

不規則ソリトン列による海岸波浪の統計理論とその応用

篠田成郎*・安田孝志**・石原貴司***・土屋義人****

1. 緒 言

従来より、周波数スペクトルとの関連において波高と周期に関する統計的特性が議論されてきている（例えば、Longuet-Higgins, 1983）が、これらの研究は線形狭帯波を対象としたものであり、非線形性が卓越してくる極浅海での波浪への適用には限界がある。このため、極浅海における波高と周期に関する統計量から波浪の力学的性質を検討することは困難となる。特に、所定の統計的特性を持つ不規則波の波形をシミュレートする場合にこの問題は切実となる。

これに対して、著者らは、浅海における波浪の基準モードをソリトンとする立場から、現地波浪の統計的特性を検討してきた（土屋ら, 1983）。ソリトンの連なりとして海岸波浪を捉える場合、フーリエモードを基準とするこれまでの不規則波理論とは異なり、時間軸上における個々のソリトンの振幅および位相（あるいは間隔）だけから不規則波の波形が表示できるため、個々波の波高と周期に対応したソリトンの振幅と間隔に関する統計量を力学的諸量と結びつけることが可能になると同時に時系列特性の評価が容易となるという利点が生ずる。

そこで本研究では、まず、このようなソリトン表示法の利点を生かして、極浅海においてより本質的な波浪の統計的特性はソリトンの振幅と間隔に関する確率分布特性によって評価されるとの観点から、これまでの理論では困難とされた顕著な非線形性を有する不規則波の統計理論を提案する。ついで、現地波浪の観測記録を用いて、この理論の適用性を明らかにするとともに、振幅と間隔に関する各種の統計量相互の関係を検討する。また、統計理論の応用として、所定の統計的特性を有する不規則波をシミュレートする手法を示す。

2. 振幅と間隔の結合確率分布

(1) 振幅と間隔の結合モデル

まず、不規則ソリトン列の統計的特性を表すものとして振幅と間隔の結合分布を取り上げる。ソリトンの振幅と間隔とは独立であるが、統計的には独立とは扱えない場合が多い。そこで、次式の結合モデルを考える。

$$\tau_j = \kappa D_j = A_j + \varepsilon_j, \quad j=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 A_j : ソリトンの振幅、 D_j : ソリトン間隔、 ε_j : 確率誤差項（土屋ら, 1983）、および τ_j : 次式の設定係数 κ で規準化されたソリトン間隔である。

$$\kappa = \sigma_A / (\rho_{AD} \sigma_D) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 σ_A および σ_D : 振幅および間隔の標準偏差、および ρ_{AD} : 振幅と間隔の相関係数であり、以下の理論展開では $\rho_{AD} > 0$ としておく。なお、著者ら（1983）は以前にも同様な振幅と間隔の結合モデルを提案しているが、観測データと理論展開との間に整合性を持たせ、より適用性の優れたモデルとするために、新たに式（2）の係数 κ を導入することにした。

(2) 振幅の確率密度関数

Yasuda ら（1988）は最大生起確率条件より次式の Boltzmann 型の振幅の確率密度関数 $f_A(A)$ を導いている。

$$f_A(A) = \lambda_1 \sqrt{A} (A+2) \exp[-\lambda_2 A^{5/2}] \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \nu_A \left/ \sqrt{3} \left\{ 1 + \left(\frac{128}{75} \right)^{1/5} \Gamma \left(\frac{3}{5} \right) \nu_A^{2/5} \right\} \right. \\ \lambda_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{15} \nu_A \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\mu_A = \frac{2 + (75/4)^{1/5} \Gamma(7/5) \nu_A^{-2/5}}{1 + (128/75)^{1/5} \Gamma(3/5) \nu_A^{2/5}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 μ_A は振幅の平均であり、式（3）の分布形を規定する唯一のパラメータとなっている。図-1 はうねり性の現地波浪をソリトン分解して得られる振幅の標本分布と式（3）の分布とを比較したものの一例である。若干のばらつきは認められるものの、式（3）の適用性は良好と思われる。そこで以下では、式（3）を振幅の理論分布として用いることにする。ただし、理論の展開

* 正会員 工修 岐阜大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 (株)ユニック

**** 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

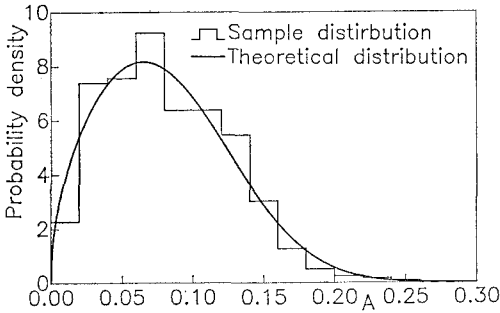


図-1 ソリトンの振幅の標本分布と理論分布との比較

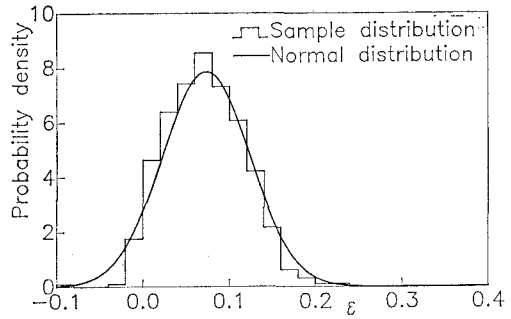


図-2 確率誤差項の標本分布と正規分布との比較

上、式(3)をそのまま使うと、解析的表示が困難となるため、振幅の確率密度関数としては、

$$f_A(A) = \sum_k p(k) \delta(A - \alpha_k) \dots \dots \dots (6)$$

なる離散分布を用い、 $(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \rightarrow 0$ の下で数值的に各種の統計量を計算することにする。ただし、 $p(k)$: 式(3)によって規定される確率関数、 k : $p(k)$ の階級番号、 α_k : k 番目の階級値、および δ : Diracのデルタ関数である。

(3) ソリトン間隔の確率密度関数

式(1)の確率誤差項 ε は振幅 A とは独立な確率変数であり、 A と ε との線形関係からのずれを表しているため、ここでは、 ε の分布を正規分布と仮定することにする。図-2は、現地データから式(1)を用いて求めた確率誤差項の標本分布と正規分布との比較を示す。これより、正規性の仮定がほぼ満足されていると判断できる。

ソリトン間隔 D の確率密度関数 $f_D(D)$ は、式(1)に示される確率変数の和の確率分布として、次式のように求められる。

$$f_D(D) = \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi}} \sum_k p(k) \exp \left[-\frac{(\kappa D - \alpha_k - \mu_\varepsilon)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 μ_ε および σ_ε^2 はそれぞれ確率誤差項 ε の平均および分散であり、次式で表される。

$$\mu_\varepsilon = \kappa \mu_D - \mu_A, \quad \sigma_\varepsilon^2 = \kappa^2 \sigma_D^2 - \sigma_A^2 \dots \dots \dots (8)$$

図-3は現地波浪におけるソリトン間隔の標本分布と式(7)の理論分布とを比較したものの一例である。両者は良好な一致を示しており、式(1)の結合モデルは妥当なものと判断される。

(4) 振幅と間隔の結合確率密度関数

振幅 A と間隔 D の結合確率密度関数 $f_{AD}(A, D)$ は、結合確率の定義から、次式より求められる。

$$f_{AD}(A, D) = f_A(A) f_D(D|A) \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 $f_D(D|A)$ は振幅 A が与えられたときの間隔 D の条件付確率密度関数を表す。式(1)より、 A が特定

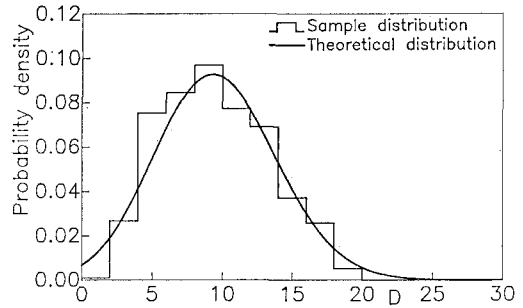


図-3 ソリトン間隔の標本分布と理論分布との比較

化されたときの τ の分布は ε の分布に一致するため、結局 $f_D(D|A)$ は次のように表される。

$$f_D(D|A) = |\kappa| f_\varepsilon(\kappa D - A) \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 f_ε は ε の確率密度関数、すなわち正規分布を表す。式(10)を式(9)に代入すれば、振幅と間隔の結合確率密度関数 $f_{AD}(A, D)$ は次式となる。

$$f_{AD}(A, D) = \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varepsilon} \exp \left[-\frac{(\kappa D - A - \mu_\varepsilon)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] \cdot \sum_k p(k) \delta(A - \alpha_k), \quad \rho_{AD} > 0 \dots (11)$$

図-4は現地波浪におけるソリトンの振幅 A と標準化間隔 κD の標本結合分布と式(11)の理論結合分布との比較を示す。振幅の値が0.05以下の部分において標本分布が理論分布よりも若干大きめの確率密度を示しているが、全体的には、分布形のピーク位置および高さともにほぼ一致しており、式(11)の適用性が明らかとなっている。

3. 不規則ソリトン列の支配統計量

(1) ソリトン列に関わる確率分布と支配統計量

振幅と間隔の結合特性のほかに振幅相互の結合特性も不規則ソリトン列に関する重要な統計的特性である。著者ら(1989)は、ソリトンの振幅の自己回帰性に着目して次のように前後の振幅 A_1 と A_2 の結合確率密度関数 $f_A(A_1, A_2)$ を導いた。

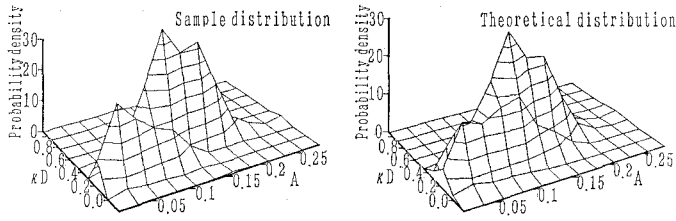


図-4 ソリトンの振幅と間隔に関する標本結合分布と理論結合分布との比較

$$f_A(A_1, A_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} p(k_1)p(k_2) \delta(A_1 - \alpha_{k_1}) \delta[A_2 - \gamma_A A_1 - (1 - \gamma_A) \mu_A - \sqrt{1 - \gamma_A^2} (\alpha_{k_2} - \mu_A)] \dots (12)$$

ここに、 γ_A は前後の振幅相互の相関係数である。

振幅相互の相関性以外にも、間隔相互の相関性が考えられるが、現地データにおいては極めて小さいため、ここではこれを無視することにすれば、不規則ソリトン列の振幅と間隔に関する統計的特性は式 (11) および (12) の2つの結合分布によって評価されることになる。これらの分布形を規定するのは、 μ_A , μ_D , σ_D , γ_A , および ρ_{AD} の5つの統計量であり、これらが不規則ソリトン列の支配統計量となっている。また、波の非線形性を表す指標である Ursell 数もソリトンの振幅と間隔の統計量の1つであり、これらの5つの支配統計量によって表示されるはずである。そこで、次に、Ursell 数の確率密度関数を理論的に導いてみる。

(2) Ursell 数の確率密度関数

まず、各ソリトンに関する Ursell 数 U を次のように定義する。

$$U_j = A_j D_j^3, \quad j=1, 2, \dots, N \dots (13)$$

また、便宜的に確率変数 V を

$$V_j = A_j, \quad j=1, 2, \dots, N \dots (14)$$

とおけば、 U と V の結合確率密度関数 $f_{UV}(U, V)$ は次式のように表される。

$$f_{UV}(U, V) = |J|^{-1} f_{AD}(A, D) \dots (15)$$

ここに、 J は式 (13) および (14) の変換の Jacobian である。上式に式 (11) を代入し、 V について積分すれば、 U の確率密度関数 $f_U(U)$ は次のように求められる。

$$f_U(U) = \frac{\kappa}{\sqrt{8\pi U} \sigma_\epsilon} \sum_k \frac{p(k)}{\sqrt{\alpha_k}} \cdot \exp \left[-\frac{(\kappa \sqrt{U/\alpha_k} - \alpha_k - \mu_\epsilon)^2}{2\sigma_\epsilon^2} \right] \dots (16)$$

図-5 は現地データから求められる Ursell 数 U の標本分布と式 (16) の理論分布とを比較したものである。理論分布は指数型の分布形を示しており、標本分布と極めてよく一致している。

さらに、式(16)から U の平均を求めると次式となる。

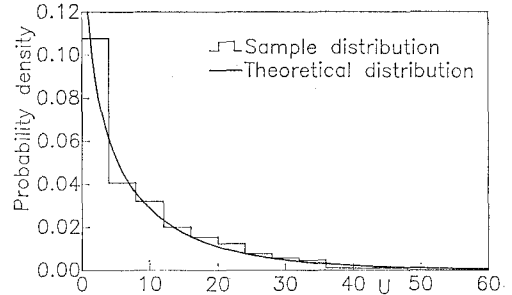


図-5 Ursell 数の標本分布と理論分布との比較

$$\begin{aligned} Ur &= E[U] = \int_0^\infty U f_U(U) dU \\ &= \mu_A \mu_D^3 + \left\{ \mu_A (1 - 3\rho_{AD}^2) + 2\mu_D \left(\frac{\sigma_D}{\sigma_A} \right)^{-1} \rho_{AD} \right\} \sigma_D^2 \\ &\quad - 4\mu_A^2 \mu_D \frac{\sigma_D}{\sigma_A} \rho_{AD} + (3\mu_A^3 + E[A^3]) \left(\frac{\sigma_D}{\sigma_A} \right)^2 \rho_{AD}^2 \dots (17) \end{aligned}$$

ここに、 $E[\cdot]$ は期待値演算を表し、

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= E[A^2] - \mu_A^2, \\ E[A^2] &= (2/5) \lambda_1 \{ I(9/5) \lambda_2^{-9/5} + I(7/5) \lambda_2^{-7/5} \}, \\ E[A^3] &= (2/5) \lambda_1 \{ I(11/5) \lambda_2^{-11/5} + I(9/5) \lambda_2^{-9/5} \} \dots (18) \end{aligned}$$

である。海岸波浪の非線形性の評価には式 (17) の Ur が用いられるが、これは μ_A , μ_D , σ_D , および ρ_{AD} の4つの支配統計量の関数として表示されることがわかる。

図-6 は、16 ケースのうねり性の現地波浪の観測記録から得られた平均 Ursell 数 Ur とソリトン間隔と振幅の標準偏差の比 σ_D/σ_A との関係を示したものである。また、式 (17) における支配統計量として3種類のパターンについて計算した結果を理論曲線として表してある。現地データの支配統計量は全て異なるため、曲線との一致を単純に議論することはできないが、実線および破線は全体的なデータの傾向を良く表しており、式 (17) から Ursell 数を推定することが十分可能であると判断できる。

(3) 支配統計量相互の関係

ついで、不規則ソリトン列に関する5つの支配統計量

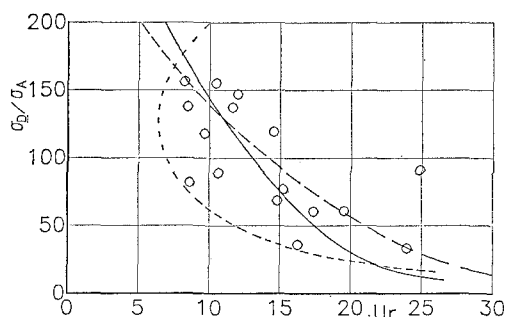


図-6 Ursell 数とソリトンの間隔と振幅の標準偏差の比との関係

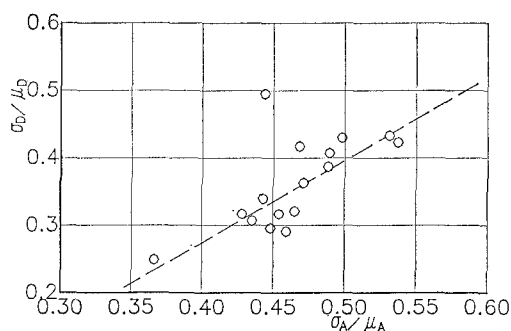


図-7 振幅の変動係数と間隔の変動係数との関係

相互の関係を現地データから明らかにする。

図-7 は、図-6 と同じ観測記録から得られた振幅の変動係数 σ_A/μ_A と間隔の変動係数 σ_D/μ_D との関係を示したものであり、図中の破線は次式の回帰直線である。

$$\sigma_D/\mu_D = 1.22(\sigma_A/\mu_A) - 0.214 \quad \dots\dots\dots (19)$$

これより、浅海におけるうねり性の波浪には式 (19) の関係が成立しているものと考えられ、 σ_D は μ_A および μ_D から決定できることになる。

図-8 は、図-6 と同じデータについて、ソリトン間隔の平均 μ_D と振幅相互の相関係数 γ_A との関係を示したものである。なお、図中の破線は、データの傾向が $\tanh$ 型であると予想して求めた次式の非線形回帰曲線を表す。

$$\gamma_A = \tanh(-635\mu_D^{-3} + 0.993) \quad \dots\dots\dots (20)$$

こうした傾向の生ずる原因については様々に推測されるが、ソリトン間隔と振幅相互の相関係数との間のこうした関係が偶然的に生じているとは考えにくく、現地波浪においてはかなり普遍的な性質であると思われる。従って、式 (20) の関係を用いることにより、 γ_A は μ_D だけから決定できると判断する。

図-7 および 8 以外にも様々な統計量相互の関係を検討したが、際立った傾向を示す結果は得られず、式 (19) および (20) で特徴づけられる 2 種類の関係が不規則ソリトン列の振幅と間隔に関する統計量間の顕著な特性であると判断することにする。ただし、これらの関係についても今後のデータの蓄積によって、より詳細に検討する必要がある。

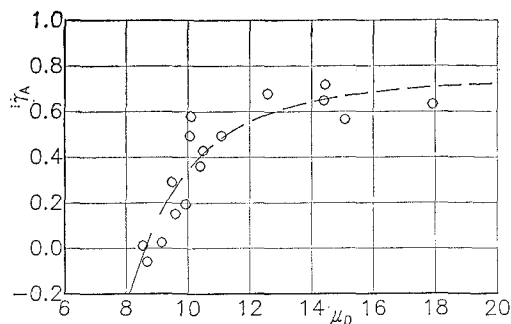


図-8 平均ソリトン間隔と前後の振幅相互の相関係数との関係

不規則ソリトン列の統計的特性は振幅の平均 μ_A 、間隔の平均 μ_D および振幅と間隔の相関係数 ρ_{AD} の 3 つの統計量だけから評価できる。このため、これらをシミュレーションにおける入力条件、すなわち目標統計量とすれば、所定の統計的特性を満足する海岸波浪をシミュレートすることが可能となる。図-9 はシミュレーションの具体的手順をフローチャートで示したものである。基本的には、入力パラメータ μ_A 、 μ_D および ρ_{AD} から、式 (19) および (20) を用いて残りの支配統計量である σ_D および γ_A を求め、これらによって決定される式 (11) と (12) の 2 つの結合分布に従う振幅と間隔の列を一樣乱数により順番に生成することによりシミュレーションが実行される。

(2) 期待統計量の再現性

図-10 は、シミュレーションによって得られる振幅分布について、乱数の発生個数 (ソリトン数) N の増加に伴う目標分布への収束状況を示したものである。当然、乱数を多く発生させるほど目標への収束は良好となるが、すでに $N=200$ において目標分布に収束していることがわかる。このほかの統計量についても同様な検討を行った結果、このシミュレーション手法では 200~300 波で目標統計量にはほぼ一致 (相対誤差にして 5%) し、

4. 統計理論の応用—海岸波浪のシミュレーション

ここでは、前述の不規則ソリトン列に関する統計理論および支配統計量相互の関係を利用した海岸波浪のデジタルシミュレーションを提案する。

(1) シミュレーションの手順と入力パラメータ

上述の支配統計量の相互関係に関する検討結果から、

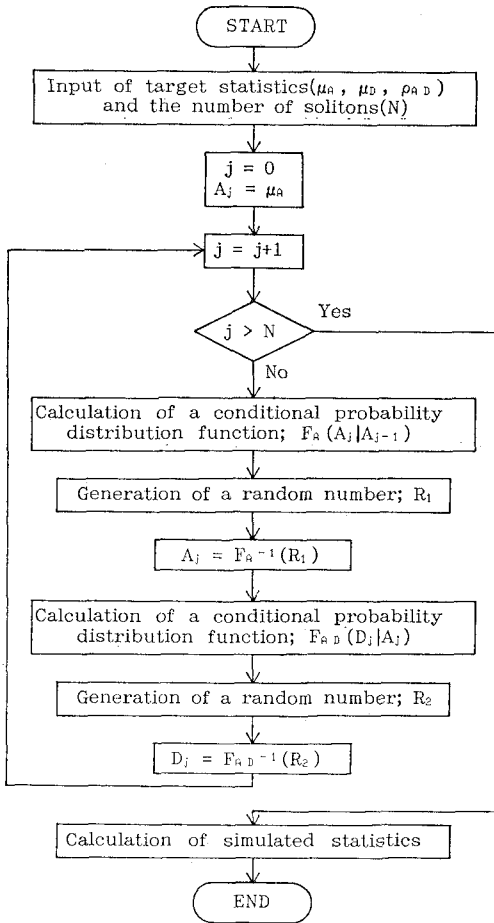


図-9 不規則ソリトン列生成シミュレーションのフローチャート

十分実用に耐え得る精度と収束速度を有することが確認された。

図-11はこのような方法によって得られた不規則波形の一例を示す。特に奇異に感じられる波列部分もなく、極めて現実的な波形が生成されていると認められる。

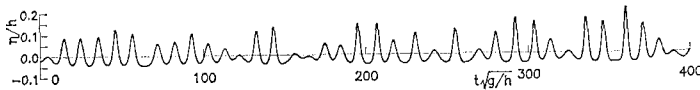


図-11 シミュレーション波形の一例

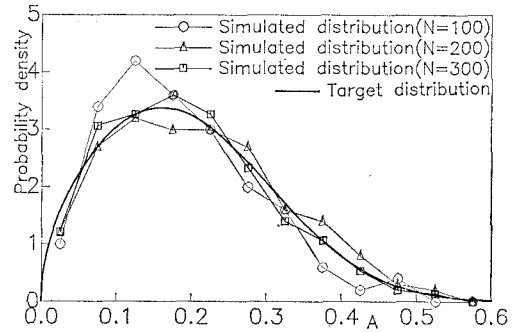


図-10 乱数の発生個数の増大に伴う目標振幅分布への収束

5. 結 語

以上、海岸波浪の統計的特性を特徴づける前後の波高および波高と周期との結合特性を理論的に評価することのできる統計理論をソリトンモード法に基づき提案し、その適用性を明らかにした。また、海岸波浪における支配統計量を示すとともに、現地観測事実として、これらの相互関係を見出すことができた。さらに、統計理論の応用として、所定の統計的特性を簡単にかつ精度良く満足する不規則波のシミュレーション手法を示した。

最後に、本研究は財団法人鹿島学術振興財団研究助成金による成果であることを付記して、感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 篠田成郎・安田孝志・川口智也・石原貴司・土屋義人 (1989): 浅海における不規則波浪の隣合う波高の結合確率分布について, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 129~133.
- 土屋義人・安田孝志・篠田成郎 (1983): ソリトンスpekトル理論による海岸波浪の統計的特性, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 69~73.
- Longuet-Higgins, M. S. (1983): On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave fields, Proc. R. Soc. Lond., Vol. A389, pp. 241~258.
- Yasuda, T., T. Mishima, and Y. Tsuchiya (1988): Energy distribution of shallow water swell under the maximum probability condition, in Nonlinear Water Waves, K. Horikawa and H. Maruo eds. Springer-Verlag, pp. 93~100.