

似理論によると、次式のように表示できる。

$$\phi_I^{(1)} = -i \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}, \dots (4)$$

$$\phi_I^{(2)} = -i \frac{3}{8} a^2 \omega \frac{\cosh 2k(h+z)}{\sinh^4 kh} e^{2ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \dots (5)$$

ここで、 a : 線形理論の波振幅、 h : 水深、 g : 重力加速度である。散乱波ポテンシャル $\phi_d^{(1)}$ 、 $\phi_d^{(2)}$ に関する境界値問題は、

1 次の境界値問題:

$$\nabla^2 \phi_d^{(1)} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \dots (6)$$

$$\frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_d^{(1)} = 0 \quad \text{on } S_F \quad \dots (7)$$

$$\frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I^{(1)}}{\partial n} \quad \text{on } S_H \quad \dots (8)$$

$$\frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_B \quad \dots (9)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial R} - ik \phi_d^{(1)} \right) = 0 \quad \text{on } S_R \quad \dots (10)$$

ここで $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$

2 次の境界値問題:

$$\nabla^2 \phi_d^{(2)} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \dots (11)$$

$$\frac{\partial \phi_d^{(2)}}{\partial z} - \frac{4\omega^2}{g} \phi_d^{(2)} = q_{Id} + q_{ad} \quad \text{on } S_F \quad \dots (12)$$

$$\frac{\partial \phi_d^{(2)}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I^{(2)}}{\partial n} \quad \text{on } S_H \quad \dots (13)$$

$$\frac{\partial \phi_d^{(2)}}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_B \quad \dots (14)$$

$$\text{radiation condition} \quad \text{on } S_R \quad \dots (15)$$

ここで q_{Id} 、 q_{ad} は、

$$q_{Id} = \frac{1}{g} \left[2i\omega \left(\frac{\partial \phi_I^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_I^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_I^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial z} \right) - \frac{i\omega}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_I^{(1)}}{\partial z^2} \phi_d^{(1)} + \frac{\partial^2 \phi_d^{(1)}}{\partial z^2} \phi_I^{(1)} - \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{\partial \phi_I^{(1)}}{\partial z} \phi_d^{(1)} + \frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial z} \phi_I^{(1)} \right) \right) \right] \quad \dots (16)$$

$$q_{ad} = \frac{1}{g} \left[i\omega (\nabla \phi_d^{(1)})^2 - \frac{i\omega}{2} \frac{\partial^2 \phi_d^{(1)}}{\partial z^2} \phi_d^{(1)} - \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial z} \phi_d^{(1)} \right) \right] \quad \dots (17)$$

となる。

3. 波力の算定

j 方向の波力 F_j は、

$$F_j = R_e [\varepsilon \bar{f}_j^{(1)} e^{-i\omega t} + \varepsilon^2 (\bar{f}_j^{(2)} + \bar{f}_j^{(2)} e^{-i\omega t})] \\ = R_e [f_j^{(1)} e^{-i\omega t} + f_j^{(2)} + f_j^{(2)} e^{-2i\omega t}], \dots (18)$$

のように定義でき、1 次の変動波力 $f_j^{(1)}$ 、2 次の定常力 $f_j^{(2)}$ は次式で与えられ、

$$f_j^{(1)} = i\omega \rho \iint_{S_H} \phi^{(1)} n_j ds \quad \dots (19)$$

$$f_j^{(2)} = -\frac{\rho}{4} \iint_{S_H} \nabla \phi^{(1)} \nabla \phi^{(1)*} n_j ds \\ + \frac{\rho \omega^2}{4g} \int_c \phi^{(1)} \cdot \phi^{(1)*} n_j ds \quad \dots (20)$$

さらに、2 次の変動波力 $f_j^{(2)}$ は、Haskind の関係を用いると次式のように与えられる。

$$f_j^{(2)} = 2i\omega \rho \left\{ \iint_{S_H} \left(\phi_I^{(2)} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_I^{(2)}}{\partial n} \right) ds \right. \\ \left. + \iint_{S_F} q_{Id} \phi ds + \iint_{S_F} q_{ad} \phi ds \right\} \\ + \frac{\rho}{4} \iint_{S_H} (\nabla \phi^{(1)})^2 n_j ds - \frac{\rho \omega^2}{4g} \int_c \phi^{(1)2} n_j dc, \quad \dots (21)$$

ここで、 n_j は法線ベクトルの j 方向成分、 ρ は流体の密度、 c は $z=0$ おける物体表面の水線である。また、 $*$ はその複素共役を示す。

(21) 式より、2 次の境界値問題を解かずに1次の散乱波ポテンシャル $\phi_d^{(1)}$ と 2ω の発散波ポテンシャル ϕ などによって2次の波力を算定することができる。

4. 自由表面積分の評価法

(21) 式より2次波力を求める場合、(21) 式の第3項、第4項の自由表面積分の評価が問題となる。本研究では任意断面形状の柱状体を解析対象としているため、座標原点を中心とした半径 $\bar{r}$ の円を描き、自由表面を物体近傍の内部有限領域と外部の半無限領域に分けて考える。内部領域有限については、6節点アイソパラメトリック要素を用いて積分を行うが、詳細については増田ら(1986)を参照されたい。本章では外部半無限領域の積分の評価法について示す。

今、 $q_{Id}\phi$ 、 $q_{ad}\phi$ の無限遠方でのオーダーを評価すると、

$$q_{Id}\phi \sim f_4(\beta) \frac{1}{r} e^{i(\alpha k + k_2)r} \quad \dots (22)$$

$$q_{ad}\phi \sim f_5(\beta) \frac{1}{r\sqrt{r}} e^{i(2k + k_2)r} \quad \dots (23)$$

となる。ここで、

$$\alpha = 1 + \cos \beta \quad \dots (24)$$

$$4\omega^2 = gk_2 \tanh k_2 h \quad \dots (25)$$

β : 円筒座標における回転角

である。物体より十分離れた距離 $\bar{r}$ より外部の積分を処理するため(22)、(23) 式の減衰挙動を減衰長 L_{Id} 、 L_{ad} を伴った指数関数で近似し、図-2 に示す6節点無限要素を用いて処理する。

無限要素内任意の点での $q_{Id}\phi$ 、 $q_{ad}\phi$ の値は、節点値 $\{q_{Id}\phi\}$ 、 $\{q_{ad}\phi\}$ と(22)、(23) 式を考慮した補間関数 $\{\tilde{N}_{Id}(\eta, \xi)\}$ 、 $\{\tilde{N}_{ad}(\eta, \xi)\}$ の線形結合により

$$q_{Id}\phi = \{\tilde{N}_{Id}(\eta, \xi)\}^T \{q_{Id}\phi\} e^{-\xi/L_{Id}} \quad \dots (26)$$

$$q_{ad}\phi = \{\tilde{N}_{ad}(\eta, \xi)\}^T \{q_{ad}\phi\} e^{-\xi/L_{ad}} \quad \dots (27)$$

のように表示できる。ここで補関数 $\{\tilde{N}_{1a}\}$, $\{\tilde{N}_{aa}\}$ は、

$$\{\tilde{N}_{1a}(\eta, \xi)\} = \{\tilde{K}_{1a1}H_1, \tilde{K}_{1a1}H_2, \tilde{K}_{1a1}H_3, \tilde{K}_{1a2}H_1, \tilde{K}_{1a2}H_2, \tilde{K}_{1a2}H_3\} \dots (28)$$

$$\{\tilde{N}_{aa}(\eta, \xi)\} = \{\tilde{K}_{aa1}H_1, \tilde{K}_{aa1}H_2, \tilde{K}_{aa1}H_3, \tilde{K}_{aa2}H_1, \tilde{K}_{aa2}H_2, \tilde{K}_{aa2}H_3\} \dots (29)$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{K}_{1a1} \\ \tilde{K}_{1a2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\xi_2 - \xi}{\xi} e^{i(\alpha k + k_2)\xi} \\ \frac{\xi}{\xi_2} e^{i(\alpha k + k_2)(\xi - \xi_2)} \end{Bmatrix} \dots (30)$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{K}_{aa1} \\ \tilde{K}_{aa2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2} e^{i(2k + k_2)\xi} \\ \frac{\xi}{\xi_2} e^{i(2k + k_2)(\xi - \xi_2)} \end{Bmatrix} \dots (31)$$

$$\begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\eta^2 - \eta}{2} \\ 1 - \eta^2 \\ \frac{\eta^2 + \eta}{2} \end{Bmatrix} \dots (32)$$

である。 ξ 方向の半無限積分は

$$\int_0^\infty \{\tilde{N}(\eta, \xi)\}^T \{q\phi\} e^{-\xi/L} d\xi = \int_0^\lambda + \int_\lambda^{2\lambda} + \dots + \int_{(n-1)\lambda}^{n\lambda} + \int_{n\lambda}^\infty \dots (33)$$

として、有限積分のたし合わせと、半無限積分とに分け、被積分関数の波長が短くなる場合に精度が落ちることを防いでいる。 η 方向にガウスの4点積分、 ξ 方向有限積分に6点積分、半無限積分にラゲール積分を用いると、(21)式第3項、4項は最終的に

$$\begin{aligned} & \iint_{\tilde{S}_F} q_{1a}\phi ds + \iint_{\tilde{S}_F} q_{aa}\phi ds \\ &= \sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^4 \left\{ \sum_{n=1}^N \left(\sum_{j=1}^6 \{\tilde{N}_{1a}(\eta_l, \xi_j)\}^T \{q_{1a}\phi\} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right. \right. \right. \\ & \quad \times e^{-\xi_j/L_{1a}} L_{1a} w_j \Big) + \sum_{k=1}^K \{\tilde{N}_{1a}(\eta_l, \xi_k L_{1a} + n\lambda)\}^T \\ & \quad \times \{q_{1a}\phi\} e^{-n\lambda/L_{1a}} L_{1a} w_{ik} \Big\} w_i |J_2| \Big] \\ &+ \sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^4 \left\{ \sum_{n=1}^N \left(\sum_{j=1}^6 \{\tilde{N}_{aa}(\eta_l, \xi_j)\}^T \{q_{aa}\phi\} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right. \right. \right. \\ & \quad \times e^{-\xi_j/L_{aa}} L_{aa} w_j \Big) + \sum_{k=1}^K \{\tilde{N}_{aa}(\eta_l, \xi_k L_{aa} + n\lambda)\}^T \\ & \quad \times \{q_{aa}\phi\} e^{-n\lambda/L_{aa}} L_{aa} w_{ik} \Big\} w_i |J_2| \Big] , \dots (34) \end{aligned}$$

となる。ここで、 ξ_j , ξ_k をガウス及びラゲールの積分点とすると $\bar{\xi}_j$, $\bar{\xi}_k$ は

$$\bar{\xi}_j = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \xi_j + \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}$$

$$\bar{\xi}_k = \xi_k / L$$

であり、 w_j , w_{ik} はガウス及びラゲール積分の重み関数であり、 M は無限要素の総数、 N は ξ 方向有限積分の回数であり、 K はラゲール積分の分数点である。また、減衰長 L_{1a} , L_{aa} は

$$L_{1a} = \frac{r_1 - r_2}{\ln(r_1/r_2)}$$

$$L_{aa} = \frac{r_1 - r_2}{\ln\{(r_1\sqrt{r_1})/(r_2\sqrt{r_2})\}}$$

で計算される (図-2 参照)。

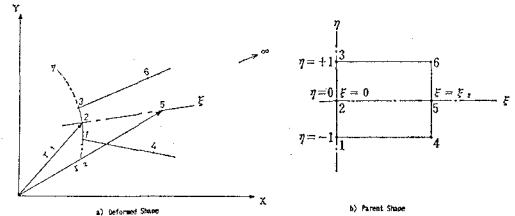


図-2 6節点無限要素

5. 結果及び考察

5.1 自由表面積分の収束について

図-3 には、(21)式3~4項の積分値の収束状況を検討するために、入射角 0° 、水深半径比 $h/r=5$ 、中心間距離 $4r$ の2本円柱について、 $\bar{r}/r$ (r : 円柱の半径) に対する2次の水平波力の収束状況を示す。2次の水平波力は $\bar{r}/r > 6.0$ で十分に収束しており、自由表面の無限積分にラゲール積分を応用する本手法の有用性を知ることができる。このことから、この以降示す計算結果は $\bar{r}/r=6$ として計算を行ったものである。

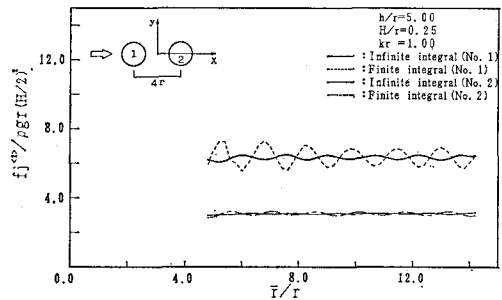


図-3 自由表面積分の収束

5.2 水槽実験結果との比較

入射角 0° 、中心間距離 $4r$ 、水深半径比 $h/r=5$ の2本円柱に作用する非線形波力について考察する。水槽実験に使用した模型は2本の円柱で、円柱の半径 $r=16$ cm、2本の円柱の中心距離を $4r$ 、水深 $h=80$ cm、入射波高 $H=5$ cm、入射波の周期を $0.7 \sim 2.0$ sec とした。(水槽実験の詳細は、増田ら (1986) を参照のこと。) また、数値計算値、実験値とも f_j は1次の水平波力、 $F_{j \max}$ は1次と2次の波力を位相を考慮して足し合わせた最大値である。図-4 は前方、図-5 には後方の円柱に作用する1次及び全水平波力を示す。横軸は無次元波数、縦軸は波力を $\rho g r^2 (H/2)$ で無次元化してある、

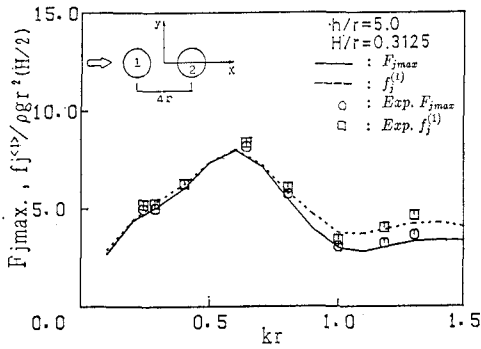


図-4 2本円柱(前方)に作用する1次及び全水平波力

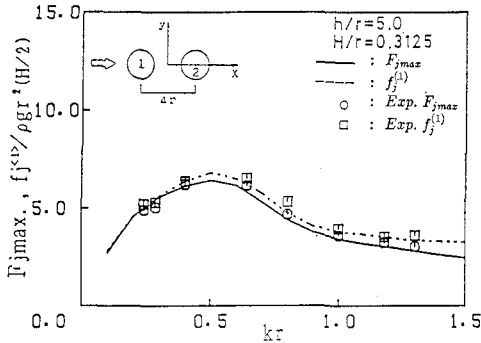


図-5 2本円柱(後方)に作用する1次及び全水平波力

実験値と計算値は良好な相関を示しており、本手法の妥当性がうかがえる。

5.3 波力に及ぼす非線形影響の評価

非線形波力の特性等を明らかにするため、波力の非線形性を表すパラメータとして、

$$NE[\%] = \frac{|F_{\max}| - |f^{(1)}|}{|f^{(1)}|}$$

を定義する。図-6~7に単独円柱に作用する波力の非線形影響パラメータを、図-8~11には2本円柱に作用する波力の非線形影響パラメータを示す。縦軸は非線形影響パラメータ NE 、横軸は水深波長比 h/L 及び波形勾配 H/L である。数値計算は、半径波長比 $r/L = 0.20, 0.30$ のそれぞれについて、水深波長比 $h/L = 0.2 \sim 3.0$ 、波形勾配を $H/L = 0.0 \sim 1.0$ の範囲で変化させた。

ここでは、比較のために単独円柱に作用する非線形影響パラメータを基準にして考察をしていく。

半径波長比が $r/L = 0.3$ の場合、非線形影響パラメータ NE は、単独・2本円柱の前後とも $h/L = 1.0$ 付近で最大となるが、2本円柱の前方の NE は、単独及び後方の円柱に比べて 20% 前後も大きくなっている。半径波長比 $r/L = 0.2$ の場合には、単独円柱・2本円柱の前方とも非線形影響パラメータ NE は $h/L = 0.6$ 付近

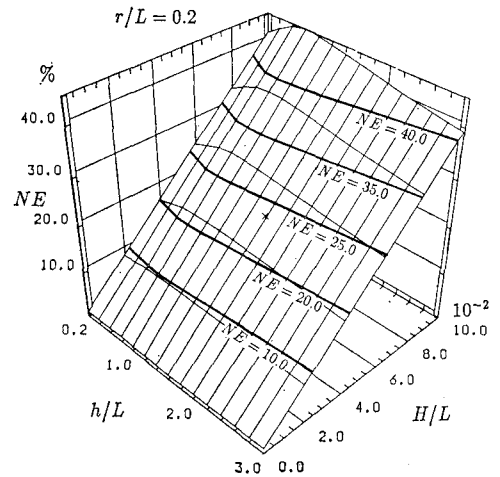


図-6 円柱に作用する波力の非線形影響

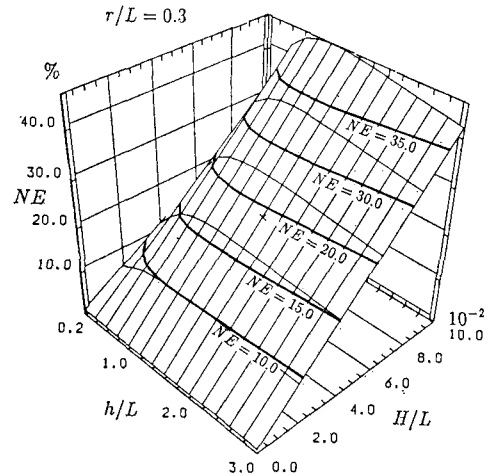


図-7 円柱に作用する波力の非線形影響

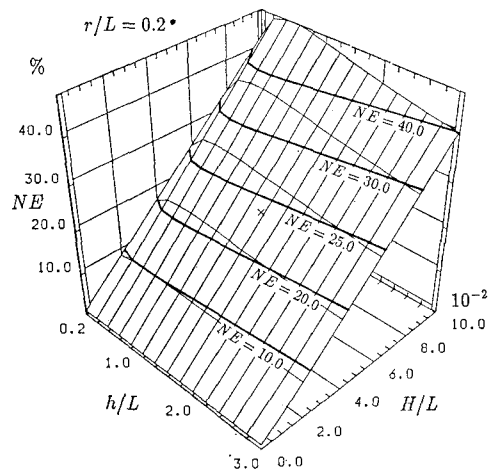


図-8 2本円柱(前方)に作用する波力の非線形影響

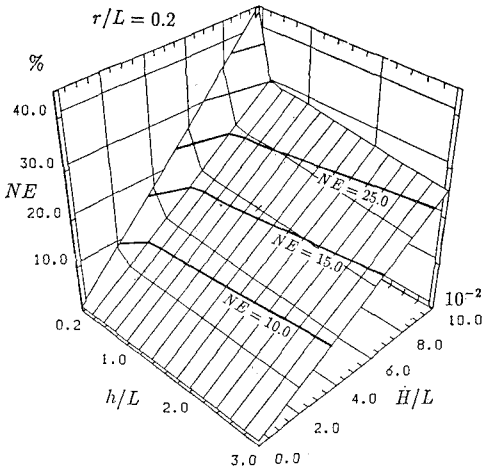


図-9 2本円柱(後方)に作用する波力の非線形影響

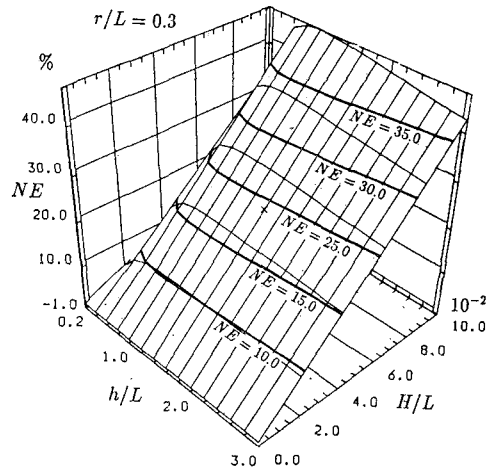


図-11 2本円柱(後方)に作用する波力の非線形影響

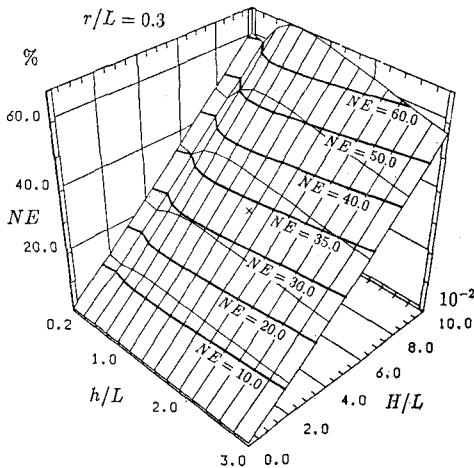


図-10 2本円柱(前方)に作用する波力の非線形影響

で最大となる。しかし、2本円柱の後方の NE は、単独及び前方の円柱に比べて全体的には10%近く小さいが、水深波長比 h/L が小さくなっていくと NE は大きくなり、単独円柱と同等となる。

これらのことから、2本円柱に作用する波力に及ぼす自由表現の非線形性は、物体相互の干渉により単独の円柱のそれに比べて性状は複雑となることがわかる。

6. 結 言

1) 自由表面の無限積分にラグール積分を応用する手法を開発し、数値実験によりその積分値の収束状況を示して、本手法の有用性を確認した。2) 水槽実験結果と数値計算結果を比較検討することにより本研究で示した非線形波力の数値計算法の妥当性を確認した。3) 系統的に数値計算を行うことにより、水深波長比及び波形勾配に対する波力の非線形影響を示すチャートを作成し、非線形波力の特性を明らかにするとともに、実際の設計に供しえるものとした。

謝 辞:

本論文作成に当たり、日大理工・柴山泰亮君、増田研究室の諸氏に多大なるご助力をいただいた。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 喜岡 渉・石田 昭(1984): 円柱に作用する第2次近似回折波力, 第31回海岸工学講演会論文集。
- 日本造船学会編(1987): 浮体に働く非線形流体力とその応答, 日本造船学会誌, 699号, pp. 4~38。
- 増田光一・坂田親弘・加藤 渉(1986): 複数の柱状体に作用する非線形波力に関する研究, [造船学会論文集, 160号, pp. 176~184。
- 増田光一・永井孝志(1987): 複数の柱状体に作用する非線形波力に関する研究(第2報), 造船学会論文集, 162号, pp. 222~229。
- 山口正隆・土屋義人(1974): 大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線形性の影響, 土木学会論文集, 229号, pp. 41~53。