

ポテンシャル接続法(選点解法)による有限振幅波の境界値問題解析法

吉田明徳*・小島治幸**・鶴本良博***

1. ま え が き

海岸構造物や海洋構造物と有限振幅波の相互干渉を、速度ポテンシャルに関する境界値問題として解析するのは、微小振幅波に較べると理論式の展開は格段に煩雑で、しかも精度のよい解を得るのは難しい。困難さは、境界条件の非線形性とそれを適用すべき境界(水面波形)があらかじめわからないことに起因する。これに対処する方法は二つに大別され、初期状態から時間ステップごとに水面波形を追跡する非定常問題としての解析法(例えば、Faltinsen, 1978; Ijima・Nagata, 1980; Kim・Liu, 1983; 大山, 1985)と、水面境界条件を摂動展開して低次の解から高次の非線形解を得る定常問題としての解析法(例えば、経塚, 1980; 吉田ら, 1989)である。いずれも境界条件に関して物理量の微分値の算定が必要で、有限要素法や境界要素などの離散化手法を用いる限り、微分値の算定は数値差分によらざるをえず、時間ステップごとの、あるいは高次解への差分誤差の累積が生じる。

一方、線形定常問題の解析に広く用いられている解析法にポテンシャル接続法(例えば、井島, 1971)がある。この方法は、流体域が鉛直境界面によって矩形状に分割出来る場合に適用が限られるけれども、有限要素法や境界要素法に比べて精度が良く、物理量の微分が差分によらず理論的に得られることや、計算時間と計算機の容量が小さくて済むこと等の利点がある。したがって、これと摂動展開法とを併用すれば、有限振幅波(ストークス波)に関する有用な境界値問題解析法を得ることが期待できる。しかし、ポテンシャル接続法(従来の解法)では、直交関数に関する積分演算をおこなうため、非線形問題への適用は理論式の展開が恐ろしく煩雑となって実質上困難であった。したがって、適用例としては、著者らが知る限り、ステップ地形による波の変形の解析を試みた Massel (1988) の例があるに過ぎない。最近、著者らは、直交関数に関する積分演算を行うことなく未定係

数が決定できる方法(選点解法)を思いつき、線形問題に適用して、きわめて簡単に精度のよい解が得られることを確認した(吉田ら, 1990)。本論文は、この選点解法を用いることによって、ポテンシャル接続法を有限振幅波(ストークス波)に関する非線形境界値問題の解析に用いる方法を示すもので、2次のオーダーまでの基本的な理論式の展開と、固有関数展開した速度ポテンシャルを数値計算上有限項で打ち切ることによって生じる問題点について検討した結果を述べている。

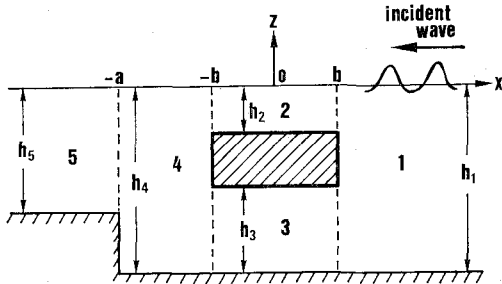


図-1 領域分割

2. 理論解析

2.1 基本仮定

図-1 に示すような構造物と水底境界条件の場合について理論式の展開を示すことにする。 x の正方向から水面波形 $\zeta(x, t)$ の有限振幅波(2次のストークス波)が入射する場合を考える。1次のオーダーの波(微小振幅波)の振幅を ζ_0 、波数を k 、角周波数を σ ($=2\pi/T$; T は周期)で表し、流体域を鉛直の境界面によっていくつかの一定水深 h_i ($i=1, 2, \dots$) の領域に分割する。流体運動の速度ポテンシャル $\Phi(x, z, t)$ を、微小パラメータ ε ($=k\zeta_0$) で次式のように展開できるものとする。

$$\Phi(x, z, t) = \frac{g}{k\sigma} (\varepsilon \phi^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2 \phi^{(2)}(x, z, t) + \dots) \quad (1)$$

ただし、 $\phi^{(1)}(x, z, t)$ 、 $\phi^{(2)}(x, z, t)$ はそれぞれ $O(\varepsilon)$ 、 $O(\varepsilon^2)$ の速度ポテンシャルを表す無次元の関数で、 g は重力加速度である。次のベルヌイの式、

* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木学科

** 正会員 Engr. 九州大学助手 工学部水工土木学科

*** 正会員 工修 高松工業高等専門学校助教 土木工学科

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\zeta - \frac{p}{\rho} = Q \quad \cdots (2)$$

に (Q は定数), 自由表面 ($z=\zeta(x, t)$) の力学的条件 $D(p/\rho)/Dt=0$ と, 運動学的境界条件 $D\zeta/Dt=-\partial\Phi/\partial z$ を用い, これに式(1)を代入して ε の同次の項を整理すると $z=\zeta(x, t)$ における水面境界条件は $z=0$ における $\phi^{(1)}(x, z, t)$ と $\phi^{(2)}(x, z, t)$ に関する境界条件として次式で与えられる.

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} = 0 \quad \cdots (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} = & -\frac{1}{k\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ & - \frac{1}{kg} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right\} \quad \cdots (4) \end{aligned}$$

ここでは単一周波数成分の波が入射する場合を考えているから, 式(3), (4)より $\phi^{(1)}(x, z, t)$ と $\phi^{(2)}(x, z, t)$ は次式のように表せる.

$$\phi^{(1)}(x, z, t) = R_0 [\phi_1^{(1)}(x, z) \exp(i\sigma t)] \quad \cdots (5)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(x, z, t) = & R_0 [\phi_0^{(2)}(x, z) + \phi_2^{(2)}(x, z) \exp(i2\sigma t)] \\ & \cdots (6) \end{aligned}$$

2.2 $O(\varepsilon)$ と $O(\varepsilon^2)$ のポテンシャル関数

自由水面を有する領域 (1), (2), (4), (5) の $O(\varepsilon)$ のポテンシャル関数 $\phi^{(1)}$ は, よく知られているように水面境界条件と水底の不透過境界条件を満足するラプラス方程式の解として次式で表せる.

$$\begin{aligned} \phi_1^{(1)}(x, z) = & \sum_{n=0}^{\infty} \{C_{in} \exp(k_{in}x) \\ & + D_{in} \exp(-k_{in}x)\} Z(k_{in}z) \quad \cdots (7) \end{aligned}$$

上式で, 添え字 (i) は各領域を意味し, C_{in} , D_{in} は未定係数で, $Z(k_{in}z) = \cos k_{in}(z+h_i)/\cos k_{in}h_i$, k_{in} は, $n=0$ のときは純虚数 (ik_i), $n \neq 0$ のときは実数として, 次式の根で与えられる.

$$\frac{\sigma^2 h_i}{g} = -k_{in} h_i \tan k_{in} h_i \quad (i=1, 2, 4, 5) \quad \cdots (8)$$

$O(\varepsilon^2)$ の水面境界条件 (4) 式に (5), (6) 式を代入し, さらに右辺に $O(\varepsilon)$ の解 (7) 式を代入して, 時間 t に関し, 右辺と左辺の定常項と 2σ の項をそれぞれ等置すると, $\phi_0^{(2)}(x, z)$ と $\phi_2^{(2)}(x, z)$ に関する水面境界条件が得られる. ただし, $\phi_0^{(2)}(x, z)$ は 2 次のオーダーまでの水面波形や圧力には寄与しないから, $\phi_2^{(2)}(x, z)$ についてのみ示すと次式のようなである. (領域を示す添え字 (i) は明記する必要がある場合を除いて省略する.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0^{(2)}}{\partial z} - \frac{(2\sigma)^2}{g} \phi_0^{(2)} = & \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \lambda(k_n, k_p) Q_{np}(x) \\ & + \bar{\lambda}(k_n, k_p) \bar{Q}_{np}(x) \} \quad \cdots (9) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} Q_{np}(x) = & C_n C_p \exp(k_{np}x) + D_n D_p \exp(-k_{np}x) \\ \bar{Q}_{np}(x) = & C_n D_p \exp(\bar{k}_{np}x) + C_p D_n \exp(-\bar{k}_{np}x) \\ & \cdots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(k_n, k_p) = & \frac{i}{2k} \left\{ 3 \left(\frac{\sigma^2}{g} \right)^2 + 2k_n k_p + k_p^2 \right\} \\ \bar{\lambda}(k_n, k_p) = & \frac{i}{2k} \left\{ 3 \left(\frac{\sigma^2}{g} \right)^2 - 2k_n k_p + k_p^2 \right\} \quad \cdots (11) \end{aligned}$$

$$k_{np} = k_n + k_p, \quad \bar{k}_{np} = k_n - k_p \quad \cdots (12)$$

したがって, (9) 式の水面境界条件と水底境界条件を満足するラプラス方程式の解として, 2 次のポテンシャル関数 $\phi_0^{(2)}(x, z)$ が (13) 式のように得られる. (なお, $O(\varepsilon)$ と $O(\varepsilon^2)$ のポテンシャル関数 $\phi^{(1)}(x, z)$ と $\phi_2^{(2)}(x, z)$ の周波数成分の次数を表す添え字はなくても自明であるから省略して $\phi^{(1)}(x, z)$ と $\phi^{(2)}(x, z)$ で表す. よって, 以後は領域を明記する場合のみポテンシャル関数に添え字がつく.)

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(x, z) = & \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_n^{(2)} \exp(k_n^{(2)}x) \\ & + D_n^{(2)} \exp(-k_n^{(2)}x) \} Z(k_n^{(2)}z) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_{mp}(x, z) \quad \cdots (13) \end{aligned}$$

ここに, $C_n^{(2)}$, $D_n^{(2)}$ は $O(\varepsilon^2)$ の未定係数で, $k_n^{(2)}$ は $O(\varepsilon)$ の k_n と同様, $n=0$ のときは純虚数 ($ik^{(2)}$), $n \neq 0$ のときは実数として, 次式の根で与えられる.

$$\frac{(2\sigma)^2 h_i}{g} = -k_n^{(2)} h_i \tan k_n^{(2)} h_i \quad (i=1, 2, 4, 5) \quad \cdots (14)$$

また $\Pi_{mp}(x, z)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \Pi_{mp}(x, z) = & \frac{\lambda(k_m, k_p)}{\mu_1(k_{mp})} Q_{mp}(x) Z(k_{mp}z) \\ & + \frac{\bar{\lambda}(k_m, k_p)}{\mu_1(\bar{k}_{mp})} \bar{Q}_{mp}(x) Z(\bar{k}_{mp}z) \quad \cdots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1(k_{mp}) = & \frac{(2\sigma)^2}{g} + k_{mp} \tan k_{mp} h \\ \mu_1(\bar{k}_{mp}) = & \frac{(2\sigma)^2}{g} + \bar{k}_{mp} \tan \bar{k}_{mp} h \quad \cdots (16) \end{aligned}$$

式 (13) の $\phi^{(2)}(x, z)$ において, 右辺の最初の級数項は (9) 式で右辺を 0 とおいた同次の水面境界条件を満足するラプラス方程式の一般解で, 第 2 項の 2 重級数項は (9) 式の非同次境界条件を満足するラプラス方程式の特解である.

物理的には, 第一項は, 構造物と入射波との非線形干渉によって励起される波(自由波)を表していて, その波数 $k^{(2)}$ は 2σ の周波数成分に関する分散方程式 ($n=0$ の場合の式 (14)) より決まる. また $n > 0$ の級数項は自由波の停止散乱波成分を表す. 第 2 項 $\Pi_{mp}(x, z)$ は $O(\varepsilon^2)$ の水面境界条件と周波数 σ の基本周波数成分波により決まるストークス波の 2 倍周波数成分を表している.

いま, (15) 式の第一項のうち x の負の方向へ進行する(停止散乱波は指数関数的に減衰する) 波の項を $m=p$ の場合について書き改めると次式を得る.

$$\frac{\lambda(k_m, k_m)}{\mu_1(k_{mm})} C_m C_m \exp[2k_m z] Z(k_{mm} z) \\ = -i \frac{3\sigma^2}{8gk} C_m^2 \frac{\cos 2k_m(z+h)}{\sin^4 2k_m h} \exp(2k_m x) \quad (17)$$

上式で $m=0$ ($=p$) とおくと、これは一定水深域を進行するストークス波のポテンシャルの2次成分と一致する。式(10)と(15)よりわかるように、 $\Pi_{mp}(x, z)$ には $C_m C_p$ および $D_m D_p$ で表わされる x の正および負の方向へ進行する同じ波どうしの自己干渉の項と、 $C_m D_p$ および $D_m C_p$ で表される互いに逆の方向へ進行する異なる波の干渉項があり、それぞれ、添え字が $m=p=0$ のときは進行波どうしの干渉項、 $m=0, p>0$ および $m>0, p=0$ のときは進行波と停止散乱波との干渉項、 $m>0, p>0$ のときは停止散乱波どうしの干渉項を意味する。

なお、構造物底面下の領域(3)では、オーダー(p)のポテンシャル関数は次式で与えられる。

$$\phi_3^{(p)}(x, z) = C_{30}^{(p)} \frac{x}{b} + D_{30}^{(p)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{3n}^{(p)} \exp\left(\frac{n\pi}{h_3} x\right) \right. \\ \left. + D_{3n}^{(p)} \exp\left(-\frac{n\pi}{h_3} x\right) \right\} \cos \frac{n\pi(z+(h-h_3))}{h_3} \quad (18)$$

2.3 選点解法による未定係数の決定

式(7), (13)で与えられる $O(\varepsilon)$ と $O(\varepsilon^2)$ の一般解には $C_n, D_n, C_n^{(2)}, D_n^{(2)}$ などの未定係数がふくまれる。これらの未定係数は鉛直境界面における速度ポテンシャル(およびその法線微分値)の連続条件より決められる。すなわち、境界面($x=b$)を例にとると、連続条件は各オーダー(p)のポテンシャル関数について次式で表される。

$$\phi_1^{(p)} = \begin{cases} \phi_2^{(p)} & (0 > z > -h_2) \\ \phi_3^{(p)} & (-h_2 > z > -h_1) \end{cases} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi_1^{(p)}}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\partial \phi_2^{(p)}}{\partial z} & (0 > z > -h_2) \\ 0 & (-h_2 > z > -(h-h_3)) \\ \frac{\partial \phi_3^{(p)}}{\partial x} & (-h_2 > z > -h_1) \end{cases} \quad (20)$$

同様の連続条件式が各鉛直境界面において成り立ち、これらの条件式より未定係数に関する連立一次方程式が得られるから、これを解いて未定係数を決めることができる。

未定係数に関する連立一次方程式は、従来、固有関数系 $Z(k_n z)$ が直交関数系をなすことを利用して導かれていた。これは、言いかえると鉛直境界面における連続条件の自乗誤差が、流体域で全体として最小となるような未定係数の組を決定しようというものである。しかし、この従来の解法では固有関数に関する積分演算が必要で、このため理論式の展開とその表示は著しく煩雑にな

り、図-1のように比較的分割領域数の多い流体域形状や、線形問題でも理論式が煩雑な波浪中の動揺浮体などを対象とする解析に、従来の解法を踏襲することは実質上不可能である。そこで、著者らは新たに、固有関数に関する積分演算を行うことなく未定係数を決定できる解法(選点解法)を提案した(吉田ら, 1990)。この解法は、境界面上に異なる z の値の計算点(選点) z_j を取り、その計算点上のみで(19)式と(20)式の連続条件が成り立つことを規定することによって、未定係数に関する一次関係式を得るものである。従来の解法に較べて理論式の展開はきわめて簡潔で、しかも精度のよい解が得られる。

この選点解法を用いて、まず、線形問題を解いて $O(\varepsilon)$ の未定係数を求め、ついで、これをストークス波成分の Π_{mp} 算定に用いて、 $O(\varepsilon^2)$ の未定係数に関する連立一次方程式を解くことになる。 $O(\varepsilon)$ と $O(\varepsilon^2)$ の未定係数が決まれば速度ポテンシャルが決まり、(2)式のベルヌイの式より水面波形と流体圧力を求めることができる。

3. 数値計算と考察

数値計算を行うに当たっては、固有関数で無限級数展開したポテンシャルを、数値計算上有限項で打ち切ることによって生じる問題についての検討が必要である。しかも、 $O(\varepsilon^2)$ の計算には一次解の項数、自由波のポテンシャルの項数、およびストークス波の二倍周波数成分の算定に用いる一次解の項数が相互に影響することになり、精度のよい解を得るためには $O(\varepsilon)$ の場合に較べ、検討すべき点が格段と多い。そこで、図-2に示す、最も単純なステップ地形を例に取って、これらの点についての検討を行った。

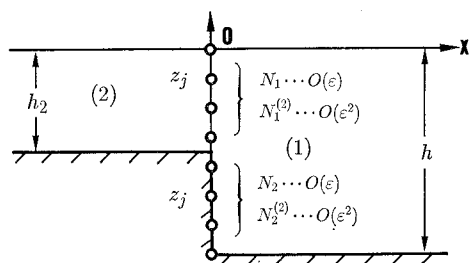


図-2 ステップ地形と鉛直境界上の計算点

選点解法の詳細な説明は省略するが、(a) 計算点の間隔は一定に取ること、(b) 計算点の個数と対応する領域のポテンシャルの未定係数の打ち切り項数とを一致させることは選点解法を用いる際の必須の条件である。いま、鉛直境界 $(-h_2 < z < 0)$ 上の計算点と、 $(-h < z < -h_2)$ 上の計算点の個数を $O(\varepsilon)$ では N_1, N_2 に、 $O(\varepsilon^2)$ では $N_1^{(2)}, N_2^{(2)}$ に取り、領域(1)と(2)のポテンシャルの固有関数展開の打ち切り項数を $O(\varepsilon)$ では (n_*, p_*) に、 $O(\varepsilon^2)$

では $(n_*^{(2)}, p_*^{(2)})$ で表すこととすると, $O(\varepsilon)$ では $n_*+1=N_1+N_2$, $p_*+1=N_1$ また $O(\varepsilon^2)$ では $n_*^{(2)}+1=N_1^{(2)}+N_2^{(2)}$, $p_*^{(2)}+1=N_1^{(2)}$ の関係にある. なお, ステップ上の水深 h_2 は領域(1)の水深 $h_1(=h)$ の半分 ($h_2/h=0.5$) に取っている. したがって, 打ち切り項数と境界上の計算点の個数との関係から, $n_*+1=2(p_*+1)$, $n_*^{(2)}+1=2(p_*^{(2)}+1)$ となって, 領域(1)におけるポテンシャル関数の級数項は常に偶数値を取る.

$Q(\varepsilon^2)$ のポテンシャルのストークス波成分 $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に用いる一次解の項数を領域(1), (2)で $\bar{n}+1$, $\bar{p}+1$ で表す. $\bar{n}+1$, $\bar{p}+1$ は, 数値計算上, 必ずしも $\bar{n}+1=n_*+1$, $\bar{p}+1=p_*+1$ に取る必要はなく $(\bar{n}+1) \leq (n_*+1)$, $(\bar{p}+1) \leq (p_*+1)$ の任意の値を取り得る. ただし, $O(\varepsilon^2)$ の打ち切り項数 $n_*^{(2)}$, $p_*^{(2)}$ と, $\bar{n}$, $\bar{p}$ は独立に取ることはできず, $n_*^{(2)} \geq 2\bar{n}$, $p_*^{(2)} \geq 2\bar{p}$ の関係が満足されるように取らねば妥当な解が得られない.

これは次のように説明できる. 境界値問題の外力項は $O(\varepsilon^2)$ ではストークス波成分 $\Pi_{mp}(x, z)$ である. この外力項の鉛直境界面における最も高次の振動成分は(15)式より $m=p=\bar{n}$ の場合の $Z(k_{\bar{n}}z_j) = \cos 2k_{\bar{n}}(z+h)/\cos 2k_{\bar{n}}h$ で与えられ, $2k_{\bar{n}}$ までの振動成分を含む. したがって, 外力項 $\Pi_{mp}(x, z)$ によって励起される自由波の停止散乱波成分の打ち切り項数 $n_*^{(2)}$ は少なくとも $2k_{\bar{n}}$ 以上 (領域(2)では $p_*^{(2)}$ を $2k_{\bar{p}}$ 以上) の振動成分を含むように取っておかなければならないことによる. 図-2のステップ地形の場合には, $n_*^{(2)}+1$ は偶数であるから, $n_*^{(2)}+1=2(\bar{n}+1)$, $p_*^{(2)}+1=2(\bar{p}+1)$ に取ればよく, それ以上に大きく取っても, 項数が $2\bar{n}+1$, $2\bar{p}+1$ を越えるところの未定係数値はほぼ0となる.

図-3, 図-4 は, 打ち切り項数 n_* , p_* を変えた場合の一次解の変動の様子を示している. 入射波側の領域(1)の係数 D_n は項数 n の値につれて, 交互に大小の値をとり, n が大きくなるにつれて, 一つとびの係数値どうしは大きさがほぼ等しくなる傾向にある. また, その位相 θ_n (ラジアン) は n の値の一つとびに π の位相差を有する. ステップ上の領域(2)の係数 C_p は n が大きくなるにつれて一様に減少し, 位相は隣合う係数どうしでだけ異なる. したがって, これらの一次解より, 未定係数に関する無限級数は, 項数 n が大きいところでは D_n は n の一つおきの係数どうし, C_p は隣合う係数どうしが, ほぼ相殺するようになると考えられ, 固有関数展開の一樣収束性が成り立つことが推測される. 図-3, 図-4 より知れるように, 打ち切り項数 n_* (同じく p_*) の違いによる係数値の差異は n が小さいところでは小さいが, n の値が n_* に近くなるにつれて, n_* の違いによる係数値の差異が大きくなる (ただし, 位相は変わらない). $\Pi_{mp}(x, z)$ において, 未定係数 $C_m C_p$, $D_m D_p$

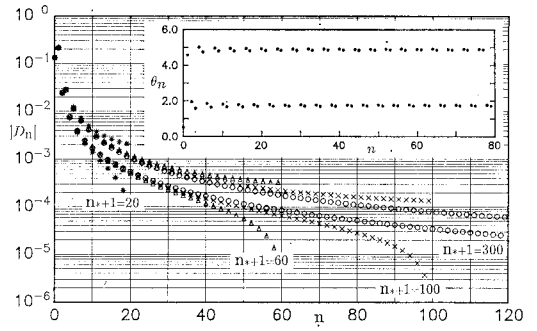


図-3 打ち切り項数による $O(\varepsilon)$ の解の相異 (領域(1), $kh=1.0$)

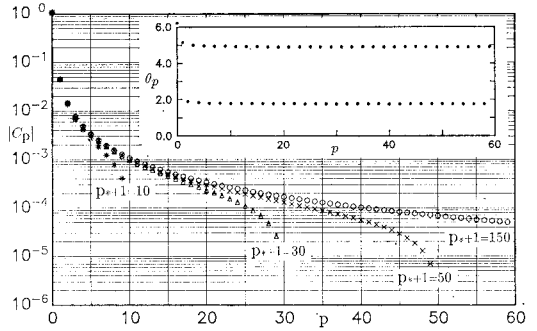


図-4 打ち切り項数による $O(\varepsilon)$ の解の相異 (領域(2), $kh=1.0$)

にかかる係数 $\lambda(k_m, k_p)/\mu(k_{mp})$ は n が大きくなると $O(n^4)$ で大きくなるから, Π_{mp} の算定に用いる一次解の項数 $\bar{n}+1$ (同じく $\bar{p}+1$) を同じに取っても, 打ち切り項数 n_* , p_* の違いによる未定係数値の差異が $O(\varepsilon^2)$ の解に大きく影響することが考えられる.

そこで, 一次解が二次の解におよぼす影響を見るため, $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に用いる一次解の違いによる $O(\varepsilon^2)$ の係数 $C_0^{(2)}$ と $D_0^{(2)}$ の変動を図-5 に示した. 図中○印は, (n_*+1, p_*+1) を, ほぼ計算機容量いっぱい $n_*+1=300$, $p_*+1=150$ に取った場合の一次解 (便宜上, 厳密解と呼ぶことにする) を用いた場合で, 厳密解を用いる場合には, ストークス波成分 $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に用いる一次解の項数としては $\bar{n}+1=10$ 項程度に取っておけば, ほぼ安定した解が得られることがわかる. ただし, △で示すように, 一次解の打ち切り項数と外力項の算定に用いる一次解の項数とを同じに ($\bar{n}+1=n_*+1$, $\bar{p}+1=p_*+1$) 取ると, 一次解と厳密解との差異が, 打ち切り項数近くで大きくなるために, 二次の解が大きく異なっている. 一方, 図中×で示す, $n_*+1=40$, $p_*+1=20$ に取った場合の解と, 厳密解を用いた場合の解を比較すると, $\bar{n}+1=10$ から 20 項程度まではほぼ同じである. したがって, 一次解の打ち切り項数としては, 打ち切り

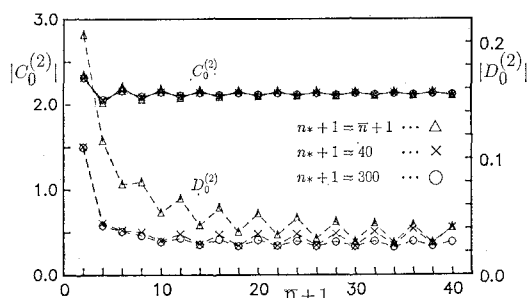


図-5 ストークス波の2倍周波数成分項 Π_{mp} の算定に用いる $O(\varepsilon)$ の解による $O(\varepsilon^2)$ の解の変動

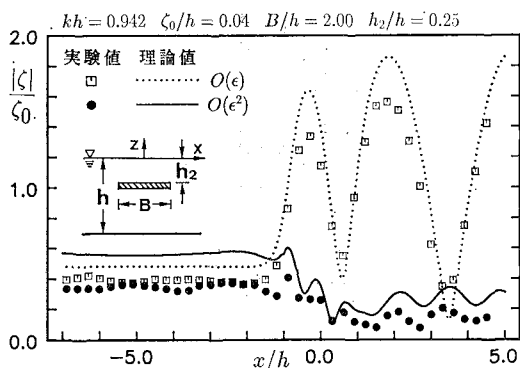


図-6 没水水平版近傍の $O(\varepsilon)$ と $O(\varepsilon^2)$ の波高分布

項数近傍での厳密解との差異を考慮して $n_*+1=20$ から 40 項程度 ($p_*+1=10$ から 20 項程度) に取り、 $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定には、その半分程度の項数を用いるようにすれば十分である。

図-6 は幅 B の没水水平版近傍の水面波形について、理論解を水槽実験によって検証した結果を示している。実験は、深さ 0.5 m、幅 0.3 m、長さ 28 m の水槽 (水深 $h=0.35$ m) 中に水平版模型を設置して、水平版の中心から前方 1.75 m、後方 2.8 m を 0.105 m 間隔で水面変動を測定し、そのフーリエ解析を行って一次と二次の水面波形の振幅を求めた。図中の破線が一次の、実線が二次の理論値を表し、□ と ● が一次と二次の実験値を表している。これを見ると理論値は実験値とよく一致しているといえる。

4. あとがき

有限振幅波(ストークス波)に関する波動境界値問題の

解析に、ポテンシャル接続法を用いる解析法を示した。これは、固有関数の直交性を利用する従来の解法に代えて、著者らが示したきわめて簡潔な解法(選点解法)を用いることによって実質的に可能となったものである。

本解析法の特長は、 $[\partial\phi^{(1)}/\partial x]^2$ や $[\partial\phi^{(1)}/\partial z]^2$ の非線形量が差分によらず理論的に得られることで、境界要素法や有限要素法による有限振幅波の解析法では必ず生じる差分誤差の影響が全くなく、きわめて精度のよい厳密解(数値計算上)が得られる。このため、さらに高次のオーダーの解析に拡張することも十分可能であると考えられる。

本解析法の適用は、流体域が仮定の鉛直境界面によって矩形状に分割できる場合に限られるが、境界要素法や有限要素法を用いる解析法に較べて極めて簡潔で、しかも計算機の容量や計算時間も著しく少なくて済む利点がある。本文では、解析法の基本的な部分と数値計算上の留意点についてのみ述べるにとどまったが、種々の構造物への適用は容易であって、構造物とストークス波の非線形干渉の解析に有用な解析法であると考えられる。

参考文献

- 井島武士 (1971): 最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用, 1971 年度水工学に関する夏期研究会講義集。
- 経塚雄策 (1980): 二次元物体に働く非線形流体力について (第報散乱問題), 日本造船学会論文集, 第 148 号, pp. 45~53.
- 大山 功 (1985): 境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp. 555~559.
- 吉田明徳・村上啓介・小島治幸・鶴本良博 (1989): グリーン公式による有限振幅波の定常境界値問題解析法, 海岸工学論文集, 第 36 巻, pp. 469~473.
- 吉田明徳・小島治幸・鶴本良博 (1990): 波動境界値問題におけるポテンシャル接続法の選点解法, 土木学会論文集, 第 417 号/II-13, pp. 310~319.
- Faltinsen, O. M. (1978): A Numerical Nonlinear Method of Sloshing in Tanks with Two-Dimensional Flow, J. of Ship Research, Vol. 22, No. 3, pp. 193~202.
- Ijima, T. and S. Nagata (1980): Numerical Analysis of Transient Finite Amplitude Waves by Boundary Integral and Perturbation Expansion, Coastal Engineering in Japan, Vol. 23, pp. 25~44.
- Kim, S. K., P. L.-F. Liu and J. A. Liggett (1983): Boundary Integral Equation Solutions for Solitary Wave Generation, Propagation and Run-up, Coastal Engineering, Vol. 7, pp. 299~317.
- Massel, S. R. (1983): Harmonic generation by waves propagating over a submerged step, Coastal Engineering, Vol. 7, pp. 357~380.