

拡張フラクタル次元を用いた海岸線形状の解析

今村文彦*・西山英彰**

1. はじめに

自然界に存在する複雑な現象・形状は、自己相似性の考えを導入したフラクタル幾何学により解析され、さまざまな分野で成果が上げられている。しかし、いくつかの基本的な問題が現在でも残されている。例えば、異なる次元の定義がいくつか存在したり、適用範囲の違いにより結果に差が生じる場合がある。フラクタル幾何学自体発展途中の段階であり、方法の確立が求められている(高安, 1986)。

本研究では、線分で表示される海岸線形状の解析へのフラクタル次元の適用において、重要な問題である粗視度の定義、有効範囲、解析開始点の位置について考察する。また、フラクタルの基本概念である自己相似性の拡張を試み、実際問題への有効性について検討する。実際の現象には、単一の自己相似性だけで説明できず、いくつかの特性や遷移過程状態の存在することが多い(Suzuki, 1984, Nakano, 1983)。さらに、自己相似性の成立しない範囲や遷移過程を調べることで、特徴的な長さを持たない自己相似性を基礎としているフラクタル次元が、代表的な長さを見つける手段とも成り得ることを考察する。そのために、同じ規模の湾を持つ海岸線について解析し、最後に、パワースペクトルとの関係について調べる。

2. 解析方法

(1) フラクタル次元の定義と海岸線の近似

この次元の定義は5つほどに分類されるが、ここでは海岸線形状の解析に最も適用性のある粗視度の度合を変化させる方法を採用する。図-1に示すように、この方法は一定の長さの線分集合に近似させる方法(Structured Walk Method 以下 S.W.M.)、あくまで線分の始点・終点を基本データ上におく方法(Equipaced Polygon Method 以下 E.P.M.)とに分けられる。前者は一定の粗視度間隔(δ)で近似できるが、反面、線分の始点終

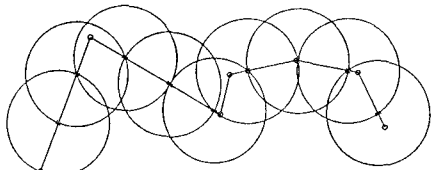
点がデータ上にはないときには補間によって与えなければならない。後者は、補間を用いず忠実に母データを尊重することが出来るが、データ間隔により δ にバラつきが生じる。ここでは、平均値を δ の代表値としている。さらに、2次元問題によく用いられる海岸線を正方格子に近似させる方法(Grid Counting Method 以下 G.C.M.)との比較も行う。

(2) 次元算出方法と問題点

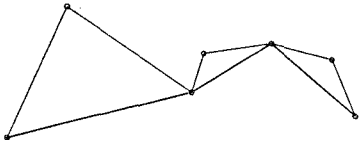
両対数グラフに海岸線長さ L と粗視度 r との関係を示した図は Richardson Plot (Richardson, 1961) と言われ、この関係直線の傾き(a)はフラクタル次元(D)と以下の関係を持つ。

$$a=1-D \dots\dots\dots (1)$$

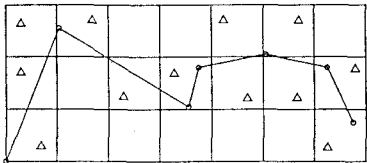
フラクタル次元はユークリッド次元と対応関係があり、非整数次元をとりうる次元の代表である。従って、次元が1.0のときには1次元の直線状と見なされ、次元が



(a)Structured Walk Method



(b)Equipaced Polygon Method



(c)Grid Counting Method

図-1 海岸線長さの定義

* 正員 工博 東北大学助手 工学部土木工学科
** 正員 長銀システム開発(株)

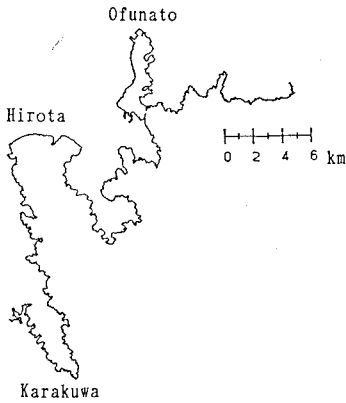


図-2 対象領域(1) 大船渡一唐桑

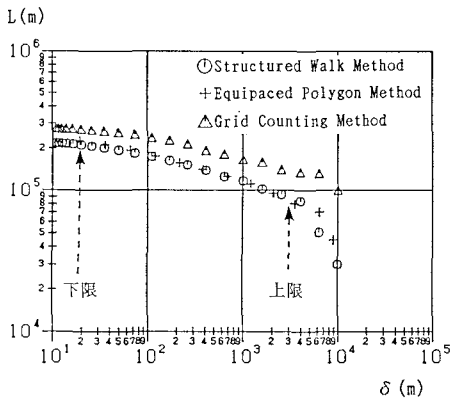


図-3 領域(1)に対する Richardson plot

2.0 に近づく と 2 次元での random な分布となる。図-2 に示す海岸線（代表的なリアス式海岸）を対象に得た Richardson plot は図-3 になる。 δ の減少と共に海岸線長さは増加し、スケールの小さい構造が存在する事が分かる。自己相似性が成立する場合に、このプロットが一本の直線で近似され、その傾きよりフラクタル次元が算出される。

しかし、実際には図-3 のように、 δ がある値以上になると方法の違いにより差が見られ、かつバラつきが生じてくる。また、 δ が小さくなると勾配が 0.0（次元が 1.0）に近づく傾向がある。これは粗視度の上下限と線分近似開始点の問題である。下限付近ではデジタルデータ間隔より δ が小さくなるために次元が 1.0 になり、上限以上では対象形状に対する線分近似が低下するため、線分近似の開始点の位置により長さは大きく変化する。

いくつかの領域に対し調べた結果、下限はデジタルデータ間隔の平均値にはほぼ等しく、上限は領域の代表水平直線長さに対応することが分かった（ δ の個数が 10 以

下）。この上下限の間が解析のための有効範囲であり、この範囲で解析すれば、方法や線分近似の違いによる差は小さい。ただし、G.C.M. の線分近似は低いため差が大きく、E.P.M. に対する計算時間も 500 倍以上が必要であり、実用的ではない。また、開始点の問題は、いくつかの地点から得られた結果の平均値をとることにより、ある程度は解決できる（Kaya, 1978）。ここでは、 δ の個数が 50 以下のものに対し、始点を変えた結果の平均化操作を行った。

3. 拡張フラクタル次元による解析

(1) 拡張フラクタルの定義

自己相似なランダム現象や形状を評価するためにフラクタル次元が用いられるが、スケールの違いによりこの自己相似性が変化する場合がある。そこで、スケール（粗視度）の違いに依存させたフラクタル次元の適用が必要となる。図-4 は次式で示される拡張フラクタル次元（multi-fractal dimension: D_m ）の結果である。

$$1 - D_m = \frac{d(\log L)}{d(\log \delta)}, \quad L: \text{海岸線長さ}, \dots (2)$$

この結果から明らかなように、有効範囲においても D_m は一定値ではなく、 δ の増加にともない D_m も大きくなる傾向を示す。この領域では、大きいスケールの部分ほど地形が複雑になることを意味する。

(2) 式で拡張フラクタル次元を算出するには、 δ の変化率（増分率）が問題となる。もちろん、 δ は出来るだけ多く選んだ方がよいが、複雑な地形ほど線分長さや始点位置の違いにより線分近似に差があるため、 D_m の分布にバラつきが生じる。従って、あまり多く δ を選ぶことは得策ではなく、図-4 などの場合には 1 オーダー上がる間に 5 から 7 つの δ を選べば十分である。今回は δ の変化率の目安として、 δ の上下限の有効範囲を 20 から 30 程度で分割するのが適当であった。

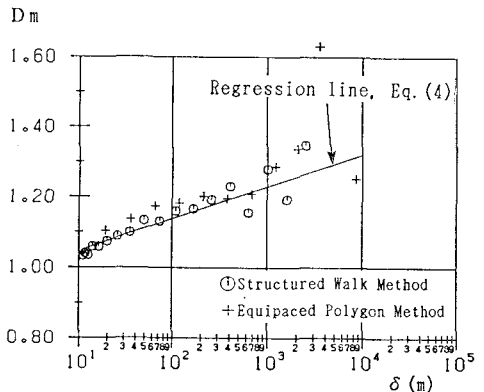


図-4 領域(1)に対する拡張フラクタル次元

(2) 回帰二次曲線モデル

拡張されたフラクタルは自己相似性の変化も捉えることができ非常に有用であるが、対象領域毎に図-4のようなグラフを描いて比較することは実用的ではない。そこで、海岸線長さ (L) を

$$L(\delta) = \alpha + \beta(\log \delta) + \gamma(\log \delta)^2 \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 α , β , γ : 回帰係数

なる二次曲線で近似させれば、フラクタル次元 (D_m) は

$$D_m(\delta) = (1 - \beta) - 2\gamma(\log \delta) \dots\dots\dots (4)$$

と与えられる。これは Longley & Batty (1989) の提案した multi-fractal model に近い。 D_m を $\log \delta$ の 1 次関数とするか δ の 1 次関数にするかの違いであるが、本モデルの方が海岸線形状に関しては適応性がよい。

このような回帰モデルを導入すれば、回帰係数の比較により、比較および分類が容易になる。特に、 D_m の勾配 γ により、全体的な複雑さだけでなく、複雑な形状の中に存在するスケールの違いによる構造の変化を明確にすることが出来る。例えば、自然海浜にある規模の人工構造物があると、(4) 式で表される係数 γ の絶対値が大きくなり、自己相似性に変化が生じることが分かる。また、 α は対象領域での海岸線形状の長さを代表し、 β は係数 γ に対応して変化する (西山・今村, 1990)。表-1 に三陸海岸での結果の一例を示す。以上のように D_m が (4) 式で表されるような場合は、準自己相似性を持つと言える。

表-1 三陸各海岸での回帰係数とフラクタル次元

場所名	α	β	γ	決定係数	D_{min}	D_{max}
角々浜 (リアス式だが直線状海岸)	4.25	0.11	0.001	0.981	1.11	1.11
田老 (リアス式で複雑海岸)	4.36	0.04	-0.044	0.999	1.05	1.25
八戸 (港などの人工海岸あり)	4.42	0.10	-0.056	0.987	1.06	1.27
釜石 (人工海岸と複雑形状海岸)	4.35	0.21	-0.085	0.994	1.01	1.35

(3) 特徴的な長さを持つ海岸線形状

ところが、回帰二次曲線モデルによっても表現できない場合がある。特徴的な長さが存在する場合である。同じような規模を持つ湾が多くある海岸線 (図-5) を対象に D_m を求めると、図-7 の結果が得られる。 δ が 1×10^3 m 付近から D_m は急激な増加傾向を示し、 4×10^3 m でピークを持つ。これは、各湾の湾長サイズに相当しており、この領域で支配的な長さであることが分かる。このように、(2) 式の拡張フラクタルの変化を調べて行けば、急激に海岸線長さが変化するため D_m の値が大きくなる場所が見つかる。この時の δ が領域の代表長さに相当するようである。

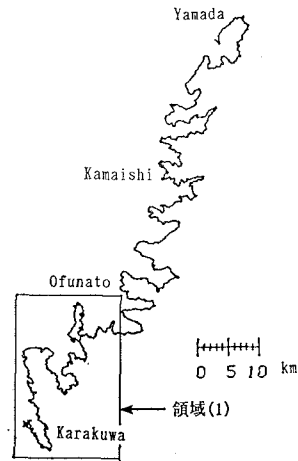


図-5 対象領域(2) 山田-唐桑

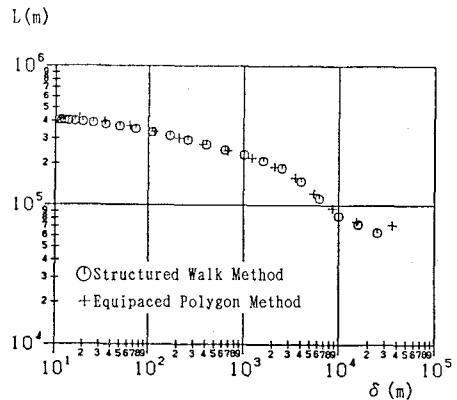


図-6 領域(2)に対する Richardson Plot

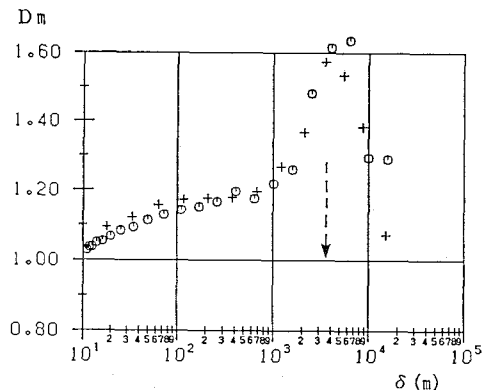


図-7 領域(2)に対する拡張フラクタル次元

ここでは、(4) 式で示す 1 本の回帰直線では D_m を近似できない。逆にこの性質を利用して、特徴的な長さを持つか否かを判断できる。三陸海岸で検討した結果、データと回帰曲線との相関を表わす指標である決定係数

が 0.98 以下であれば、なんらかの代表長さを持つようである。

4. スペクトルとの関係

図-7 で得られたピーク値 δ が実際に代表的な長さであるかを、さらに確認するにはスペクトルとの対応関係を調べることがよい。粗視度 δ の度合を変化させることは、スペクトル法での移動平均幅やカットオフ周波数を変換することに相当する。従って、図-5 や 7 で得た拡張フラクタル次元はスペクトルの分布と強い関連を持つはずである。

(1) 正弦波を対象とした例

まず始めに、解析対象を正弦波とし、対象の長さおよび (2) 式中の微分操作を解析的に評価した結果との比較を試みる。振幅 A 、波長 λ (波長: $k=2\pi/\lambda$) の正弦波の一周周期長さは次式に示す 2 つの方法により求められる。

$$L_1 = \int_0^\lambda \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = \int_0^\lambda \sqrt{1 + (Ak)^2 \cos^2(kx)} dx \\ \rightarrow \sum_{n=0}^N \sqrt{1 + (Ak)^2 \cos^2(kn\delta)} \delta \\ (dx = \delta, \lambda = N\delta) \dots \dots \dots (5)$$

$$L_2 = \int_0^\lambda \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ \rightarrow \sum_{n=1}^N \sqrt{\delta^2 + \{\sin((n+1)k\delta) - \sin(nk\delta)\}^2} \\ \dots \dots \dots (6)$$

両者とも、 δ が小さくなる範囲で厳密解に収束するが、図-8 に示した結果のように、(5) 式による値は振幅が大きく、厳密解を越えるものも表れる。これは δ が粗いと (5) 式による近似度の低下が大きくなるためである。図-1 に示した線分近似方法を考えても (6) 式のモデルが妥当である。なお、図-8 中の結果がギザギザ折れ曲がっているのは分割数の問題で、波長に対し δ が割り切れない場合には、余りが生じて長さが過小に評価されるためである。これを避けるため積分範囲を広げ 4 波長分としたが、まだ完全に除去されていない。

D_m は (2) 式を整理した次式に (6) 式を代入して得られる。

$$D_m = 1 - \frac{d(\log L)}{d(\log \delta)} = 1 - \frac{\delta}{L} \frac{dL}{d\delta} \dots \dots \dots (7)$$

図-9 には、従来通り (2) 式を差分操作して得た結果 (星印) と (7) 式の微分操作による結果 (実線) を示す。両者とも $\delta/\lambda=0.5$ で顕著なピークが存在し、波長の半分が代表的長さとして抽出されることが分かる。また、3.(1) で δ の差分間隔の選び方に言及し、バラ付きが生じるのは δ の粗いときの近似度によるとしたが、(7) 式の差分による結果に振動成分が存在することか

正弦波の長さ (4 波長分)

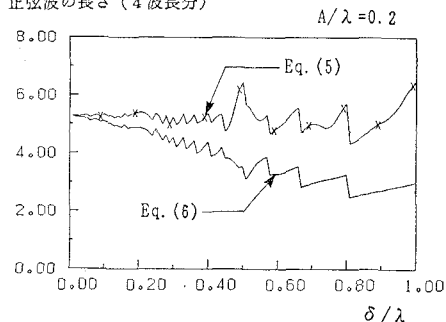


図-8 正弦波の長さの比較

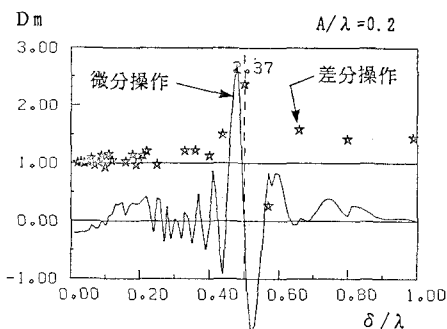


図-9 正弦波を対象とした拡張フラクタル次元

ら、差分間隔を小さくしてもバラ付きが表れてくる事が分かる。

図-9 には、いくつかの問題点が含まれている。1 つは、 D_m の値であり、(7) 式の解が $\delta/\lambda \rightarrow 0.0, 1.0$ のとき D_m が 0.0 に近づく事や $\delta/\lambda=0.5$ でのピーク値が 2.0 を越えることである。もう 1 つは、解析対象を何波長分とするかでピーク値が変化することである。

(2) パワースペクトルとの比較

1 つの成分が卓越する場合といくつかの成分が存在する場合についてフラクタル次元と比較する。この結果を図-10, 11 に示す。横軸には δ と各波長成分の半分 ($\lambda/2$) を選んでいる。正弦波での検討結果から波長の半分を選んでいる。これらの図より、スペクトルのピークに対応して D_m の値が大きいたことが分かる。ただし、 λ が大きい場所では対応が悪く、 δ の上限付近での D_m の値は信頼できない。

5. おわりに

フラクタル次元を算出する際の基本問題について三陸海岸を対象に検討を行った。線分近似方法は S.W.M. か E.P.M. が有効であり、有効範囲では方法による差は小さい。粗視度の下限はデジタルデータの平均間隔と

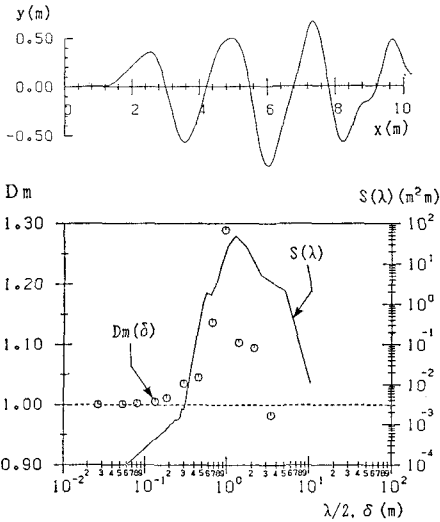


図-10 フラクタル次元とパワースペクトルとの関係(1)

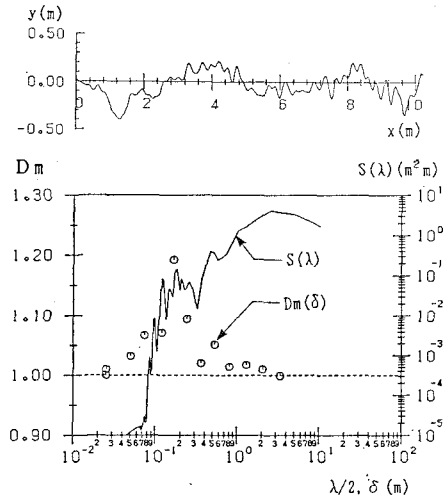


図-11 フラクタル次元とパワースペクトルとの関係(2)

考えてよく、上限は領域の代表水平直線長さに対応するが、始点位置を変え平均化操作を行えば、上限をさらに広げられる可能性がある。海岸線形状の解析には(2)式で示される拡張フラクタル次元を基礎とした回帰二次曲線モデルが有効である。このモデルに適用しない形状は、拡張フラクタル次元の急激な変化が存在し、何らかの代表長さを持つ。これは正弦波の波長の半分に相当し、スペクトルとの比較によっても定性的に説明できるが、定量的な関係には問題が残されている。

謝辞：本研究を進める際には東北大学首藤伸夫教授に貴重な助言を頂いた。また、本論文の公表にあたり、小川記念基金の補助を受けた。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 高安秀樹 (1986): フラクタル, 朝倉書店, 186p.
- 西山英彰・今村文彦 (1990): 拡張フラクタル次元を用いた海岸線形状の性質, 平成元年度土木学会東北支部, pp. 192~193.
- Kaya, B. H. (1978): Specification of the ruggedness and/or texture of a fineparticle profile by its Fractal dimension, Powder Technology 21, pp. 1~16.
- Longley, P. A. and M. Batty (1989): On the Fractal measurement of geographical boundaries, Geographical Analysis, Vol. 21, No. 1, pp. 47~67.
- Nakano, T. (1983): A "fractal" study of some rias coastlines in Japan, Ann. Rep. Inst. Geosci. Univ. Tsukuba, No. 9, pp. 75~80.
- Richardson, L. F. (1961): The problem of contiguity: an appendix to statistics of deadly quarrels, General Systems Yearbook 6, pp. 139~187.
- Suzuki, M. (1984): Finite-size scaling for transient similarity and Fractals, prog. Theor. Phys., Vol. 71, No. 6, Progress Letters, pp. 1397~1400.