

振動乱流境界層における流れと浮遊砂移動の数値シミュレーション法の検討

Patricia G. Pena-Santana*・渡辺 晃**・磯部雅彦***

1. 緒 言

浮遊砂は掃流砂や sheet flow と並んで重要な砂移動形態であり, Bijker *et al.* (1976), 砂村ら (1978), Sleath (1982) などによって移動機構が明らかにされてきたものの, 数学的モデルについてはまだ十分なものになっていない。浮遊砂の濃度分布を予測するために用いられる考え方で本質的なものは, 乱れが浮遊状態を維持するというものであり, したがって乱流場の精度のよい予測は浮遊砂現象の解明に不可欠である。

現在までに種々の乱流モデルが提案されているが, 多くの現象において精度が高く, 広く用いられているのが $k-\epsilon$ モデルである。このモデルは既に Sato *et al.* (1986), Hagatun・Eidsvik (1986), 辻本ら (1989) などによって振動乱流境界層流れに適用されている。しかし, $k-\epsilon$ モデルは, 完全に発達した定常乱流に対して提案された方法であるから, 振動流に対してそのまま適用できるとは限らず, Asano *et al.* (1988) は Jones・Launder (1972) の修正 $k-\epsilon$ モデル, Aydin・Shuto (1988) は Chien (1982) の修正 $k-\epsilon$ モデルをさらに若干変更したモデルを用いている。

本研究においては, 平坦床および砂連上における振動乱流境界層に, 標準 $k-\epsilon$ モデルおよび Jones・Launder (1972) と Chien (1982) による修正 $k-\epsilon$ モデルを適用して数値計算を行い, 結果を比較検討する。

浮遊砂濃度の鉛直分布に関しては, 指数関数で表される実験式 (Nielsen, 1986), 拡散方程式 (Horikawa・Watanabe, 1970), 1次元移流拡散方程式 (Hagatun・Eidsvik, 1986), および2次元移流拡散方程式 (辻本ら, 1989) 等が用いられている。Nielsen のものを除き, 浮遊砂の拡散係数は乱れ強度に関係づけられている。また, 基準高さとそのでの浮遊砂濃度の与え方については, 実験値の外挿 (Nielsen, 1986), 半経験公式 (沢本ら, 1979, 伊福・柿沼, 1988), 渦エネルギーが浮遊砂

を維持するという仮定 (Hayakawa *et al.*, 1983), 掃流砂量からの算定式 (van Rijn, 1984b), ピックアッププレート公式を用いるもの (辻本ら, 1989) などがあり, それぞれ長所と短所を有しており, また異なった値を与える。

本研究においては, 2次元移流拡散方程式を用いて浮遊砂の数値シミュレーションを行うが, 物理的な意味合いから基準濃度は van Rijn (1984a) によるピックアッププレートの経験公式を用いる。また, 基準高さについてはエネルギーの逸散率の境界と同じ高さにとる。これは計算格子のスケールから決まる量であるが, 後に示すようにこれを用いた浮遊濃度の計算結果は実験結果とよく一致する。

2. 数値モデル

(1) 基礎方程式

この問題は非圧縮性流体の2次元非定常運動であるため, Sato *et al.* (1986) と同様に流れ関数を用いた定式化を行う。また, 砂澱を含む境界形状を簡便に扱うため, 曲線座標系 (X, Z) を採用する。まず, 渦度方程式は式 (1) および (2) で表され, $k-\epsilon$ モデルの輸送方程式は (3)~(5) 式で表される。

$$\zeta = J \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nabla^2[(\nu + \nu_T)\zeta] - 2J \left[\frac{\partial^2 \nu_T}{\partial X^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2 \nu_T}{\partial X \partial Z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X \partial Z} + \frac{\partial^2 \nu_T}{\partial Z^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right] \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + J \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) \right] = J \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Z} \right] \right\} + P + G - \epsilon \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + J \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial Z} \left(\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) \right] = J \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial Z} \right] \right\} + [C_{\epsilon 1}(P + C_{\epsilon 3}G) - C_{\epsilon 2}\epsilon] \frac{\epsilon}{k} \dots\dots\dots (4)$$

* 工修 東京大学大学院 土木工学専攻
 ** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科
 *** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5)$$

ここに、 ζ は渦度、 ϕ は流れ関数、 ν は動粘性係数、 ν_T は渦動粘性係数、 k は乱流エネルギー、 ε はエネルギー逸散率であり、 J はヤコビアンを表す。また、 σ_k 、 σ_ε 、 $C_{\varepsilon 1}$ 、 $C_{\varepsilon 2}$ 、 $C_{\varepsilon 3}$ および C_μ は実験定数であって、それらの値は一樣乱流に対する標準的な値 (ASCE Task Committee on Turbulence Models in Hydraulics Computation, 1988) を用いる。

式 (3) と (4) における変数 P と G はそれぞれ乱れの生成項および浮力項を表して、次式で与えられる。

$$P = \nu_T \left\{ 2J \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(J^{1/2} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) - J \frac{\partial J^{-1/2}}{\partial Z} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial Z} \left(-J^{1/2} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + J \frac{\partial J^{-1/2}}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right]^2 \right\} + \left[\frac{\partial}{\partial Z} \left(J \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(J \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) \right]^2 \quad (6)$$

$$G = \beta g \left(\Gamma_x J \frac{\partial z}{\partial Z} \frac{\partial C}{\partial X} - \Gamma_z J \frac{\partial x}{\partial Z} \frac{\partial C}{\partial Z} \right) \quad (7)$$

ここに、 β は実験定数であり、 Γ_x および Γ_z は水平および鉛直方向の拡散係数であって、

$$\Gamma_x = \frac{\nu_T}{\sigma_{C1}} \quad (8)$$

$$\Gamma_z = \frac{\nu_T}{\sigma_{C2}} \quad (9)$$

と表され、 σ_{C1} および σ_{C2} は実験定数となる。

次に、浮遊砂濃度を求めるための、浮遊砂の移流拡散方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + J \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(C \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial Z} \left(C \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + w_0 \left(\frac{\partial x}{\partial Z} \frac{\partial C}{\partial X} - \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial C}{\partial Z} \right) \right] = J \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma_x \frac{\partial C}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Gamma_z \frac{\partial C}{\partial Z} \right) \right] \quad (10)$$

ここに、 C は浮遊砂濃度、 w_0 は砂の沈降速度である。

(2) 境界条件

上方における境界条件は、ある十分な高さ δ_h において渦度などが 0 であること、および砂漣表面との間の流量が境界層外縁での流速にこの高さ δ_h を乗じたものとなることである。これらは次式で表される。

$$\zeta = \frac{\partial k}{\partial Z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} = \Gamma_z \frac{\partial C}{\partial Z} + w_0 C = 0 \quad (11)$$

$$\phi = U_0 \delta_h [\cos(\omega t) + \alpha_1 \cos(2\omega t) + \alpha_2 \cos(3\omega t)] \quad (12)$$

上式中、 U_0 は主流の基本モードの流速振幅であり、 α_1 および α_2 はストークス波理論から得られる 2 倍および 3 倍周波数成分の相対振幅を表す。

砂漣表面における境界条件は、まず、流れ関数、乱れエネルギーおよび接線方向流速が 0 となることである。

$$\phi = k = \frac{\partial \phi}{\partial Z} = 0 \quad (13)$$

また、砂漣直上での渦度の定義式より次式が得られる。

$$\zeta = J \frac{2\phi}{Z_0^2} \quad (14)$$

エネルギー逸散率 ε の境界条件には、特別の注意を要する。すなわち、乱流モデルである k - ε モデルは粘性底層におけるエネルギー逸散率の評価が合理的でないため、これを壁面まで適用することができない。したがって、粘性底層を除く壁面近傍では対数分布則が成り立つとして、その範囲でのある点の高さを $Z = Z_0$ とし、対数分布則から得られる関係式

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} (k_{Z=Z_0})^{3/2}}{2\kappa Z [(Z_{Z=0})^{1/2} + (Z_{Z=0})^{1/2}]} \quad (15)$$

を ε の境界条件とする。ここに、 κ はカルマン定数である。

浮遊砂に対する境界条件は、砂漣からの浮遊砂のピックアップレートと拡散によるフラックスが等しくなるというものである。すなわち、

$$Pr = \Gamma_z \frac{\partial C}{\partial Z} \quad (16)$$

拡散によるフラックスが濃度勾配に比例することから、数値計算では砂漣のわずかな上方でこの関係进行评估する必要が生じる。ここでは、評価点を ε の評価点と同じにして、計算格子 1 つ分だけ砂漣上方にとることとする。ピックアップレートは、浮遊砂濃度の試行計算と実験結果との比較により、van Rijn (1984a) による公式において、係数を 0.00033 から 0.000125 としたものを用いることにする。すなわち、

$$Pr = 0.000125 D_*^{0.8} T^{1.5} \rho_s (g D_{50})^{0.5} \quad (17)$$

である。ここに、 ρ_s は砂の密度、また ρ を水の密度として $\Delta = (\rho_s - \rho)/\rho$ 、 g は重力加速度、 D_{50} は砂の中央粒径であり、 D_* および T は

$$D_* = D_{50} \left(\frac{\Delta g}{\nu^2} \right)^{1/3} \quad (18)$$

$$T = \left(\frac{u_{*}(x, t)}{u_{*, cr}} \right)^2 - 1 \quad (19)$$

によって定義される。ここに、 $u_{*, cr}$ は移動限界摩擦速度を表し、摩擦速度 $u_{*}(x, t)$ は k - ε モデルから次式で計算される。

$$u_{*}(x, t) = C_\mu^{1/4} k(x, t)^{1/2} \quad (20)$$

(3) 数値解法

支配方程式の時間積分には陰形式の差分法を用いた。Sato *et al.* (1986) と同様に、計算を高速かつ高精度で行うため、流れ関数 ϕ と渦度 ζ に対する方程式 (1) および (2) と、乱れエネルギー k およびエネルギー逸散率 ε に対する方程式 (3) および (4) を交互に解き、時間変化を求めた。層流解を初期条件とし、周期解

が得られるまで計算を行った。時間ステップごとの計算には加速緩和法を用いて収束性を高め、相対変化量 0.1% を収束判定基準とした。

計算領域に関しては、水平方向は砂漣1波長分であり、鉛直方向は実験条件によって変えた。造波水路における実験に対しては水深の約 20~30% であり、振動流装置での実験に対しては数値計算における安定性の問題によりケースごとに变化させた。

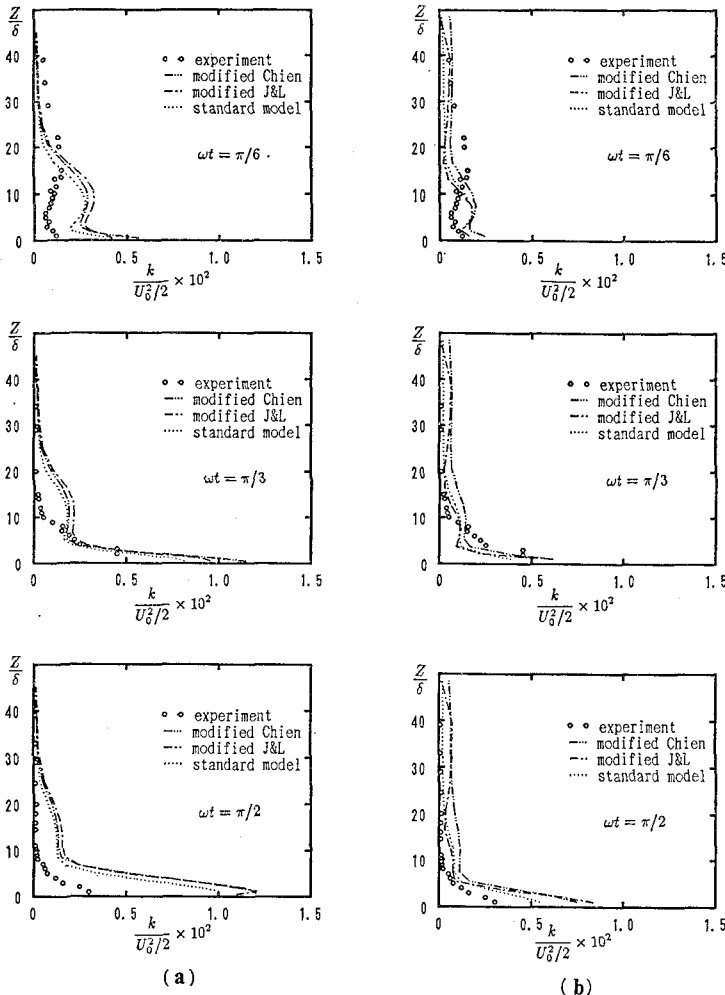
単位時間ステップは 0.01s とした。水平方向の格子間隔 ΔX は砂漣波長の 1/10 で一定である。鉛直方向の格子間隔 ΔZ は高さ Z に対して $\Delta Z = (\log r)(Z + Z_0/(r-1))$ というように上方に向かって単調増加させた。なお、 r の値は全ケースとも 1.2 とし、また、基準高 Z_0 は後述のように底面形状によって变化させる必要が生じた。平坦床についてはストークス層厚 $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ (ω は角周波数) によって、実験値との良好な一致を見

た。しかし、これは砂漣上ではあてはまらず、砂漣の形状と砂の粒径によって变化させた。このとき、 $\eta\lambda_*/D^2$ (η : 砂漣の波高, λ_* : 対称砂漣の波長または非対称砂れんの急勾配側のクレストとトラフの距離の2倍, D : 砂の粒径) とともに適切な Z_0 の値が増加する傾向がみられた。

浮力項における実験定数 β の値については、0 から 10 まで变化させても計算結果が有意に変化しなかったため、0 ととることとした。沈降速度は、20°C の静水中における値を用いた。また、 σ_{O1} および σ_{O2} は 1 とした。

3. 数値計算結果と実験結果との比較

平坦床上での正弦振動流実験については、Hayashi・Ohashi (1982) が平均流や乱れ強度について詳細な報告を行っている。ここでは、1) 標準 $k-\varepsilon$ モデル、2)



図—1 流速場の実測値と計算値の比較。(a) $Z_0 = \delta/2$ (b) $Z_0 = \delta$

Jones・Launder (1972) による修正 $k-\epsilon$ モデル, 3) Aydin・Shuto (1988) による修正も含めた Chien の修正 $k-\epsilon$ モデル, の3種類による計算結果を Hayashi・Ohashi による実験結果と比較した. 図-1 に結果を示すが, 3種のモデルについて数値計算結果はほぼ同じである. しかし, Z_0 をストークス層厚 δ の半分に取った図-1 (a) と, δ に取った図-1 (b) では大きな差が生じ, 底面境界条件の影響が大きいことがわかる. 実験値との比較から, ϵ に対する境界位置を与える Z_0 はストークス層厚 δ に取るのがよいことになる. これは, レイノルズ応力や平均流の比較においても同様であった.

砂漣上の振動流については, Sato *et al.* (1987) による実験結果との比較を行った. ここでも, 上記3種の $k-\epsilon$ モデルによる計算を行った. このうち2種の修正 $k-\epsilon$ モデルでは, 実験結果にみられる渦を再現することができなかったが, 図-2 に示すように標準 $k-\epsilon$ モデルを用いると渦がよく再現された.

浮遊砂濃度の鉛直分布については, 1周期平均濃度 $\bar{C}$ に対して, 市山 (1989) によって報告された3ケースの実験結果との比較を行ったが, 前述の渦の再現性から流れの計算には標準 $k-\epsilon$ モデルのみを用いた. 3ケース

の実験条件, および数値計算に用いた Z_0 と δ_h の値を表-1 に示す. なお, Z_0 はパラメータ $\eta\lambda_*/D^2$ と共に増加し, δ_h は水深の 20~30% ととっている. また, 境界層外縁の水粒子速度はストークス波理論第2次近似解から計算した. 図-3~5 は浮遊砂の鉛直分布の実験結果と計算結果を比較したものである. 図-3 に示すケース1については両者の一致はきわめて良好である. 図-4 に示すケース2でも一致はかなりよい. しかし, ケース3では両者の差が大きかったため, 図-5 の計算では拡散係数を増加させるため, σ_{C1} および σ_{C2} を 0.5 としてある.

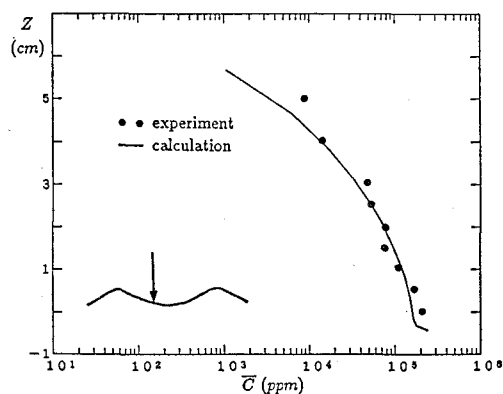


図-3 浮遊砂濃度の鉛直分布の計算値と実測値の比較. (ケース 1)

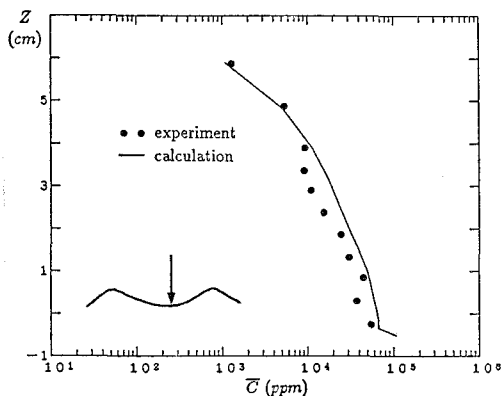


図-4 浮遊砂濃度の鉛直分布の計算値と実測値の比較. (ケース 2)

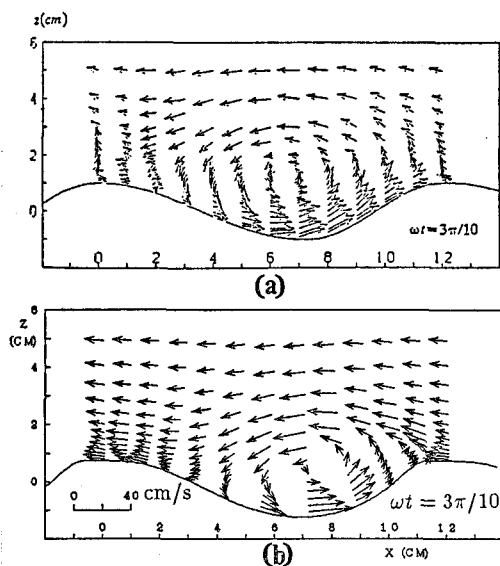


図-2 流速場の実測値 (a) と計算値 (b) の比較. ($T=4$ s, $\lambda=12$ cm, $\eta=2$ cm)

表-1 計算条件

ケース	T (s)	H (cm)	h (cm)	D (cm)	η (cm)	λ (cm)	Z_0 (cm)	δ_h (cm)	$\eta\lambda_*/D^2$
1	1.6	25	40	0.023	1.2	8.6	0.065	8.3	19508.5
2	1.7	20	50	0.023	1.5	10.0	0.100	10.6	28355.4
3	0.822	5.2	15	0.015	0.49	2.9	0.050	4.4	6315.6

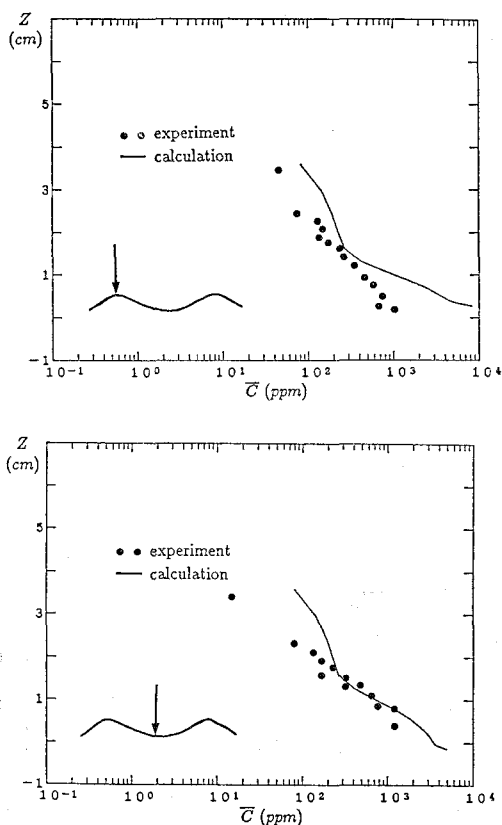


図-5 浮遊砂濃度の鉛直分布の計算値と実測値の比較。
(ケース 3)

4. 結 語

k - ϵ モデルにおけるエネルギー逸散率 ϵ に対する境界条件として、粘性底層の外側では対数分布則が成り立ち、エネルギーの局所平衡が成り立つものとし関係式を与えた。この適用性については理論的に不明確な点もあるものの、全般的に妥当な計算結果が得られた。

3種類の k - ϵ モデルの間の計算結果の差は小さかったが、 k に対する境界位置 Z_0 の影響は大きく、今回の計算ケースでは Z_0 をストークス層厚 δ に取った場合に実験値との一致がよかった。

砂漣上での振動流については、3種類のモデルのうち標準 k - ϵ モデルのみが砂漣上の渦を再現することができた。この場合、現在の計算法における数値的安定性の問題から、取り得る Z_0 の範囲は限られているものの、適切な Z_0 の値は $\eta\lambda_*/D^2$ と共に増加した。本研究でのモデルにより、砂漣上における浮遊砂濃度分布をある程度精度よく再現することができたが、このモデルの適用性を拡張するためにはさらに改良を行う必要がある。たとえば、ピックアップレートとそれを与える高さ Z_0 の合理的評価や、数値計算の安定化などである。

なお、横浜国立大学佐藤真司助教授に適切な教示とプログラムの提供を受けたことに謝意を表する。

参 考 文 献

- 市山 誠(1989): 海底砂漣上の流れと浮遊砂分布に関する基礎的研究, 長岡技術科学大学修士論文, 175 p.
- 伊福 誠・柿沼忠男(1988): 碎波帯における浮遊砂の濃度分布 (II), ながれ 7-1, 日本流体力学会誌, pp. 36~46.
- 沢本正樹・山口清一(1979): 波によって生じる砂漣近くの流れのモデル化と浮遊砂濃度の算定法, 土木学会論文報告集, 第288号, pp. 107~113.
- 砂村継夫・阪東浩造・堀川清司(1978): 非対称砂れん上での砂移動機構と漂砂量に関する実験的研究, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 250~254.
- 辻本剛三・市山 誠・早川典生・福嶋祐介(1989): 乱流モデルによる砂漣上の浮遊砂濃度と浮遊砂輸送機構, 第36回海岸工学講演会論文集, pp. 284~288.
- Asano, T., H. Godo and Y. Iwaki (1988): Application of low-Reynolds number turbulence model to oscillatory bottom boundary layers, Coastal Eng. in Japan, Vol. 30, No. 2, pp. 1~9.
- ASCE Task Committee on Turbulence Models in Hydraulic Computations (1988): Turbulence modelling on surface water flow and transport: Part I, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 114, No. 9, pp. 970~991.
- Aydin, I. and N. Shuto (1988): An application of the k - ϵ model to oscillatory boundary layers, Coastal Eng. in Japan, Vol. 30, No. 2, pp. 11~24.
- Bijker, E. W., E. van Hijum and P. Vellinga (1976): Sand transport by waves, Proc. 15th ICCE, ASCE, pp. 1149~1167.
- Hagatun, K. and K. Eidsvik (1986): Oscillating turbulent boundary layer with suspended sediments, J. Geophys. Res., Vol. 91, No. C11, pp. 13045~13055.
- Hayakawa, N., G. Tsujimoto and H. Hashimoto (1983): Velocity distribution and suspended sediment concentration over large scale ripples, Coastal Eng. in Japan, Vol. 26, pp. 91~100.
- Hayashi, T. and M. Ohashi (1982): A dynamical and visual study on the oscillatory turbulent boundary layer, Turbulent Shear Flows 3, Springer Verlag, pp. 18~33.
- Horikawa, K. and A. Watanabe (1970): Turbulence and sediment concentration due to wave, Coastal Eng. in Japan, Vol. 13, pp. 15~24.
- Jones, W. P. and B. E. Launder (1972): The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301~314.
- Nielen, P.(1986): Suspended sediment concentrations under waves, Coastal Eng., Vol. 10, pp. 23~31.
- Sato, S., H. Uehara and A. Watanabe (1986): Numerical simulation of the oscillatory boundary layer flow over ripples by a k - ϵ turbulence model, Coastal Eng. in Japan, Vol. 29, pp. 65~78.
- Sato, S., K. Shimcsako and A. Watanabe (1987): Measurements of oscillatory turbulent boundary layer flow above ripples with laser-doppler velocimeter, Coastal Eng. in Japan, Vol. 30, No. 1, pp. 89~98.
- Sleath, J. F. (1982): The suspension of sand by waves, J. Hydraulics Res., ASCE, Vol. 20, No. 5, pp. 439~452.
- van Rijn, L. C. (1984a): Sediment pick-up functions, J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 110, No. 10, pp. 1494~1502.
- van Rijn, L. C. (1984b): Sediment transport, part II: suspended load transport, J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 110, No. 11, pp. 1613~1641.