi, a, \theta, \psi) &= \sum G^{(m)}(r, \theta, \theta) \cos m(\phi-\psi) \\ &= \sum \epsilon_m \left\{ q \cosh k(s+r \cos \theta) \cosh k(s+a \cos \theta) \right. \\ &\quad \cdot \left[\frac{H_m^{(1)}(kr \sin \theta) J_m(ka \sin \theta)}{H_m^{(1)}(ka \sin \theta) J_m(kr \sin \theta)} \right] \\ &\quad + \sum_n q_n \cos k_n(s+r \cos \theta) \cos k_n(s+a \cos \theta) \\ &\quad \cdot \left. \left[\frac{K_m(k_n r \sin \theta) I_m(k_n a \sin \theta)}{K_m(k_n a \sin \theta) I_m(k_n r \sin \theta)} \right] \right\} \\ &\quad \cdot \cos m(\phi-\psi) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに、 J_m と I_m は Bessel 関数と第1種変形 Bessel 関数、 ϵ_m は Neumann 数で添字 m は m 次の量を示す。また、 $[\]$ 内については、 $|r \sin \theta| > |a \sin \theta|$ のとき上側、 $|r \sin \theta| < |a \sin \theta|$ のとき下側を採用する。

$|r \sin \theta| = |a \sin \theta|$ の場合、円筒関数の加法定理は成立しないため、別に扱う必要がある。従来の研究では、 $[\]$ 内の上段と下段の平均値を採用しているが、それぞれの r に関する導関数を考えた場合、上側と下側の値の差が大きいため、本研究では以下のように扱った。

式 (3) を r で偏微分し、 $r \sin \theta = a \sin \theta$ を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \partial G/\partial r &= q[k \cos \theta \sinh k(s+r \cos \theta) \\ &\quad \cdot \cosh k(s+a \cos \theta) H_0^{(1)}(kQ^*) - (\sqrt{2} Q^*/2) \\ &\quad \cdot \cosh k(s+r \cos \theta) \cdot \cosh k(s+a \cos \theta) H_0^{(1)}(kQ^*)] \\ &+ \sum_n q_n [k_n \cos \theta \sin k_n(s+r \cos \theta) \\ &\quad \cdot \cos k_n(s+a \cos \theta) K_0(k_n Q^*) - (\sqrt{2} Q^*/2) \\ &\quad \cdot \cos k_n(s+r \cos \theta) \cdot \cos k_n(s+a \cos \theta) K_0'(k_n Q^*)] \\ &\quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに、 $Q^* = \sqrt{2a \sin \theta \sqrt{1 - \cos(\phi-\psi)}}$ で、 $'$ は r に

関する導関数を示す。

上式も $(\phi-\psi)$ の対称性から次式のようにフーリエ級数展開が可能である。

$$\partial G/\partial r = \sum G^{(m)}(a, \theta, \theta) \cos m(\phi-\psi) \quad \dots\dots\dots (11)$$

式 (9)、式 (11) と $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\psi$ を、式 (7) に代入し、球体表面での積分を行うと、各フーリエモード毎に θ のみに依存する方程式が導かれる。したがって、球体表面を xy 平面に平行な面によりリング状に分割すれば、各リングに対して離散化方程式が得られる。それを解くことにより、わき出し分布関数を計算できる。

わき出し分布関数が求めれば ϕ_D が式 (2) より計算でき、非定常ベルヌーイ式より求める圧力を使って F_x と F_z が計算できることになる。

(3) 要素分割数、級数の項数に関する検討

計算を行う際、球体表面の要素分割数、減衰定常波の項数 n をどの程度にするかが問題になる。本研究では、詳細な予備計算による解の収束性の検討、および Hybrid 法の結果 (岩田・水谷ら, 1989) との比較から以下に示すように決定した。すなわち、球体表面については分割幅を $\pi a/40$ 、減衰定常波の項数については 15 項まで採用した。Hybrid 法と比べると、分割幅は細かく、また項数 n は多くなっているが、Hybrid 法と同じ値を採用しても結果にほとんど差はない。フーリエ級数の項数 m については、波力の計算の場合、 $m=0$ と 1 についてのみ計算すればよい。SDM と Hybrid 法の比較例を図-2 に示す。同図より、両解法の結果は非常によく一致することが明らかである。なお、SDM の計算時間は Hybrid 法の約 1/16 と非常に効率が良い。

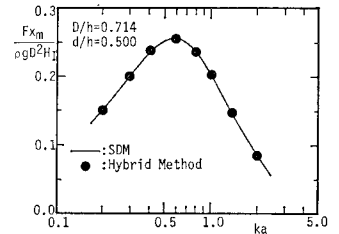
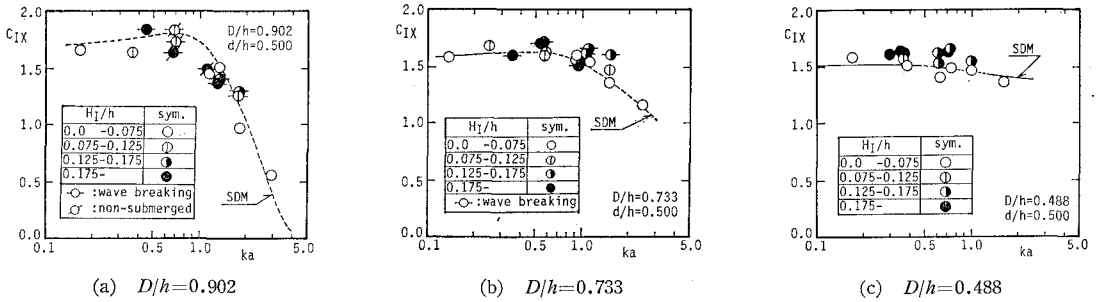
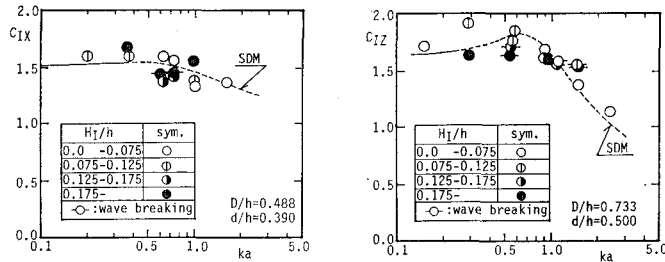
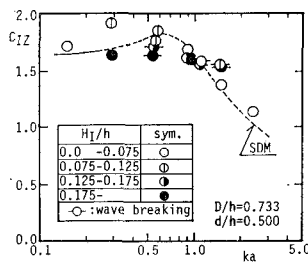


図-2 SDM と Hybrid 法の比較例

3. 水理実験

実験は、名古屋大学工学部土木工学科の平面水槽 (30m × 10m × 0.6m) で行われた。静水深 h を 41 cm で一定に保ち、波の周期 T を 6 種類 (0.5, 0.6, 0.75, 0.81, 1.1, 1.75 秒)、波高を 2.1 cm ~ 7.5 cm の間で 1 ~ 4 種類変化させた。したがって、有限振幅性の波を含んだ $H/L < 0.08$ の範囲で実験を行ったことになる。直径 $D=37, 30, 20, 12$ cm の 4 種類の球体を使用した。そして、静水面上に中心を持つ場合、没水状態の場合と底面に設置された半球の三つの設置状態を対象とし、球体の中心位置 d を各々の条件に対して静水面から底面まで球径に応じて 3 ~ 5 種類 ($d/h=1.0, 0.5, 0.39$,

図-3 C_{1x} と ka の関係 ($d/h=0.500$)図-4 C_{1x} と ka の関係 ($d/h=0.390$)図-5 C_{1z} と ka の関係

0.29, 0.0) 変化させ、合計 195 ケースの実験を行った。これらの全てのケースで水位変動、 x 方向と z 方向の流速 (u , w) と波力 (F_x , F_z) を同時に計測した。なお、球体に作用する波力を Cantilever 方式により計測した。この波力計測システムの水中の固有振動周波数は最低でも約 8 Hz である。

4. 結果とその考察

(1) 有効慣性力係数

本節では、まず、式 (12) と式 (13) で定義される没水球体の有効慣性力係数の特性について考究する。

$$C_{1x} = F_{xm} / (\rho \pi D^3 \dot{u}_m / 6) \quad (12)$$

$$C_{1z} = F_{zm} / (\rho \pi D^3 \dot{w}_m / 6) \quad (13)$$

ここに、 F_{xm} と F_{zm} は、それぞれ F_x と F_z の最大値、 ρ は水の密度、 $\dot{u}_m$ と $\dot{w}_m$ は、それぞれ球体の中心位置における x , z 方向の最大加速度である。

図-3 に $d/h=0.5$, $D/h=0.902$, 0.732 , 0.489 の場合の没水球体に対する C_{1x} と回折パラメータ ka の関係を示す。図中、曲線は SDM による数値解析解で、破線部は波力の計算に回折波理論を必要とする範囲、実線部は回折波理論を必要としない範囲 (岩田・水谷ら, 1989) を示す。

実験値と計算値の対応はよく、線形理論に基づく SDM は妥当な結果を与えることが判る。そして、 H_1/h が C_{1x} に及ぼす効果はほとんどないこと、砕波が生じる場合の実験値 (図中、一印付き実験値) も計算値に近

いことがわかる。これは、本実験で確認された砕波はすべて spilling 型砕波であり、自由表面付近で気泡が混入し、若干の乱れが生じるものの球体近傍まではその影響が及ばないこと、また、仮に及んだとしてもその範囲が限られており、圧力の積分値である波力には影響が小さいためであると考えられる。

C_{1x} は、図-3 より明らかなように、

波力の計算に回折波理論を必要としない範囲ではほぼ一定値をとり、必要とする範囲で大きく変化する。これは、波の回折効果が大きくなると球体表面の圧力の空間分布が大きく変化するためである。

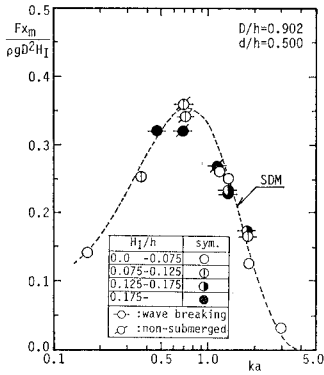
ka に伴う変化は D/h の大きい方が大きい。また、例示した図-4 と図-3 (c) を比較すると、 d/h の小さい (自由表面に近い) 方がより大きくなることがわかる。これは、球体が自由表面に近づくにつれて、球体周りの水粒子の運動が大きくなり、球径の大きい方が、また、球体が自由表面に近い方が回折効果が大きくなるためである。

一方、 C_{1z} の基本的な特性は C_{1x} と非常によく似ているが、図-3 (b) と図-5 を比較すると明らかなように、 C_{1x} に比べて C_{1z} の方が ka に伴う変化が大きい。そして、図示しないが、 d/h と D/h が C_{1z} に及ぼす効果も大きくなる。この一原因として、自由表面と底面の境界の影響が挙げられる。

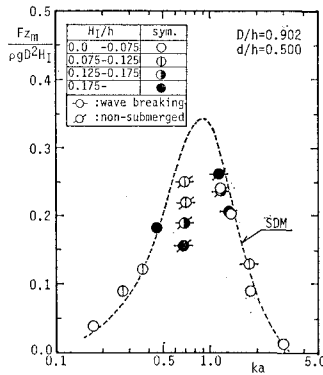
(2) 無次元最大波力

図-6 と 7 は、没水球体に作用する x 方向と z 方向の無次元最大波力 ($F_{xm} / \rho g D^2 H_1$, $F_{zm} / \rho g D^2 H_1$) と ka の関係をそれぞれ例示したものである。無次元最大波力は、 D/h , d/h の他に水深波長比によっても変化するため、有効慣性力係数と異なり、波の回折効果が小さい場合でも明瞭な極大値を持つ。しかし、 ka の変化に伴う無次元最大波力の変化は、有効慣性力係数と同様、 D/h の大きい方が大きくなる。

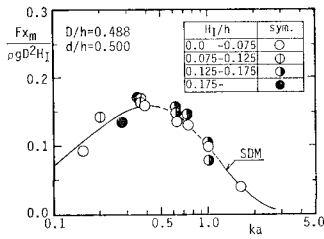
また、SDM の解析解と比較すると全体的には両者の



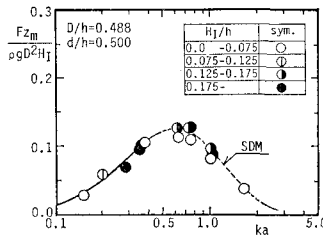
(a) $D/h=0.902$



(a) $D/h=0.902$



(b) $D/h=0.488$



(b) $D/h=0.488$

図—6 $F_{xm}/\rho g D^2 H_l$ と ka の関係

図—7 $F_{zm}/\rho g D^2 H_l$ と ka の関係

ち、静水面近傍では水位変動により波動圧が作用する面積が変化し、静水面より上部にも作用するが、SDM では、静水面までしか考慮しないためである。特に、回折波の影響のため、球体前面では波高が大きくなるため(松岡, 1990)、この効果がより大きくなり、最大波力が増大したと考えられる。また、静水面近傍の作用圧力は、大半が x 方向成分であり、 z 方向成分は非常に小さい。このため、同じ条件のもとでも z 方向波力は計算値と実験値の対応がよいと考えられる。

着底半球の無次元最大波力 ($F_{xm}/(\rho g a^2 H_l/2)$, $F_{zm}/(\rho g a^2 H_l/2)$) については、図—9 に例示するように、実験値と計算値の対応は、本実験で対象とした $a/h < 1/2$ の範囲では、球径に関係なく非常によい。なお、図中の▲印は Garrison and Rao (1971) の近似式による計算値である。 ka が大きい範囲の z 方向波力で SDM との差が認められるが、これは、Garrison and Rao の近似による

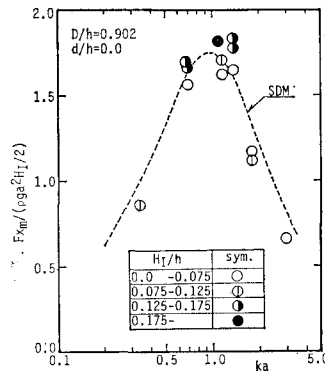
対応はよい。しかし、 $D/h=0.902$ の場合で球体上部が自由表面から出る場合の F_z の最大値については実験値は計算値を大きく下回る(図中、/印付き実験値)。この効果は H_l/h が大きい程顕著である。これは、SDM の場合、常に静水面までを積分範囲としているため、実際には空中に出て波動圧が作用しない部分も波力の計算に含めるためである。前節では述べなかったが、 C_{Iz} についても同様の結果が得られている。また、この効果が x 方向の作用波力に現れないのは、球体の上部の圧力はほとんど z 方向成分がであり、 x 方向成分は非常に小さいためである。

図—8 は、静水面に中心を持つ球体に作用する無次元最大波力と ka の関係を示したものである。なお、無次元最大波力の表示法は、Garrison and Rao(1971) と同じ表示法 ($F_{xm}/(\rho g a^2 H_l/2)$, $F_{zm}/(\rho g a^2 H_l/2)$) を採用した。図—8 より、 x 方向と z 方向ともに計算値と実験値の対応は良いが、 $D/h=0.902$ の x 方向波力については ka が 1.0~1.5 の範囲で実験値が計算値を上回り、計算値との差は H_l/h の大きい方が大きい。これは、以下の理由によると考えられる。すなわ

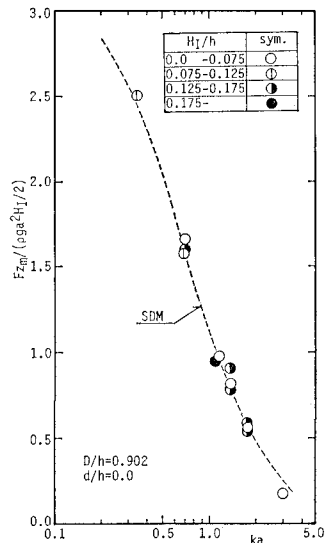
差である。

(3) SDM の適用範囲に関する検討

以上、有効慣性力係数と無次元最大波力について検討を加えてきた。その結果、没水球体の場合では、 $D/h=0.902$ で球体上部が自由表面から出る場合の F_z を除いて計算値と実験値の差は非常に小さく、最大誤差も 10%



(a) x 方向波力



(b) z 方向波力

図—8 無次元最大波力と ka の関係 (静水面上に中心を持つ場合)

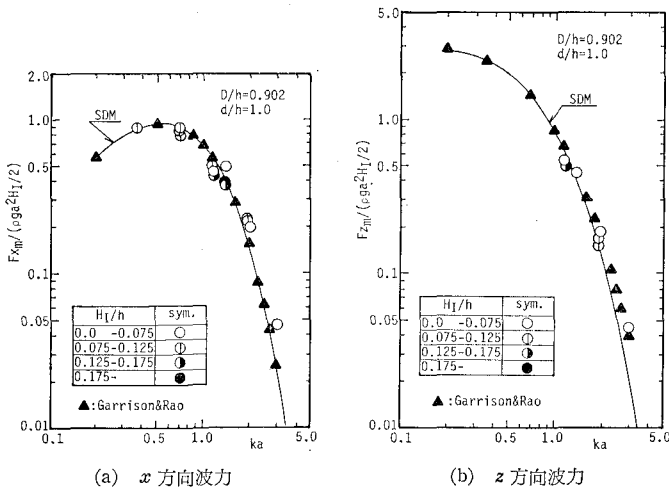


図-8 無次元最大波力と ka の関係 (着底半球の場合)

以下である。これは、spilling 型砕波が生じても同様であり、砕波が波力に及ぼす影響は非常に小さい。しかし、上述したような球体上部が自由表面から出るような場合の Fz については、計算値は実験値を過大評価する。この点については、波の有限振幅性を考慮した解析法を確立する必要がある。

一方、球体の中心を静水面に設置した場合、 $D/h=0.902$ で ka が 1.0~1.5 の範囲の x 方向波力を除けば、SDM は作用波力の正確な計算に有効な手法であるといえる。しかし、球径が大きい場合の Fx の計算値と実験値の差異は大きく、波の有限振幅性を考慮した解析法が必要であり、没水球体の場合と同様、今後の重要な課題である。

着底半球の場合、本研究で対象とした $a/h < 1/2$ の範囲では、水位変動の効果はほとんどなく、また、半球の存在による波高等の変化もほとんどない。そして、作用波力に対する SDM と実験値の対応は非常に良く、SDM で精度良く波力を算定できる。

なお、本論では紙面の都合上論議できなかったが、波高分布の計算に対する SDM の適用範囲は、波力の場合に比べて狭く、波力の計算に SDM を適用できる場合であっても、波高分布の計算には SDM を適用できない範囲があるため、注意が必要である。この点については、稿を改めて発表したい。

5. 結 言

本研究で得られた結果を以下に要約する。

(1) 有効慣性力係数は、波の回折効果が小さい範囲では、ほぼ一定値を取るが、波の回折効果が大きくなると、 ka の増加とともに変化する。その変化の大きさは、球径水深比の大きい方が大きく、また、相対設置水深の小さい方が大きい。そして、この傾向は、 x 方向波力よりも z 方向波力の方が顕著である。

(2) 本研究で対象とした波形勾配が 0.08 以下の波では、波高の変化にともなう有効慣性力係数の有意な差はほとんどなく、さらに、球体上で規模の小さい spilling 型砕波が生じて、砕波が生じない場合と比べて有効慣性力係数に有意な差はほとんどない。そして、線形理論に基づく SDM の結果は、有効慣性力係

数、無次元最大波力ともに実験結果とよく一致する。

(3) SDM は、球径水深比が 0.9 以上の場合、波の谷で球体が自由表面上に出る没水球体に作用する z 方向波力、および、波の回折が顕著になる ka が 1.0~1.5 の範囲の静水面上に中心を持つ球体に作用する x 方向波力には適用できない。一方、底面上に設置された半球に対しては、半径が静水深の 1/2 より小さい範囲では、SDM によって精度良く作用波力を算定できる。

参 考 文 献

- 岩田好一朗・水谷法美・都築克嘉 (1989): 没水球体に作用する回折波力に関する数値解析, 土木学会論文集, 第 411 号/II-12, pp. 187~196.
- 松岡滋治 (1990): 球状構造物に作用する回折波力と波変形に関する研究, 名古屋大学修士論文, 35 p.
- Black, J. L. (1975): Wave forces on vertical axisymmetric bodies, J. Fluid Mech., Vol. 67, Part 2, pp. 369~376.
- Fenton, J. D. (1978): Wave forces on vertical bodies of revolution, J. Fluid Mech., Vol. 85, pp. 241~255.
- Garrison, C. J. and V. S. Rao (1971): Interaction of waves with submerged objects, Proc. ASCE, Vol. 100, No. WW3, pp. 189~204.
- Havelock, T. H. (1950): The wave forces on a submerged body moving under waves, Quart. Trans. of Naval Arch., January and in The Collected Papers of Sir Thomas Havelock on Hydrodynamics, ONR/ACR-103, pp. 590~596.
- John, F. (1950): On the motion of floating bodies, II, Common Pure Appl. Math., Vol. 13, pp. 45~101.