

斜波中の複数鉛直板型潜堤の透過特性

清 川 哲 志*

1. はじめに

近年、景観上の観点から人工リーフ、潜堤などの没水型構造物が見直されている。その一つとして厚さのある複数の平行鉛直板と水平な床版からなる構造物があり、著者ら(1987)、吉田ら(1988)、喜岡ら(1989)等、複数の研究者によって種々の観点から研究されている(板の厚さを増し、床版の高さを海底面に一致させれば複列潜堤と考えることができる)。しかし、これらの研究はいずれも直角入射を対象にしており、斜め入射の場合の反射・透過特性は明らかにされていない。そこで本研究では、斜め入射の場合の反射透過特性を理論的に検討し、入射角が反射・透過特性に及ぼす影響を明らかにする。

波が斜めより入射する場合、波の場は3次元となる。しかし、構造物の断面形状が一様でかつ無限に続いている場合には、Kirby(1983)が行った変数変換を利用して、斜め入射の場合でも次元を一つ下げ2次元問題として取り扱うことが可能である。本研究では、2次元に変換された境界値問題に対応するグリーン関数を級数形で求め、これを介して偏微分方程式系を積分方程式に変換して数値的に解くという解析法で解いている。そして、その結果を用いて3次元問題の解を再構成している。

2. 解析理論

(1) 問題の定義

断面形状が一様でかつ無限に続いている没水構造物があり、それが水深一定の海域に設置されているものとする。この構造物は、複数の平行鉛直板と水平な床版からなっている。図-1に示すように、構造物はy軸方向に無限に続く一様な断面を有しているものとし、これに対して波が斜め方向から入射している場合を考える。入射波は波高H、角振動数ωの微小振幅波とし、図-1に示すようにx軸とθの角をなしてx軸の負の方向から正の方向に進行するものとする。また、流体は非粘性、非圧縮性の完全流体と仮定し、その運動は速度ポテンシャルによって表されるものとする。さらに、線形性を仮定

し、次のように場全体の速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z, t)$ を入射波のポテンシャルと反射・散乱波のポテンシャルの和で表す。

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{gH}{2\omega} \{ \phi_i(x, y, z) + \phi_s(x, y, z) \} e^{-i\omega t}$$
.....(1)

ここに、g: 重力加速度、 ϕ_i, ϕ_s : 入射波、散乱波のポテンシャル、i: 虚数単位 ($\equiv \sqrt{-1}$)、t: 時間。

入射波のポテンシャルは次式で表される。

$$\phi_i(x, y, z) = \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} e^{ik_0(x\cos\theta + y\sin\theta)}$$
.....(2)

ここに、 k_0 : 波数 ($k_0 \tanh k_0 h = \nu, \nu \equiv \omega^2/g$ の実正根)。

したがって、散乱波ポテンシャル ϕ_s を求めると、式(1)によって場全体の運動を支配する速度ポテンシャルが求められる。そして、得られた速度ポテンシャルを用いて波高分布、反射率、透過率等を求めることが可能となる。

(2) 基礎方程式と境界条件

未知ポテンシャル ϕ_s に関する基礎方程式と境界条件は以下のように表される。

$$\nabla^2 \phi_s = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad \text{.....(3)}$$

$$\partial \phi_s / \partial z - \nu \phi_i = 0 \quad (\text{on } S_F) \quad \text{.....(4)}$$

$$\partial \phi_s / \partial z = 0 \quad (\text{on } S_B) \quad \text{.....(5)}$$

$$\partial \phi_s / \partial n = -\partial \phi_i / \partial n \quad (\text{on } S_W) \quad \text{.....(6)}$$

ここに、 ∇^2 : 3次元ラプラシアン ($= \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$)、 $\partial/\partial n$: 領域に対しての内向き法線方向微分。

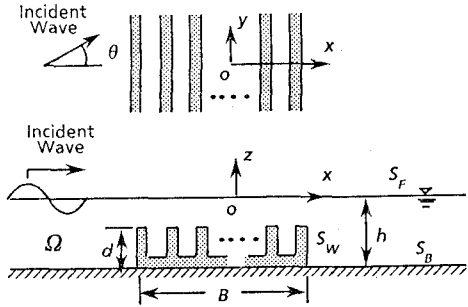


図-1 座標系と記号の定義

* 正会員 工博 清水建設(株) 大崎研究室 応用工学グループ

式(3)は基礎方程式, 式(4)は自由表面 S_F における運動学的・力学的条件, 式(5), (6)はそれぞれ海底面 S_B および構造物壁面の流体に接している部分 S_W における不透過条件である。また, ϕ_s はこれらの他に $x=\pm\infty$ で放射条件を満足する必要がある。

(3) 2次元問題への変換

構造物断面が y 方向に一様で無限に続く場合, ある点 $P=(x, y, z)$ で時間 $t=t$ に観測された現象は, その点より y 軸に平行に Δy だけ離れた点 $P'=(x, y+\Delta y, z)$ では, $t=t+\Delta t$ 時間に観測される。この時間の位相ずれ Δt は, 入射波が構造物に沿った軸と角度 θ をなして入射するため, 式(2)より,

$$\phi_i(P') = \phi_i(P) e^{ik_0 \Delta y \sin \theta} \quad \dots\dots\dots (7)$$

の関係が導かれるから, $\Delta t = k_0 \Delta y \sin \theta / \omega$ であることがわかる。すなわち, P 点における入射波が P' 点に到達するのに必要な時間だけ位相が遅れる。すなわち,

$$\Phi(P') e^{-i\omega t} = \Phi(P) e^{-i\omega(t-\Delta t)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

したがって, 式(1)より,

$$\{\phi_i(P') + \phi_s(P')\} e^{-i\omega t} = \{\phi_i(P) + \phi_s(P)\} e^{-i\omega(t-\Delta t)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

さらに,

$$\phi_i(P') + \phi_s(P') = \{\phi_i(P) + \phi_s(P)\} e^{ik_0 \Delta y \sin \theta} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(10)と式(8)より, 最終的に次の関係が導かれる。

$$\phi_s(P') = \phi_s(P) e^{ik_0 \Delta y \sin \theta} \quad \dots\dots\dots (11)$$

この性質を使えば, 変数変換によって3次元問題を2次元問題に変換することができる。ここで, 次式で定義される新しい関数 ϕ_s を導入する。

$$\phi_s(P) = \phi_s(P) e^{-ik_0 y \sin \theta} \quad \dots\dots\dots (12)$$

そうすると, $P'=(x, y+\Delta y, z)$ に対して

$$\phi_s(P') = \phi_s(P') e^{-ik_0(y+\Delta y)\sin\theta} \quad \dots\dots\dots (13)$$

であるから, 式(11)の関係を適用して変形すると,

$$\begin{aligned} \phi_s(P') &= \phi_s(P) e^{ik_0 \Delta y \sin \theta} \times e^{-ik_0(y+\Delta y)\sin\theta} \\ &= \phi_s(P) e^{-ik_0 y \sin \theta} = \phi_s(P) \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

となり, 結局次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} \phi_s(P') &= \phi_s(P) \quad \text{または} \\ \phi_s(x, y+\Delta y, z) &= \phi_s(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

任意の Δy に対して, 式(15)が成り立つわけであるから, ϕ_s は y に対する依存性は無いということがわかる。したがって, ϕ は x と z のみの関数となる。

式(12)を基礎方程式(3)および境界条件(4)~(6)に代入すると, ϕ_s に関する以下の境界値問題が得られる。

$$\nabla^2 \phi_s - k_0^2 \sin^2 \theta \phi_s = 0 \quad (|x| < \infty, -h \leq z \leq 0) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\partial \phi_s / \partial z - \nu \phi_s = 0 \quad (z=0) \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\partial \phi_s / \partial z = 0 \quad (z=-h) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\partial \phi_s / \partial n = -f(x, z) \quad ((x, z) \in S_W) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$f(x, z) \equiv \{n_x \cdot \partial \phi_i / \partial x + n_z \cdot \partial \phi_i / \partial z\}^{-ik_0 y \sin \theta} \quad \dots\dots (20)$$

ここに, n_x, n_z は構造物表面上に立てた単位法線ベクトルのそれぞれ x, z 成分 ($n_y=0$)。また, ここでは ∇^2 は2次元ラプラシアン ($=\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$) を表す。

ϕ_s に関する2次元境界値問題(16)~(20)を解けば, ϕ_r に関する3次元問題(3)~(6)の解が式(12)の逆変換によって求められる。

(4) グリーン関数とその誘導

式(16)~(20)の境界値問題を直接解く代わりに, これに対応したグリーン関数を導入し, これを介して偏微分方程式を積分方程式に変換して, それを数値的に解く。

次に, グリーン関数の誘導について詳しく述べる。

グリーン関数 G は次の境界値問題の解として定義される。

$$\nabla^2 G - k_0^2 \sin \theta G = -\delta(x-\xi) \delta(z-\zeta) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\partial G / \partial z - \nu G = 0 \quad (z=0) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\partial G / \partial z = 0 \quad (z=-h) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに, δ : ディラックのデルタ関数, (ξ, ζ) : 領域内の点を表すパラメーター。

式(21)~(23)および放射条件は満足するグリーン関数 G を変数分離による固有関数展開の形で求める。そのために, まず $x=\xi$ および $z=\zeta$ を除いたすべての点で式(21)~(23)を満足する一般解を固有関数展開の形に求め, 次に, これが放射条件と $x=\xi, z=\zeta$ における特異性を満足するように一般解中の未定係数を決める。

まず, G を次のような変数分離形に仮定する。

$$G(x, z; \xi, \zeta) = X(x; \xi) Z(z; \zeta) \quad \dots\dots\dots (24)$$

これを式(21)に代入し, $x=\xi$ および $z=\zeta$ を除けば右辺が0となることを考慮して整理すると次式を得る。

$$\ddot{X}/X - k_0^2 \sin^2 \theta = \ddot{Z}/Z = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし, $\ddot{X}, \ddot{Z}$ はそれぞれの変数に関する2階微分を表す。

式(25)の Z に関する方程式を満足し, かつ境界条件(22), (23)を満足する正規化された固有関数系 $Z_n(z)$ ($n=0, 1, \dots$) は, 次のように表される。

$$Z_n(z) = C_n \gamma_n(z) \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし, 係数 C_n , 関数 $\gamma(z)$ はそれぞれ次式で定義される。

$$\left\{ \begin{aligned} C_n &= \sqrt{2(k_n^2 \mp \nu^2) / \{h(k_n^2 \mp \nu^2) \pm \nu\}} \\ \gamma_n(z) &= \begin{cases} \cosh k_0(h+z) & (n=0) \\ \cos k_n(h+z) & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad \dots\dots (27) \end{aligned} \right.$$

ここで, 復号は, $n=0$ のとき上, $n=1, 2, \dots$ のとき下をとる(以下の展開でも同様)。また, k_n ($n=1, 2, \dots$) は固有値 ($k_n \tan k_n h = -\nu, k_1 < k_2 < k_3 < \dots$) である。

式(26)に示したように, Z に関する境界値問題の解は, $n=0, 1, \dots$ に対応して無限個存在する。また, 線形性によりそれらの重ね合わせも解であることは明らかで

ある。したがって、これらを考慮すると、グリーン関数 G は次のような形に置けることがわかる。

$$G(x, z; \xi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x; \xi) c_n(\zeta) Z_n(z) \quad \dots\dots (28)$$

ここに、 $c_n(\zeta)$: ζ をパラメータとする定数。

一方、一般に Ψ_n を正規直交関数系とすると、次式が成り立つことが知られている。

$$\delta(r-r') = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(r) \Psi_n^*(r') \quad \dots\dots\dots (29)$$

ただし、 r および r' は任意の変数、 Ψ_n^* は Ψ_n の共役関数。

したがって、式(26)を使えば

$$\delta(z-\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(z) Z_n(\zeta) \quad \dots\dots\dots (30)$$

と表することができる。

式(28)を式(21)の左辺に、式(30)を同式の右辺に代入し、 $\delta(x-\xi)$ を総和記号の中に入れると、次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 X_n}{dx^2} + (\pm k_n^2 - k_0^2 \sin^2 \theta) X_n \right\} c_n(\zeta) Z_n(z) \\ = - \sum_{n=0}^{\infty} \delta(x-\xi) Z_n(z) Z_n(\zeta) \quad \dots\dots\dots (31)$$

式(31)が任意の x, z について成り立つための条件から次式が得られる。

$$\begin{cases} c_n(\zeta) = Z_n(\zeta) \\ d^2 X_n/dx^2 \pm \lambda_n^2 X_n = -\delta(x-\xi) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ただし、 λ_n は次式で定義される定数である。

$$\lambda_n = \begin{cases} k_0 |\cos \theta| & (n=0) \\ \sqrt{k_0^2 \sin^2 \theta + k_n^2} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (33)$$

次に式(32)の第2式を満足する X_n を具体的に求める。

式(32)の第2式は $x > \xi$ の領域に対して、次式となる。

$$d^2 X_n/dx^2 \pm \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (n=0, 1, \dots) \quad \dots\dots\dots (34)$$

線形常微分方程式の理論からよく知られているように、この一般解は $a_n^+(\xi)$, $a_n^-(\xi)$ ($n=0, 1, \dots$) を ξ をパラメータとする任意定数として次式のように表される。

$$X_n(x; \xi) = \begin{cases} a_0^+(\xi) e^{+i\lambda_0 x} + a_0^-(\xi) e^{-i\lambda_0 x} & (n=0) \\ a_n^+(\xi) e^{+i\lambda_n x} + a_n^-(\xi) e^{-i\lambda_n x} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここで、時間項 $e^{-i\omega t}$ を考えれば、式(35)の第1式の右辺第1項は x 軸の負から正の方向、第2項は逆に正の方向から負の方向へ向かって進行する波を表していることがわかる。

放射条件を考えると、 $x > \xi$ の領域では、十分大きな正の x に対する有限かつ x 軸の正の方向へ進む波でなければならない。したがって、 X_n は次式のようにでなければならないことがわかる。

$$X_n(x; \xi) = \begin{cases} a_0^+(\xi) e^{+i\lambda_0 x} & (n=0) \\ a_n^+(\xi) e^{-i\lambda_n x} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad \dots\dots (36)$$

同様に $x < \xi$ の領域で放射条件を満足するためには、

$$X_n(x; \xi) = \begin{cases} a_0^-(\xi) e^{-i\lambda_0 x} & (n=0) \\ a_n^+(\xi) e^{+i\lambda_n x} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad \dots\dots (37)$$

でなければならない。

式(36)および式(37)は、それぞれの領域で放射条件を満足している。したがって、 $x=\xi$ における特異性を満足するように係数 $a_n^+(\xi)$, $a_n^-(\xi)$ ($n=0, 1, \dots$) を決めればよい。グリーン関数の $x=\xi$ における特異性は、その点での X_n の連続性とその導関数の不連続性、すなわち

$$\begin{cases} X_n(\xi^+; \xi) = X_n(\xi^-; \xi) \\ dX_n/dx|_{x=\xi^+} - dX_n/dx|_{x=\xi^-} = -1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (38)$$

に起因する。そこで、式(36)および(37)をこれに代入すると、未定係数 $a_n^+(\xi)$, $a_n^-(\xi)$ ($n=0, 1, \dots$) に関する連立方程式が各 n ごとに得られる。そしてこれを解くと、

$$a_n^{\pm}(\xi) = \begin{cases} (i/2\lambda_0) e^{\mp i\lambda_0 \xi} & (n=0) \\ (1/2\lambda_n) e^{\mp i\lambda_n \xi} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (39)$$

ただし、ここでは復号は同順である。

これらの係数を式(36)および(37)に代入し、ひとまとめにすると次のようになる。

$$X_n(x; \xi) = \begin{cases} (i/2\lambda_0) e^{+i\lambda_0 |x-\xi|} & (n=0) \\ (1/2\lambda_n) e^{-\lambda_n |x-\xi|} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (40)$$

以上、求められた $c_n(\zeta)$ (式(32)の第1式) および $X_n(x; \xi)$ (式(40)) を式(28)に代入すると、グリーン関数が次のような形で求められる。

$$G(x, z; \xi, \zeta) = i(C_0/\lambda_0) \gamma_0(z) \gamma_0(\zeta) e^{i\lambda_0 |x-\xi|} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n/\lambda_n) \gamma_n(z) \gamma_n(\zeta) e^{-\lambda_n |x-\xi|} \quad \dots\dots\dots (41)$$

なお、このグリーン関数は、著者ら(1987)および中村ら(1988)によって独立に導かれているが、導く過程についてはまだ一般的とは言えないので、ここで詳述した。

(5) 積分方程式とその離散化

グリーン定理とグリーン関数 G を用いると、 ϕ_s に関する次の積分方程式を得る。

$$\gamma \phi_s(P) = \int_{S_W} \left\{ \phi_s(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} + G(P, Q) f(Q) \right\} ds \quad \dots\dots\dots (42)$$

ただし、 $P=(\xi, \zeta)$ は領域内の任意の点、 $Q=(x, z)$ は S_W 上の点、左辺の係数 γ は P が S_W 上にあるとき $1/2$ 、その他の場合には 1 、 n による微分は流体から見た内向き法線方向微分。

S_W を N 個の要素に分割する。そして、点 P, Q を各要素の中心点とし、各要素上におけるポテンシャル関数を中心点における値で代表させる。また、グリーン関数に関する積分は、各要素上で厳密に行う。このとき、式(42)は次の複素係数連立方程式となる。

$$\frac{1}{2} \phi_s(i) - \sum_{j=1}^N \int_{d_j} \frac{\partial G}{\partial n} ds \phi_s(j) = \sum_{j=1}^N \int_{d_j} G ds f(j) \quad (i=1 \sim N) \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここに、 $\phi_s(i)$, $f(i)$: i 番目要素の中心におけるそれぞれの関数値。

この連立方程式を数値的に解くことによって、構造物表面上の ϕ_s の値が求められ、任意点 P における値は式 (42) で $r=1$ として求められる。

3. 数値計算結果と考察

(1) 波浪場のシミュレーション

図—2 は、入射角度 θ が 0° , 10° , 20° , 30° の場合 (0° は正面入射になる) について、構造物周辺の波の場の時間変化の 1 周期分を $1/4$ 周期ごとに示したものである。堤体はそれぞれ図の中央に位置しており、図の左側が反射側、右側が透過側である。反射側では、 0° 入射の場合部分重複波、その他の場合斜め部分重複波の場が形成されていることがわかる。また、透過側では波高が低くなった波が入射角度に応じて抜けていくのがよくわかる。ここに示した一例からも本解析法の妥当性が示されたと考えられる。ちなみに、このときの透過率は 0° , 10° , 20° , 30° 入射に対し、それぞれ 0.316, 0.323, 0.346, 0.395 であり、斜め入射になることによって、透過率が上昇することがわかる。ただし、ここで示した例は、鉛直板は 2 枚で、 $d/h=0.9$, $B/h=2$, $B/L=0.35$ とした場合である (d : 天端高, h : 水深, B : 堤体幅, L : 入射波長)。また、壁厚は鉛直壁、床版共に堤体幅の $1/20$ としてある。

(2) 入射角による透過特性の変化

図—2 の場合と同じ構造物条件で、透過率 KT の堤体幅波長比 B/L に対する特性が、入射角によってどのように変化するかを調べた結果を図—3 に示す。入射角は、 0° , 10° , 20° , 30° , 40° としている。透過率が最小値を示

す 1 次固有周期の位置が、入射角が増すにつれて B/L の大きい方へずれているのがわかる。これは、入射角が増すと堤体と直交する向きの見かけの波長が短くなるためであるが、単純にシフトするわけではなく、透過率の極小値が大きくなると共に、なまった曲線となっている。これは、ダクト内の斜め多重反射の影響と思われる。

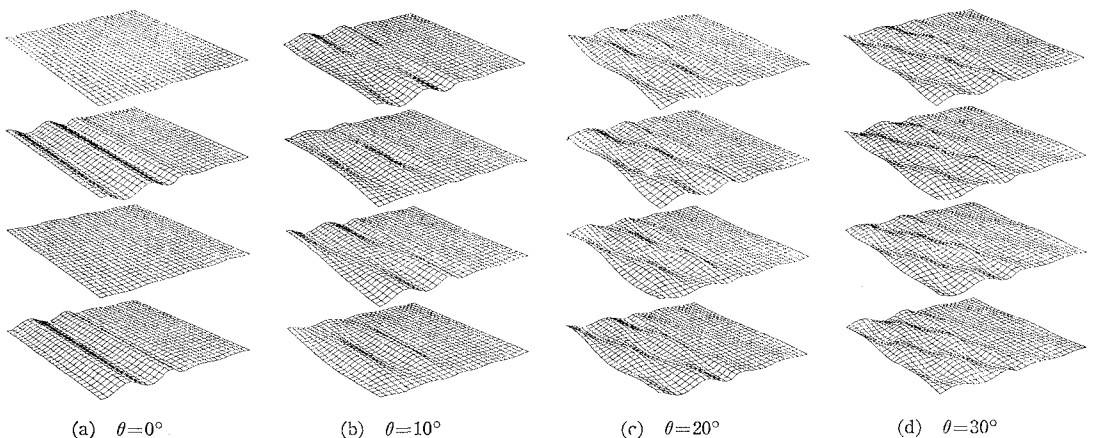
(3) 水深に対する相対堤体幅を大きくした場合

その他の条件は同じとし、水深に対する相対堤体幅 B/h を 3 とした場合についての結果を図—4 に示す。この場合も、入射角を 0° , 10° , 20° , 30° , 40° としている。

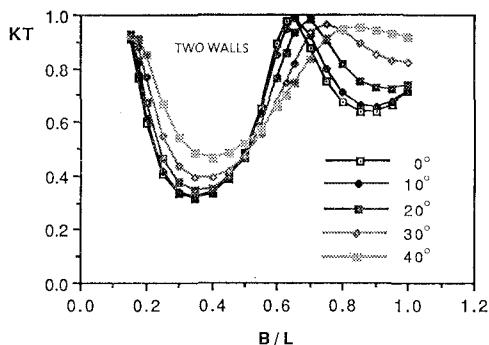
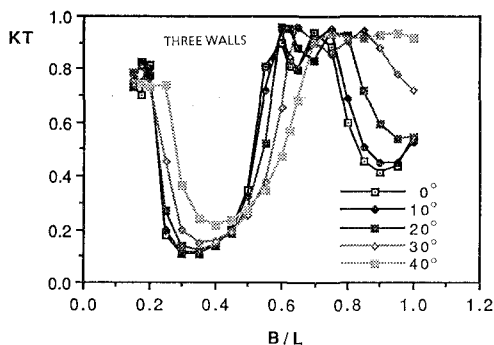
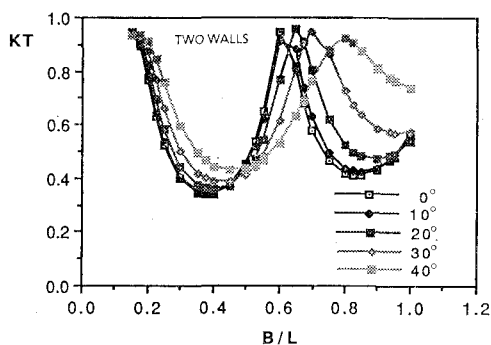
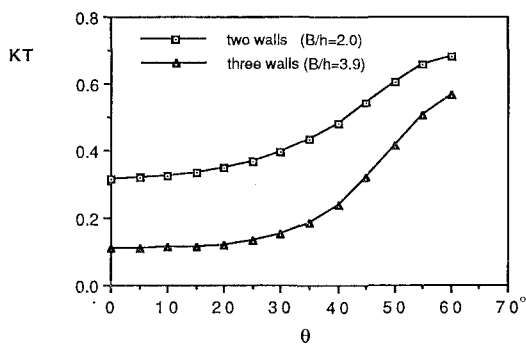
図からわかるように、2 次の固有周期の位置での透過率の極小値が、 $B/h=2$ の場合に比較して小さくなるという特徴がある。図—3 の場合と比較して見ると、入射角の影響が相対的に小さいことがわかる。

(4) 鉛直板を 3 枚とした場合

前 2 例は、いずれも鉛直板が 2 枚の場合の結果である。次に、鉛直板を 3 枚とした場合の結果を示す。堤体は、図—2 の場合の堤体を 2 列にびったり並べ、合わさる鉛直板を 1 枚取り去った形状をしている。したがって、 $d/h=0.9$, $B/h=3.9$ となっている。図—5 に結果を示す。ただし、横軸は全体の幅 B ではなく、1 ユニットの幅 B^* に対する B^*/L 比を取っている。したがって、図—3 と比較すると、同じ波に対して 2 ユニットになるとどうなるかわかる。 $B^*/L=0.6 \sim 0.75$ に小さな極小値が現れる等、1 ユニットの case と比較して若干複雑になっているが、基本特性は同じである。ただし、1 次の極小値の付近では大幅に透過率が下がっており、斜め入射となっても比較的広い周波数領域で、低い透過率を達成できることがわかる。これは、1 次の極小値の付近では、 $KT=KT_1 \times KT_2$ (KT_1, KT_2 : それぞれ、1 個目、2 個目のユニットによる透過率) に近い関係が成り立っているためと考えられる。



図—2 波浪場の時間変化の例

図—3 透過特性に及ぼす入射角の影響 ($B/h=2$)図—5 透過特性に及ぼす入射角の影響 ($B/h=3.9$)図—4 透過特性に及ぼす入射角の影響 ($B/h=3$)

図—6 入射角による透過率の変化

(5) 入射角による透過率の変化

図—3および図—5で1次の極小値がある $B/L=B^*/L=0.35$ に対し、入射角度を横軸にとって、透過率の変化を見た結果を図—6に示す。いずれも入射角が 30° を越えると急激に上昇することがわかる。しかし、 30° までは比較的フラットなので、通常範囲では斜め入射の場合にも有効であるといえよう。また、同じ理由から方向分散性を持った波にも有効であると考えられる。

4. 結 語

複列鉛直板型潜堤に斜めから入射するような場合の反射・透過特性について理論的に検討した結果、斜め入射による特性の変化はあるものの、大きな防波性能の低下はないことが明らかになった。複列鉛直板型潜堤は従来の潜堤に比べて大幅に材料を節約できるので有力なタイプの一つと考えられる。

参 考 文 献

- 清川哲志・三俣正和 (1987): Resonant Duct による波の透過特性, 土木学会第42回年次学術講演会概要集 II, pp. 532~533.
- 喜岡 渉・松野忠幸・源川秀樹 (1989): 複数配置した潜堤による波浪制御, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 549~553.
- 吉田明德・木佐貫徹・古賀論志・小島治幸 (1988): 複数鉛直板潜堤による波の制御, 海岸工学論文集, 第35巻, pp. 537~441.
- 中村孝幸・森田知志 (1988): 斜波中における透過性防波堤の消波効果と作用波力の特性について, 海岸工学論文集, 第35巻, pp. 547~551.
- Kirby, J. T. and R. A. Dalrymple (1983): Propagation of obliquely incident water waves over trench, J. Fluid Mech., vol. 133, pp. 47~63.
- Motyka, V. and T. Kiyokawa (1987): The wave diffraction problem in case of periodic structure—A solving method based on the Green's function theory and a variable transformation—, Technical report, Ohsaki research institute, Shimizu corporation, No. ORI-R-8709.