

クノイド波による湾水振動の解析

喜 岡 渉*・姜 林**

1. はじめに

任意形状の港湾の港内波高分布の計算方法としては、ヘルムホルツ方程式に2次元グリーン関数を導入して解く方法、グリーン公式に基づく方法、数値波動解析法および緩勾配方程式に基づく方法など、いくつかの手法が提案されている。しかしながら、共振特性をも含めた湾水振動の解析となると、計算上の問題や理論上の制約から、2次元グリーン関数法など限られた解析理論による検討しか行なわれていない。最近、開発が進んでいる緩勾配方程式による方法などは理論上、高次のオーダーに拡張することが可能であるが、現在のところ解析例の多くは線形理論に基づいている。これら線形理論に基づき得られた結果は、一様水深の場合水深とは無関係になり、当然のことながら入射波の波形勾配にも依存しないことになる。

本研究では、湾水応答に及ぼす波の非線形性の影響を検討するもので、特に湾奥における波高増幅率に及ぼす影響を調べることを目的としている。非線形理論に基づく湾水振動の解析例としては、わずかに Rogers・Mei (1978) によるものがあるのみで、彼らの理論において無視されている入射波の基本周波数の2倍以上の周波数成分の影響を含めて不明点が多く残されている。

理論解析にあたっては、入射波としてクノイド波の第1次近似解が成り立つものとし、具体的な計算は長方形湾を対象とした。

2. クノイド波の回折理論

非粘性、非圧縮および非回転の流体運動を考え、座標系としては図-1に示すように $x'-y'$ 平面を静止水面と一致させ、 x' 軸は鉛直上向きに正とする。水深は一定で h とし、波は x' 方向に入射する場合を考える。ただし、ここに示す第1次近似解においては、任意の入射角の波についても同様に扱うことが可能である。

入射波の波高を H_I 、波長を L として式(1)のよう

に無次元独立変数 $(x, y, z; t)$ を定義した上で、速度ポテンシャル ϕ' および水位変動 η' についても式(2)のように無次元表示する。

$$x = \frac{x'}{L}, \quad y = \frac{y'}{L}, \quad z = \frac{z'}{h}, \quad t = \frac{(gh)^{1/2} t'}{L} \quad \dots (1)$$

$$\phi = \frac{h\phi'}{H_I L (gh)^{1/2}}, \quad \eta = \frac{\eta'}{H_I} \quad \dots (2)$$

さらに、次式で定義される二つのパラメータ ε, δ を導入する。

$$\varepsilon = \frac{H_I}{h}, \quad \delta = \frac{h}{L} \quad \dots (3)$$

以上の無次元量を用いて基礎方程式を無次元表示したあと、基礎方程式のうちラプラス方程式と水底での境界条件式を満足するように ϕ を次式のように置く。

$$\phi = \Phi - \frac{\delta^2}{2}(z+1)^2 \nabla^2 \Phi + O(\delta^4) \quad \dots (4)$$

ただし、 ∇ は $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ を示す。上式を自由表面における運動学的境界条件式および力学的境界条件式に代入して、二つのパラメータ δ^2, ε がともに小さく、かつ同じオーダーとみなすことができるものとして式を整理すると、 Φ について次の Boussinesq の方程式を得る (例えば Mei, 1989)。

$$\nabla^2 \Phi - \Phi_{tt} = \varepsilon [(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2}(\Phi_t)^2]_t - \frac{\delta^2}{3}(\nabla^2 \Phi)_{tt} \quad \dots (5)$$

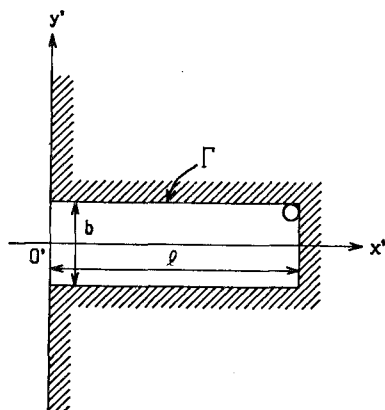


図-1 座標系と計算および測定点

* 正会員 Ph. D. 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科

** 学生員 M. E. 名古屋工業大学大学院 工学研究科

ここに、下付き添字の変数は微分を表わす。

異なる方向へ伝播する波を取り扱うことから、非線形干渉項による影響を考慮して $\tau = \varepsilon t$ として次のようにせつて展開する。

$$\Phi = \Phi_0(x, y, t; \tau) + \varepsilon \Phi_1(x, y, t; \tau) + \dots \quad (6)$$

上式を式(5)に代入して整理すると、 Φ_0, Φ_1 についてそれぞれ次の各式を得る。

$$\nabla^2 \Phi_0 - \Phi_{0tt} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_1 - \Phi_{1tt} = & \left[\nabla^2 \Phi_0 + \frac{1}{2} (\Phi_{0t})^2 \right]_t + 2\Phi_{0tt} \\ & - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon} (\nabla^2 \Phi_0)_{tt} \quad (8) \end{aligned}$$

式(7)の解は次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & \Phi_0^I(x-t; \tau) + \Phi_0^R(x+t; \tau) + \Phi_0^S(r-t; \tau) \\ & \dots \quad (9) \end{aligned}$$

ただし、 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ で、 Φ_0 は流体境界 Γ の外向方線方向 n における微分として次の境界条件式(10)を満足し、 $x \rightarrow -\infty$ で $\Phi_0 = \Phi_0^I + \Phi_0^R$ を満足しなければならない。

$$\Phi_{0n}^S = -(\Phi_0^I + \Phi_0^R)_n \quad (\text{on } \Gamma) \quad (10)$$

ここで、式(9)を式(8)に代入して、 Φ_1 は伝播に伴い成長しないという条件を課すこと、 Φ_0 に対する支配方程式はそれぞれの方向についての KdV 方程式によって記述され、非線形干渉項は無視できることが示される (Mei, 1989 および Lepelletier-Raichlen, 1988)。すなわち、 x 方向に入射する波とその反射波は KdV 方程式の解として次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \eta = & \varepsilon [cn^2 K(kx - \omega t) / \pi + cn^2 K(kx + \omega t) / \pi \\ & - 2(E/K - \kappa'^2) / \kappa^2] \quad (11) \end{aligned}$$

ここに、 cn はヤコビの楕円関数を示し、 ω は角周波数、 κ は母数で $\kappa'^2 = 1 - \kappa^2$ 、 K, E はそれぞれ第1種および第2種完全楕円積分である。なお、1次のオーダーではアーセル数 Ur と κ は次の関係式を満たす。

$$Ur = H_1 L^2 / h^3 = 16 \kappa^2 K / 3 \quad (12)$$

式(11)に対応する速度ポテンシャルは、楕円関数 cn^2 をフーリエ級数展開した上で x について積分して求めると、次式のように表される (Isaacson, 1977)。

$$\Phi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{im} (e^{im\kappa x} + e^{-im\kappa x}) e^{-im\omega t} \quad (13)$$

ここに、フーリエ係数 A_m は次式のように κ の関数として与えられる。

$$\begin{aligned} A_m = & \frac{2\pi^2}{\kappa^2 K^2} \left(\frac{m\gamma^m}{1 - \gamma^{2m}} \right), \quad \gamma = \text{EXP} \left[-\frac{\pi K(\kappa')}{K(\kappa)} \right] \\ & \dots \quad (14) \end{aligned}$$

ここで、湾境界 Γ によって生じる散乱波ポテンシャル Φ_0^S を次のように置く。

$$\Phi_0^S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{im} \Psi_m e^{-im\omega t} \quad (15)$$

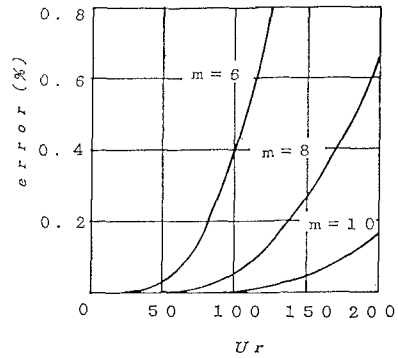


図-2 フーリエ級数の打ち切り誤差

上式中の Ψ_m は、1次のオーダーでは式(7)よりヘルムホルツの方程式(16)を満たし、 Γ 上の境界条件式(10)より次の式(17)と無限遠方における radiation 条件(18)を満足する関数として与えられる。

$$\nabla^2 \Psi_m + (mk)^2 \Psi_m = 0 \quad (16)$$

$$(\Psi_m)_n = 2 m \kappa n_x \sin(m \kappa x) \quad (\text{on } \Gamma) \quad (17)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left[\frac{\partial \Psi_m}{\partial r} - i m \kappa \Psi_m \right] = 0 \quad (18)$$

ただし、 n_x は外向法線ベクトルの x 方向成分を示す。上式を満足する Ψ_m を求めることができれば、任意地点の水位変動は次式により与えられ、波高の増幅率は絶対値をとることによって計算される。

$$\eta = \sum_{m=1}^{\infty} A_m [2 \cos(m \kappa x) + \Psi_m] e^{-im\omega t} \quad (19)$$

求めるべき速度ポテンシャル Ψ_m ($m=1, 2, 3, \dots$) は、上述のようにヘルムホルツ方程式(16)で記述され境界条件式(17)、(18)を満足するような通常の線形境界値問題に帰着して解くことができる。したがって、従来の線形解を求める方法によって算定することができるが、ここでは湾入り口付近の境界の任意性に対応しやすい Hwang-Tuck (1970) の方法を用いた。すなわち、 Ψ_m を次式のように流体境界 Γ に沿う線積分として表わす。

$$\Psi_m(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \sigma(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\Gamma \quad (20)$$

ただし、 (ξ, η) はソース点を示し、グリーン関数 G は0次の第1種ハンケル関数 $H_0^{(1)}$ により次式で与えられる。

$$G = i\pi H_0^{(1)}(m\kappa R) \quad (21)$$

ここに、 $R = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$ である。

式(20)の強度関数 σ は境界条件式(17)から次式によって与えられる。

$$-\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \sigma \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = 4m\kappa n_x \sin(m\kappa x) \quad (22)$$

上式は数値的に解く必要があるが、その計算手法について

ては Hwang・Tuck (1970) に詳しい。

実際の計算にあたってはフーリエ級数項は有限個で打ち切るため、解析精度上その誤差を評価しておく必要がある。散乱波ポテンシャル Ψ_m を含んだ級数項についての直接的な誤差の評価は困難であるので、ここでは次式によってフーリエ係数の打ち切り誤差を調べた。

$$Er = 1 - \sum_{m=0}^m A_m \dots \dots \dots (23)$$

図-2 に示す結果からわかるように、アーセル数 $Ur < 200$ では $m=10$ までとると係数値の誤差はたかだか 0.2% 程度である。

3. 長方形湾の周波数応答曲線

上述の解析方法は任意形状の湾について適用することができるが、ここでは図-1に示すように長さが l で幅が b であるような長方形湾を考えた。計算にあたっては、流体境界 Γ を $\Delta\Gamma$ の線分要素を用いて分割し、フーリエ級数項は $m=10$ までとった。線形解のみを計算する場合と比べると m 倍の波数に対応する散乱波ポテンシャルの計算が必要となり、式 (21) のグリーン関数は mk に対応して振動することから、回折パラメータ kl の値が大きくなると解析精度上、分割要素数を多くとら

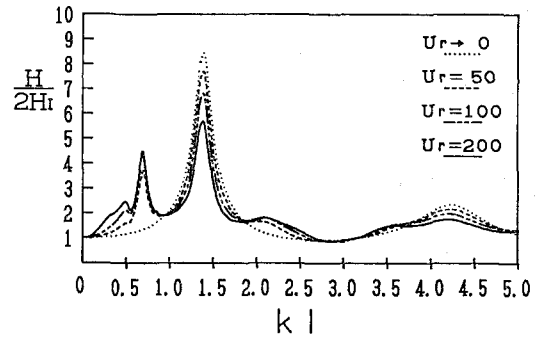


図-3 $b=0.2l$ の長方形湾の周波数応答曲線

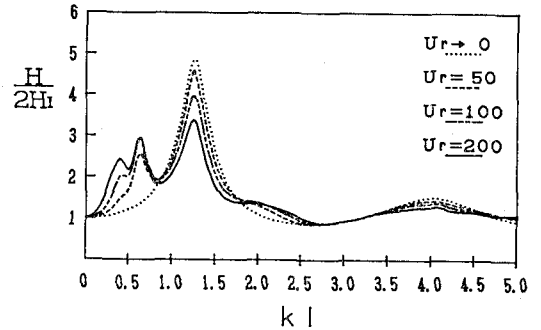
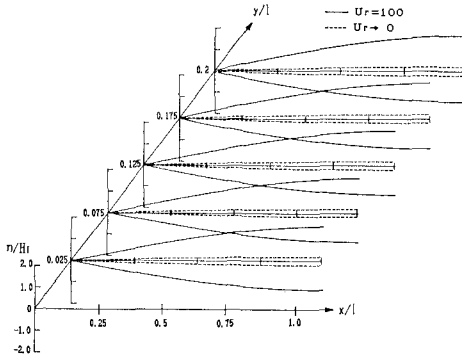
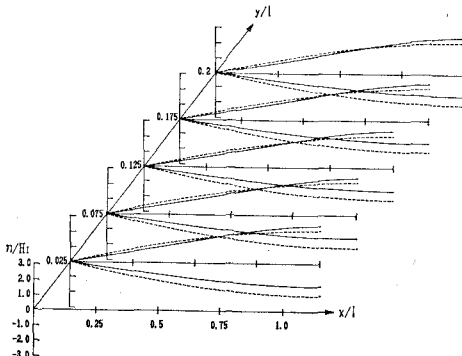


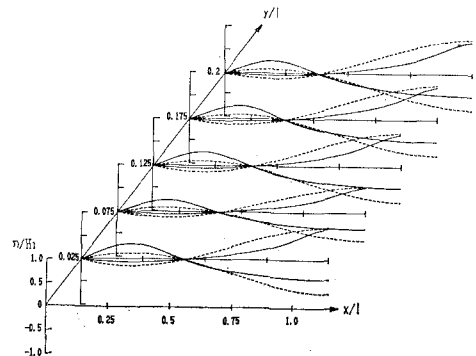
図-4 $b=0.4l$ の長方形湾の周波数応答曲線



(a) $kl=0.6$



(b) $kl=1.25$



(c) $kl=4.0$

図-5 共振モード付近における空間波形

なければならない。ここでは、 $mk\Delta\Gamma < 0.5$ となるように要素数を決めた。なお、ある mk に対応する散乱波ポテンシャルは他の kl の値における n 倍成分の nk に対応することを利用することによって、計算時間をいくぶん短縮することができる。

図-3 および 図-4 は、それぞれ $b=0.2l$ と $b=0.4l$ の長方形湾について 図-1 に○印で示した地点での波高の増幅率の計算結果をプロットしたもので、比較のため線形理論による計算結果も示してある。図から、

計算範囲において線形理論から予測される基本モードと2次のモードの二つの共振に対応してクノイド波も共振を示すが、その増幅率は線形解のものとは比べてアーセル数 Ur が大きくなるほど小さくなることがわかる。ただし、クノイド波の波速は線形理論値と異なることから、周波数に対応する応答特性を考えると、クノイド波におけるピークは若干低周波数側へシフトすることになる。また、二つのピーク付近以外では逆にクノイド波の増幅率がいくぶん大きくなっており、基本モードより低周波数側（基本モードの kl の半分に相当する周波数）でクノイド波では2次的な共振が現われ、その振幅は Ur の値に従って大きくなることわかる。

図-5 は、図-4 の結果における共振近傍の空間波形を $Ur=100$ のケースについて示したもので、比較のため線形理論解についても示してある。得られた波形は入射方向について完全に対称となったため、図には $y>0$ についてのみ示す。図の (b) に示した基本モード近傍の結果と比べると、(a) に示す2次的な共振近傍の波形は線形理論のものとは著しく異なっている。また、図より明らかなように、クノイド波の場合、水面の上昇量の方が下降量よりも大きく、図の (b) では峰高について比べると線形理論解よりも大きくなっている。非線形理論においては、波高の増幅率と峰高についての増幅率とはその傾向を異にすることがある点に注意する必要がある。なお、図 (c) に示すように、クノイド波理論における重複波の節の位相での振幅は0とはならず、波高分布についても線形理論とは異なる傾向が見られる。

4. 実験値との比較

実験には、長さ 10 m、幅 1.5 m、高さ 0.6 m の2次元造波水槽を用い、造波板から 9 m 離して長さ 30 cm、幅 12 cm ($b=0.4l$) の長方形湾の木製模型を設置した。波高増幅率は図-1 に示す湾奥角で測定し、入射波の波高 H_i は模型湾の入り口を完全に塞ぐことによって湾前方での完全重複波の波高 $2H_i$ として測定した。入射波の周期 T は 0.9 sec~3.5 sec で変化させ、波高 H_i は 1.5 cm ではほぼ一定とし、水深 h は 10 m、15 cm の2種類とした。

図-6 に実験結果を理論値とともに示す。ただし、実験値における波数 k は、入射波の周期から微小振幅波理論を用いて求めている。図中の線形理論解のうち点線で示したものは、水槽の側壁による影響をグリーン公式に基づく吉田・鳥越 (1984) の方法に従って評価したものである。実験値は $h=15$ cm のケースで $10<Ur<85$ 、 $h=10$ cm のケースでは $15<Ur<120$ の間の値をとることから、クノイド波については $Ur=50, 100$ の理論解を示している。実験値にはばらつきが見られる

が、平均的に見てもどの理論解とも一致しておらず、特に基本モード付近では流体抵抗による損失の有意な影響が現われている。実験結果における水槽側壁の影響については明らかでないが、外海に面した条件下での理論値と比べると実験値の共振点はいくぶん低周波数側で現われており、側壁の影響を考慮した線形解と比較的一致している。実験値においても $kl=0.6$ 付近で小さなピークが現われており、発生点のずれが見られるものの、クノイド波の理論解と定性的に一致している。

共振時の振幅には流体抵抗による損失が無視できないことから、ここでは Ünlüata・Mei (1975) と同様な方法で湾入り口の損失を考慮した線形解を求めてみた。表-1 に抵抗係数 f を2種類変化させたときの基本モードでの理論解を損失を考慮しない線形理論解との比率として示す。なお、実験値は波高増幅率が最大となったときの値を示し、理論値における最大値とはその発生周波数がいくぶん異なっている。彼らの方法では損失は湾入り口の流体運動に対する抵抗として非線形な式として評価されていたため、ここでも彼らと同様に非線形干渉項は無視できるものとして基本周波数の線形解として求めた。さらに、クノイド波理論においても基本周波数成分におけるエネルギー損失が卓越していると考えられることから、同様な方法を用いて基本周波数成分に対応する Ψ_1 を算定することによって、便宜的に損失の影響を評価した結果も比較のために表に示す。抵抗係数の評価などの問題は残されるが、線形理論解では水深の減少による増幅率の低下の度合は過小に評価されており、共振時の振幅には波の非線形性の影響も無視できないものと考えられる。

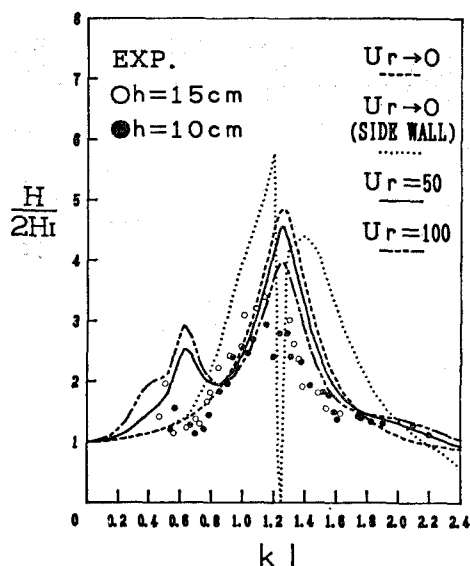


図-6 波高増幅率の理論値と実験値との比較

基本モードより低周波数側に生じている小さなピークは、水槽の側壁の影響によるものとは一致していないことから、波の非線形性により倍周波数成分が共振によって励起されたことによるものと考えられる。なお、実験値には計測誤差のほか模型と造波板間での多重反射の影響が混入している可能性があるが、Rogers・Mei (1978) によると多重反射による誤差は l_m を模型と造波板との距離として $(kl_m)^{-3/2}$ のオーダーとして与えられ、ここでの実験結果では 2% 程度となることからその影響は無視できるものと考えられる。図-7 の (a) はこの 2

表-1 湾入り口の損失を考慮した基本モードでの理論値の比較
(損失を考慮しない線形解との比率を示す)

h (cm)	U_r	実験値	線形理論解				クノイド波の理論解	
			$f=0.35$	$f=0.70$	$f=0.35$	$f=0.70$	$f=0.35$	$f=0.70$
15	21	0.701	0.687	0.570	0.676	0.559		
10	46	0.614	0.650	0.532	0.623	0.510		

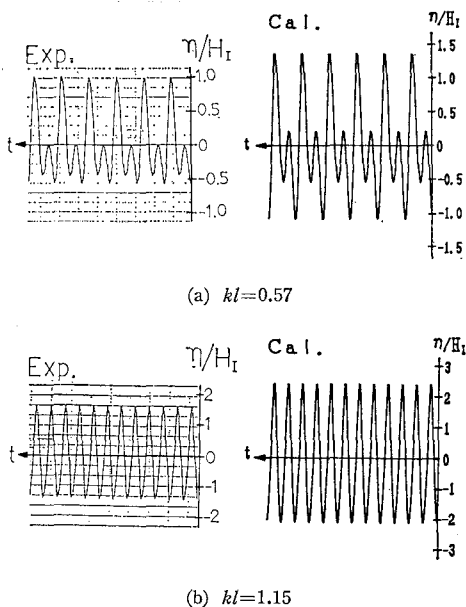


図-7 共振モード付近の時間波形 ($h=10$ cm) の比較

次の共振時における湾奥での時間波形を示したもので、比較のため (b) には基本モード付近の結果を示してある。図より (a) では実験波形に 2 次波が現われており、その波形はクノイド波の理論解とよく一致していることがわかる。実験装置の都合上、 $kl=0.5$ 付近から低周波数側の実験値を得ることができなかったことから、2 次的な共振の振幅とアーセル数 U_r の関係や出現範囲などは実験結果からは明らかではない。

5. 結 語

クノイド波の第 1 次近似解に基づく非線形回折理論によって長方形湾の湾水振動に及ぼす波の非線形性の影響を調べた。その結果、アーセル数が大きくなるほど共振時の湾奥での増幅率は小さくなり、逆に共振付近以外ではいくぶん大きくなることがわかった。また、基本モードより低周波数側に 2 次的な共振が現われ、理論解においてはその振幅はアーセル数に従って大きくなることがわかった。ただし、こうした低周波数領域においては湾入り口におけるエネルギー損失の効果が著しいと考えられ、波の非線形性のみならず流体抵抗による非線形干渉項によって 3 倍周波数成分など高次の項も励起される可能性がある。

参 考 文 献

- 喜岡 渉 (1988): クノイド波による回折波波力の算定方法とその適用性について, 第 35 回海岸工学講演会論文集, pp. 617~621.
- 吉田明徳・鳥越正美 (1984): 水槽側壁の影響を受ける模型港湾の副振動解析, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 113~117.
- Hwang, L. S. and Tuck, E. O. (1970): On the oscillations of harbours of arbitrary shape, J. Fluid Mech., Vol. 42, Part 3, pp. 447~464.
- Isaacson, M. (1977): Shallow wave diffraction around large cylinder, Proc. ASCE, Vol. 103, No. WW1, pp. 69~82.
- Lepelletier, T. G. and Raichlen, F. (1980): Nonlinear oscillations in rectangular tanks, J. Eng. Mech., Vol. 114, No. 1, pp. 1~23.
- Mei, C. C. (1989): The applied dynamics of ocean surface waves, World Scientific, 740 p.
- Rogers, S. R. and Mei, C. C. (1978): Nonlinear resonant excitation of a long and narrow bay, J. Fluid Mech., Vol. 88, Part 1, 161~180.
- Ünlüata, Ü and Mei, C. C. (1975): Effects of entrance loss on harbor oscillations, Proc. ASCE, Vol. 101, No. WW2, pp. 161~180.