

多方向波の水理実験手法

— 3 地点平均法によるクロススペクトル推定精度の向上 —

平口博丸*・鹿島遼一**・田中寛好***・池野正明*

1. はじめに

現地の海の波は波高、周波数、波向きが各々異なる無数の波の重ね合わせからなる多方向不規則波である。従来の水理模型実験設備では一方向に進む不規則波しか造波できないため、波向きという面で現地の波浪を精度よく再現することは不可能であった。最近では、多方向不規則波の造波機がいくつかの研究機関で導入されつつあり、電力中央研究所でも1988年から造波設備の導入・整備を図っている。この種の実験設備は今後益々増加するものと予想されるが、多方向不規則波の造波方法や実験方法などについてはまだ多くの課題が残されている。

本研究は、多方向不規則波の水理実験を適切に行うための技術開発を目的とし、クロススペクトルの推定精度の面から造波信号の作成法や波の測定法を理論的に検討し、水理実験に最も適した手法を提案すると共に、その有効性を数値実験により示すものである。

2. 時空相関関数と方向スペクトル

海の波が定常確率過程に従い、エルゴート性を満足しているならば、水面変動 $\eta(x, t)$ の時空相関関数 ϕ が次のように定義される。

$$\begin{aligned}\phi(r, \tau) &= E[\eta(x, t)\eta(x+r, t+\tau)] \\ &= \eta(x, t)\eta(x+r, t+\tau) \\ &= \lim_{x_0, y_0, t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0 y_0 t_0} \int_{-x_0/2}^{x_0/2} \int_{-y_0/2}^{y_0/2} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \\ &\quad \cdot \eta(x, t)\eta(x+r, t+\tau) dx dy dt \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

ここに、 x は平面座標、 t は時間、 r は2地点の距離ベクトル、 τ はラグタイム、 $\phi(r, \tau)$ は時空相関関数（共分散関数）、 x_0, y_0, t_0 は空間および時間の大きさや長さである。また、 $E[\]$ はアンサンブル平均、 $---$ は時間平均、 $----$ は空間平均を表す。

ϕ を時間に関してフーリエ変換するとクロススペクトル $\phi_r(\sigma, r)$ が得られ、 ϕ を時間・空間に関して同時フー

リエ変換すると方向スペクトル $S(k, \sigma)$ が得られる。ここに、 σ は角周波数、 k は波数ベクトルである。また、クロススペクトルと方向スペクトルの間には

$$\phi_r(\sigma, r) = \int_k S(k, \sigma) \exp(-ik \cdot r) dk \dots\dots\dots (2)$$

の関係があることはよく知られており、この関係式が方向スペクトル解析の基礎となっている。

時空相関関数は式(1)で定義されるが、我々が通常測定するのは次のような値である。

$$\begin{aligned}\phi'(\tau; r, x) &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \\ &\quad \cdot \eta(x, t)\eta(x+r, t+\tau) dt \dots\dots\dots (3)\end{aligned}$$

すなわち、 $\phi'(\tau; r, x)$ は空間平均前の値であり、測定場所の違いによる統計的な誤差を含んだ推定値であると言える。我々はこの ϕ' を用いてクロススペクトルを求め、さらに方向スペクトルを推定していることになる。

3. 造波信号の作成方法

多方向不規則波を造波するための造波信号作成法は、各周波数成分に対する波向きの設定方法の違いにより、シングルサンメーション法(SS法)とダブルサンメーション法(DS法)の2つの方法に大別される。

(1) シングルサンメーション法(SS法)

この方法は、不規則波を周波数が各々異なる N_f 個の成分波に分割し、各々の成分波について1つの波向きおよび1つの波高を定める方法である。SS法において N_f 個の成分波の合成を考えると、不規則波の水面波形 η_1 は次式で表される。

$$\eta_1(x, t) = \sum_{i=1}^{N_f} a_i \cos(-\sigma_i t + A_i) \dots\dots\dots (4)$$

$$A_i = k_i x \cos \theta_i + k_i y \sin \theta_i + \varepsilon_i \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 σ は角周波数、 k は波数、 θ は波向き、 ε はランダムな初期位相である。また a_i は i 番目の成分波の振幅を表す。高山・平石・立石(1989)は、Takayama(1982)の導いた斜め波の造波理論解を用いて a_i を評価しているが、ここでは a_i を定数とし、平面波の重ね合わせにより不規則波を表すものとする。

* 正会員 工修 (財)電力中央研究所 我孫子研究所 水理部

** 正会員 工修 (財)電力中央研究所 水理部主席専門役

*** 正会員 工博 (財)電力中央研究所 水理部構造水理研究室長

η_1 の地点から $r=(r_x, r_y)$ だけ離れた地点での水面波形を η_2 とすれば、式(1)の定義より、 η_1, η_2 に関する時間平均後の時空間相関関数は、

$$E[\eta_1 \eta_2] = \sum_{i=1}^{N_f} \frac{1}{2} a_i^2 \cos B_i \dots \dots \dots (6)$$

$$B_i = k_i r_x \cos \theta_i + k_i r_y \sin \theta_i - \sigma_i \tau \dots \dots \dots (7)$$

と表される。 B_i は (x, y) の関数ではないため、結果的に式(6)の空間平均は意味を持たないことになる。式(6)を時間に関してフーリエ変換すれば明かなように、SS法により造波された波のクロススペクトルは、規則波のクロススペクトルに等しく、成分波の振幅と波向きおよび r のみによって決まり、波の測定位置 (x, y) には無関係である。

(2) ダブルサンメーション法 (DS法)

この方法は、1つの周波数に対して、波向きが異なる複数の成分波を考慮する方法である。周波数を N_f 分割、方向を N_D 分割するものとすれば、多方向不規則波は、

$$\eta_1(x, t) = \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_D} a_{ij} \cos(k_i x \cos \theta_j + k_i y \sin \theta_j + \varepsilon_{ij} - \sigma_i t) \dots \dots \dots (8)$$

と表される。 η_1 に対して r だけ離れた地点での波形を η_2 とすれば、 η_1 と η_2 の時空間相関関数は次式のようにになる。

$$E[\eta_1 \eta_2] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_f} \left[\sum_{j=1}^{N_D} \sum_{k=1}^{N_D} a_{ij} a_{ik} \cos(\alpha_{ij} - \alpha_{ik} - \beta_{ik}) \right] \dots \dots \dots (9)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_f} \left[\sum_{j=1}^{N_D} a_{ij}^2 \cos \beta_{ij} \right] \dots \dots \dots (10)$$

ここに、

$$\alpha_{ij} = k_i x \cos \theta_j + k_i y \sin \theta_j + \varepsilon_{ij}$$

$$\beta_{ij} = k_i r_x \cos \theta_j + k_i r_y \sin \theta_j - \sigma_i \tau \dots \dots \dots (11)$$

である。上式の誘導過程から明かなように、DS法の場合には空間平均も意味を持つ。しかし、空間平均を取るためには非常に多くのデータを取得する必要がある。

式(9)中の3重和は時間平均後の共分散関数であり、一般に計測により得られる共分散はこの形である。この時のクロススペクトルは次のようになる。

$$Co'(f_i) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N_D} \sum_{k=1}^{N_D} a_{ij} a_{ik} \cos \gamma_{ijk}$$

$$Q'(f_i) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N_D} \sum_{k=1}^{N_D} a_{ij} a_{ik} \sin \gamma_{ijk} \dots \dots \dots (12)$$

ここに、

$$\gamma_{ijk} = k_i x (\cos \theta_j - \cos \theta_k) + k_i y (\sin \theta_j - \sin \theta_k) + (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ik}) - (k_i r_x \cos \theta_k + k_i r_y \sin \theta_k) \dots \dots \dots (13)$$

である。Pinkster(1984), Isaacson(1985), 高山ら(1989)

が指摘しているように、DS法により表現された波浪場のクロススペクトルは、測定位置 (x, y) および各成分波の初期位相によって変化する。DS法のこのような特性はクロススペクトル推定値のばらつきがSS法に比べて大きくなることを示唆している。しかし、このようなDS法の特性を逆に利用すると、「異なる場所」で測定された複数のクロススペクトル(相対位置ベクトルは同一のもの)を平均することにより推定精度が向上する可能性がある。ただしその場合、なるべく少ない測定点でその効果が得られるようにすることが重要である。そこで、効果的な空間平均を行うためにはどのような位置でデータを取得するのが良いのかについて考えることにする。

式(8)の形で表される水面波形 η を考え、互いに異なる場所で測定された4つの水面波形を $\eta_1 \sim \eta_4$ とする。ただし、図-1に示すように、 η_1 と η_2 の相対距離ベクトル r は η_3 と η_4 のそれと等しいものとする。

$$\eta_1 = \eta_1(x, t), \quad \eta_2 = \eta_2(x+r, t)$$

$$\eta_3 = \eta_3(x+R, t), \quad \eta_4 = \eta_4(x+R+r, t) \dots \dots \dots (14)$$

ここに、 r および R は距離ベクトルである。

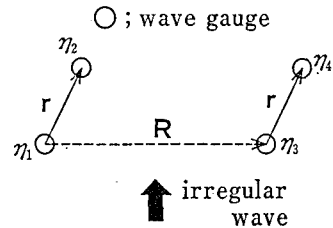


図-1 $\eta_1 \sim \eta_4$ の相対位置

定常確率過程 $\eta_1 \sim \eta_4$ に関しては、

$$E[\eta_1] = E[\eta_2] = E[\eta_3] = E[\eta_4] = (\text{一定}) \dots \dots \dots (15)$$

$$E[\eta_1 \eta_2] = E[\eta_3 \eta_4] = (r \text{ の関数})$$

$$E[\eta_1 \eta_3] = E[\eta_2 \eta_4] = (R \text{ の関数}) \dots \dots \dots (16)$$

の関係が成立する。ここで、 $|R| \rightarrow \infty$ とすれば、

$$E[\eta_1 \eta_3] = E[\eta_2 \eta_4] \rightarrow 0$$

$$E[\eta_1 \eta_4] \rightarrow 0, E[\eta_2 \eta_3] \rightarrow 0 \dots \dots \dots (17)$$

となる。したがって、十分離れた場所で測定された2組のデータ、即ち同じ距離ベクトル r を持つ (η_1, η_2) および (η_3, η_4) は、同じ統計的特性を持つ独立なデータであると考えられる。

ここで、式(17)を満足させるための距離ベクトル R の条件について考える。共分散関数が0に近づくと言うことは、クロススペクトルの絶対値あるいはコヒーレンスの値が0に近づくことである。平口ら(1990)は、光易型方向関数の場合を対象として、式(2)から水面波形同士のクロススペクトルを解析的に求め、コヒーレンスの空間分布を示している。それによると方向集中度が $S=10$

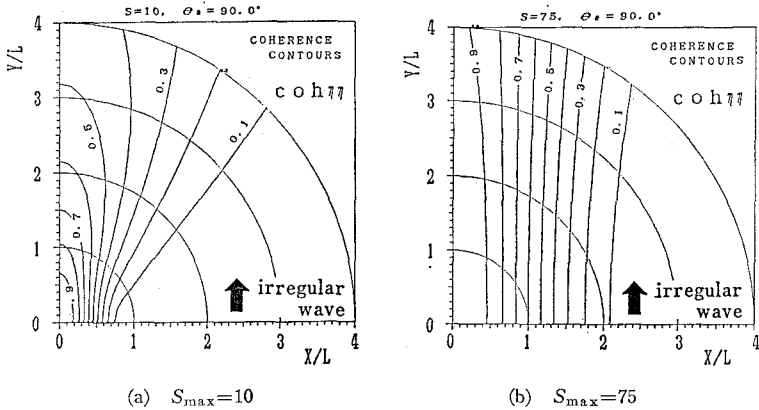


図-2 光易型方向関数で表される波浪場のコヒーレンス分布

および75の場合のコヒーレンスの空間分布は図-2 のようになる。図中の L は波長であり、主波向きは Y 軸の正方向である。波向きに直角方向に離れる方がコヒーレンスの低下量は大きく、方向集中度の高い $S=75$ の場合でも2波長以上離れるとコヒーレンスの値は0.1程度になってしまう。以上のことから、空間平均を行う場合には、複数の波高計アレーを、主波向きに対し直角方向に2波長以上の間隔で離して設置すれば良い事が分かる。

4. 数値実験

(1) 計算方法および計算条件

実際の計測により求められる生のクロススペクトルは、式(12)のように表される。この式はDS法の結果であるが、方向分割数を $N_\theta=1$ とすればSS法の結果に一致する。平滑化後のクロススペクトル推定値 C_0 および Q は、

$$C_0(f_i) = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^b C_0'(f_i), \quad Q(f_i) = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^b Q'(f_i) \quad (18)$$

により評価できる。ここに b は平滑化に用いるクロススペクトルの数を表す。

ここでは2台の波高計を組にして用いる場合を想定し、クロススペクトルの推定精度を数値実験により検討した。数値実験は、以下の5ケースについて実施した。

①single-1: FFTによるスペクトル解析時の周波数分解能 Δf の区間内に、1つの周波数成分のみが含まれる理想的なSS法を想定したケース。式(12)において $N_\theta=1$ とした場合に相当する。②single-2, single-3: SS法の場合、成分波の周波数設定をエネルギー等分割で行うと、ピーク周波数付近の成分波が密になり、スペクトル分解能 Δf の区間内に複数の成分波が存在することになる。この状態は、式(12)において $N_\theta \geq 2$ となることに相当する。ここでは、 $N_\theta=2,3$ の場合を各々 single-2

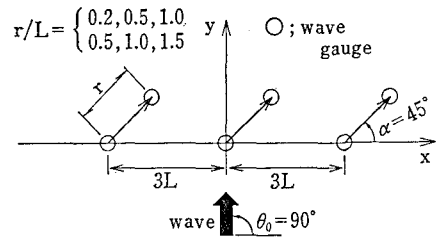


図-3 実験条件 double-3 の測定位置(3地点平均)

および single-3 とする。③double-1: 1地点の計測データ(1組の波高計アレー)のみを用いた場合のDS法。ここでは、 $N_\theta=90$ とし、方向に関して $\Delta\theta=2^\circ$ の等分割とする。④double-3: 測定位置が異なる3地点(3組の波高計アレー)のクロススペクトル算定結果を平均した場合のDS法。ここでは、図-3に示すように、主波向きに対して直角な方向に3波長離れた3つのクロススペクトルを平均した。方向分割に関しては double-1 と同様である。

また、数値実験時の波浪条件は以下のようなものである。不規則波の方向関数は半平面で定義される $\cos^{2S_n}(\theta-\theta_0)$ 型を用いた。ここに、 S_n は方向集中度を表すパラメータであり、光易型方向関数のパラメータ S とは、 $S_n \doteq S/4$ の関係にある。波浪条件は、 $S_n=3, 18$ の2種類、主波向きは $\theta_0=\pi/2$ とした。また、2台の波高計間隔 r は、 $S_n=3$ の場合には $r/L=0.2, 0.5, 1.0$ 、 $S_n=18$ の場合には $r/L=0.5, 1.0, 1.5$ とし、相対距離ベクトルの方向 α はいずれの場合にも $\alpha=45^\circ$ とした。ここに L は波長である。

成分波の初期位相およびSS法の場合の波向きは一樣乱数(混合型合同法)により設定した。また、各成分波の振幅は、single-1の場合を基準として、対象とする周波数帯の真のパワーが1となるように設定した。

(2) クロススペクトルの推定精度

平滑化操作に用いるクロススペクトルの数 b を1から50へと増やした場合に、クロススペクトルの平均がどの様に変化するかについて、乱数の種類が異なる100個の乱数列に対して計算した。求められた100個のクロススペクトル平均値と真の値との誤差の標準偏差(rms)を各 b について計算し、クロススペクトルの推定精度を評価した。図-4は $S_n=3, r/L=0.5$ の場合を対象とし、クロススペクトル C_0 、クオドラチャスペクトル Q 、コヒーレンス coh 、フェイズ θ_{xy} および平均パワー P の標準偏差を示したものである。また、図-5は $S_n=18, r/L=0.5$ の場合に関する同様の結果である。なお、single-1 に関する P の結果は常に真値(=1)となるため、これらの図には示されていない。これらの図から以下の事が分かる。

①single-2 および single-3 の結果は、double-1 の結果とほぼ同じ精度となっている。このことは、 $4f$ の区間内に複数個の成分波が含まれるとSS法の長所が失われてしまうことを示している。

② C_0 および Q に関する double-3 の推定誤差は、single-1 と同程度もしくはそれよりも小さいことが多い。

③ coh および θ_{xy} に関しては、double-3 の結果が最も推定誤差が小さく優れている。

④ P に関しては、常に真値を示す single-1 を除き、double-3 の推定精度が最も高い。

⑤double-3 の場合、平滑化に用いるクロススペクトルの数 b が5~10程度でも他のケースに比べて推定誤差が小さい。このことは、クロススペクトル解析時の周波数分解能を高くすることが可能であることを示している。

⑥double-3 の場合、 b の値が20以上になると、推定誤差の減少は非常にゆるやかとなる。したがって、データ解析時のスペクトルウィンドウの有効周波数帯は15~20 $4f$ 程度とすれば十分である。

図-5に示した single-1 の場合、 C_0 や Q の推定精度は double-3 と同程度であるにもかかわらず、 θ_{xy} の精度は double-3 に比べて低くなっている。この原因は以下のようなものである。single-1 の場合、パワーは常に真値を与えるためにパワーの誤差が C_0 や Q には入ってこないのに対し、double-3 では C_0 や Q にパワーの誤差が含まれてしまう。このようなパワーの誤差の有無が有るにもかかわらず、single-1 と double-3 の C_0 および Q が同程度の推定誤差であると言うことは、single-1 の θ_{xy} には double-3 のそれに比べて大きな誤差が含まれていることを意味している。

5. まとめ

本研究により得られた結果をまとめると以下のようになる。

①通常測定される波のクロススペクトルは時間平均のみを考慮した推定値であり、真のクロススペクトルを求め

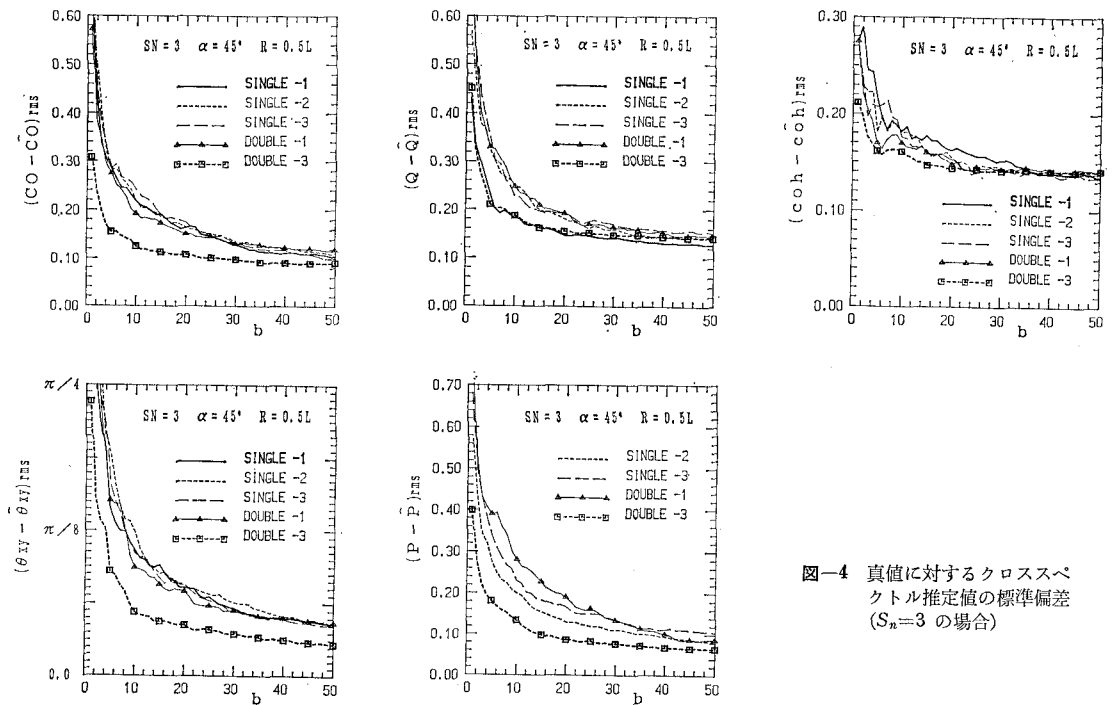


図-4 真値に対するクロススペクトル推定値の標準偏差 ($S_n=3$ の場合)

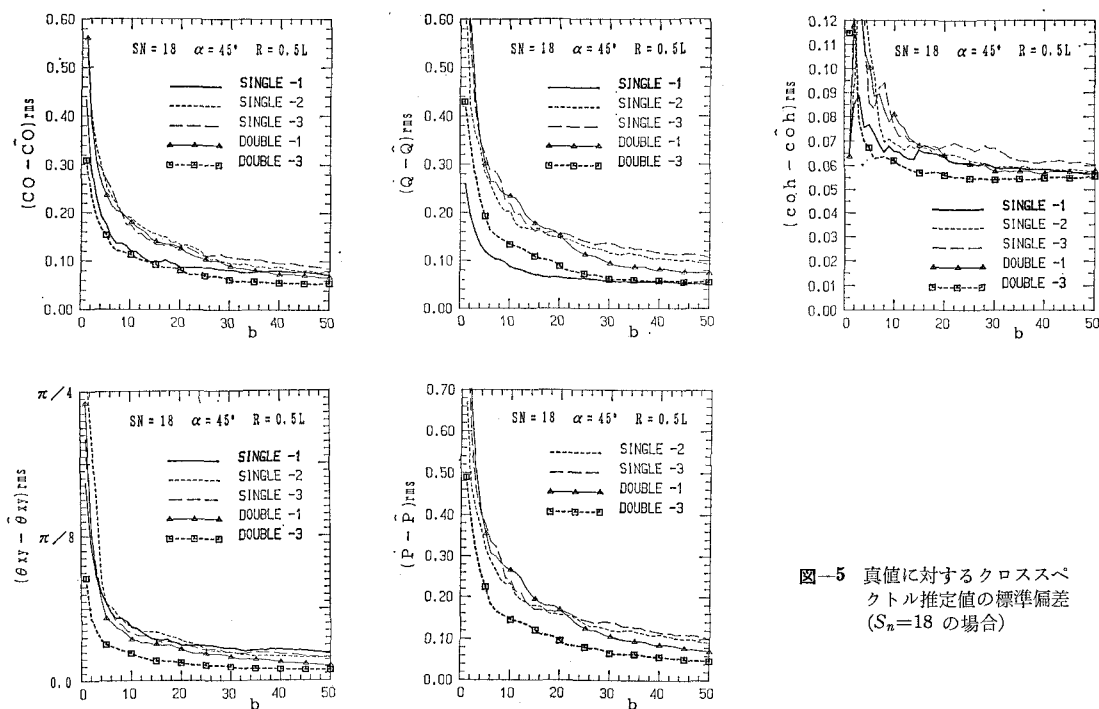


図-5 真値に対するクロススペクトル推定値の標準偏差 ($S_n=18$ の場合)

るためには空間平均が重要な意味を持つ。

②SS法を用いる場合、その成分波の数や周波数の設定は、スペクトル解析時の周波数分解能 Δf との関係から決めるべきであり、成分波の数を多くすることが造波精度の向上に必ずしもつながらない。

③DS法を用いる場合、「異なる場所」で測定されたクロススペクトルの平均を取ることにより、推定誤差の少ないクロススペクトルが安定して得られる。その場合の、「異なる場所」とは、主波向きに対して直角な方向に2波長以上離れた位置とすればよく、場所の数としては3地点程度で十分である。水理実験でこの条件を満足させることは容易である。

④ここで提案した3地点平均法は、目標とする不規則波が造波できたか否かが1回の造波・計測で精度良く判断

できるため実験効率の面からも有利である。

参考文献

- 高山知司・平石哲也・立石義博 (1989): 多方向不規則波の造波信号発生法に関する検討, 第36回海岸工学論文集, pp. 153~157.
- 平口博丸・鹿島遼一・池野正明・田中寛好 (1990): 造波された多方向不規則波のコヒーレンスと方向スペクトル, 第37回海岸工学論文集, pp. 150~154.
- Isaacson, M. (1985): Laboratory measurement and generation of directional surface waves, 21 th. IAHR Congress, Melbourne, pp. 116~121.
- Pinkster, J. A. (1984): Numerical modelling of directional seas, Symposium on Description and Modelling of Directional Seas, No. C-1, pp. 1~19.
- Takayama, T. (1982): Theoretical properties of oblique waves generated by serpent-type wave-makers, Rept. of the Port and Harbour Res. Ins., Vol. 21, No. 2, pp. 3~48.