

不規則波の波高の確率分布について

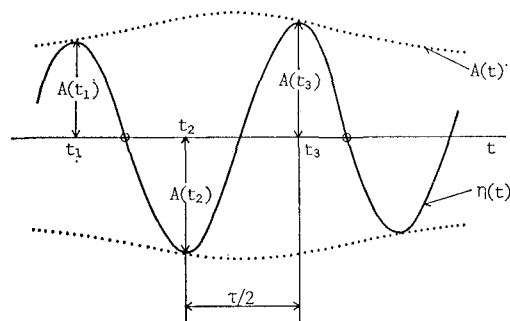
木村 晃*・太田隆夫**

1. はじめに

ゼロクロス法で定義した不規則波の波高の確率分布は、Rayleigh 分布と良好な適合性をもつことが、数多くの観測、実験を通じて確かめられている。Rayleigh 分布は、不規則波が狭帯域スペクトルを有する場合の“振幅”の確率分布として Longuet-Higgins(1952) により初めて適用されたものである。したがって、広帯域スペクトルの場合のみならず、厳密には狭帯域スペクトルの場合であっても、Rayleigh 分布は理論的に求められた“波高”の確率分布ではない。しかし実験、波浪観測、数値計算の結果は、若干の相違はあるものの、ゼロクロス法で波高を定義する限り、スペクトル幅に関係なく常に Rayleigh 分布に近い分布を示す。波浪統計の分野では、この事実の理論的裏付け、すなわち広帯域スペクトルの不規則波の波高分布の理論を導くことが重要な課題となっている。最近 Tayfun(1983) は Rayleigh 分布の前提条件を再検討し、スペクトル形状の影響を考慮した“波高”の確率分布を導いている。しかし、この分布は狭帯域の場合には Rayleigh 分布に近い形状を示すものの、広帯域の場合にはこれらとはかけ離れた形状を示す。Tayfun の方法は、ゼロクロス波の“波高”を定義してその確率分布を導いたものであるが、狭帯域の故に許されている波別解析法への包絡線理論の適用範囲をかなり越えている部分があり、これが大きな誤差をうむ原因となっている。この研究は、まず広帯域スペクトルの場合、波別解析に包絡線法を用いる際に起こる問題点を明らかにするとともに、それを修正する2つの方法を示し、次にこの方法による波高の確率分布を導いて、それで Tayfun の理論を大きく修正することができることを示したものである。

2. ゼロクロス波の波高

包絡線法によれば、不規則波の振幅あるいは波高の確率分布は以下のようにそれに対する包絡線と関係づけて



図—1 波高の定義

議論される。図—1 は不規則波形とそれに対する包絡線を示したものである。図からわかるようにゼロクロス波の最大点（峰）と最小点（谷）はほぼ包絡線上にある。したがって水位の最小点（ $t=t_2$ ）および最大点（ $t=t_3$ ）の値はそれぞれの時刻の包絡線の値で置き換えることができ、波高 H は $t=t_2$ と $t=t_3$ の包絡線振幅の値の和で与えることができる。

$$H = A(t_2) + A(t_3) \dots\dots\dots (1)$$

狭帯域スペクトルの場合、包絡線はきわめて緩やかに変化し、

$$A(t_1) \doteq A(t_2) \doteq A(t_3) \dots\dots\dots (2)$$

と仮定することができる。したがって式（1）は

$$H \doteq 2A(t_1) \dots\dots\dots (3)$$

となる。狭帯域の場合、ゼロクロス点間の最大点および最小点の位置はほぼ等間隔と見なしうるので、最大点あるいは最小点は包絡線上にほぼ等間隔に分布することになり、式（3）の H の確率分布は包絡線の確率分布と同じ Rayleigh 分布 (Rice, 1954) で与えられる。しかし、狭帯域スペクトルの仮定を取り除くと式（2）、（3）は成立しない。Tayfun(1983) はゼロクロス波高の定義に立ち返り、式（1）を用いて波高の確率分布を次のように考えて誘導した。すなわち、ゼロクロス波の最大点の位置は振幅の大きな部分でも、小さな部分でも一様に分布し、最小点の位置は最大点の位置より平均周期 $\bar{\tau}$ の半分だけ離れた点となる。したがって最大（小）点の振

* 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部社会開発システム工学科

** 学生員 鳥取大学大学院 工学研究科

幅の確率分布は Rayleigh 分布となる。水位の最大 (小) 点の値と同じ時刻での包絡線の値との差は ν のオーダーとなるので (Tayfun, 1989b), このオーダーの誤差の範囲で最大 (小) 水位と包絡線の値を置き換えることができる。ただし, ν はスペクトル幅に関するパラメーターで

$$\nu = (m_0 m_2 / m_1^2 - 1)^{1/2}$$

で与えられる。ここに, m_n , ($n=0, 1, \dots$) は

$$m_n = \int_0^\infty f^n S(f) df$$

であり, $S(f)$ は水面変動のスペクトルである。

仮定より波高は,

$$H = A(t) + A(t + \bar{\tau}/2) \dots \dots \dots (4)$$

で与えられる。ここに $\bar{\tau}$ は平均周期であり次式で与えられる。

$$\bar{\tau} = m_0 / m_1$$

式 (4) の両辺を $H_{rms} = 2 A_{rms}$ で割って正規化し

$$\zeta = (\xi_1 + \xi_2) / 2 \dots \dots \dots (5)$$

とする。ここに A_{rms} は

$$A_{rms} = (2m_0)^{1/2}$$

で与えられる。仮定より ξ_1, ξ_2 はともに Rayleigh 分布をする。両者の特性, 仮定を満たす結合分布として Tayfun は次式で与えられる 2 次元 Rayleigh 分布 $p(\xi_1, \xi_2)$ を用いた (Kimura, 1980)。

$$p(\xi_1, \xi_2) = \frac{4\xi_1\xi_2}{1-r^2} \exp\left[-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1-r^2}\right] I_0\left[\frac{2r\xi_1\xi_2}{1-r^2}\right] \dots \dots \dots (6)$$

ここに, I_0 は 0 次の第 1 種変形ベッセル関数, r は ξ_1 と ξ_2 の相関パラメーターで, 次式で与えられる (Battjes ら, 1984)。

$$r = (\rho^2 + \lambda^2)^{1/2} / m_0 \dots \dots \dots (7)$$

ここに,

$$\rho = \int_0^\infty S(f) \cos 2\pi(f - \bar{f}) \frac{\bar{\tau}}{2} df$$

$$\lambda = \int_0^\infty S(f) \sin 2\pi(f - \bar{f}) \frac{\bar{\tau}}{2} df$$

$$\bar{f} = m_1 / m_0$$

である。式 (6) に (5) を代入して, ζ と ξ_1 の結合分布を求め, ξ_1 に関して積分すれば最終的に ζ の確率分布が求められる。

$$p(\zeta) = 2 \int_0^{2\zeta} p(\xi_1, 2\zeta - \xi_1) d\xi_1 \dots \dots \dots (8)$$

図-2 はこのようにして導かれた波高の確率分布を示すもので, スペクトル形は次の Wallops 型のものを用いた。

$$S(f) = (f/f_p)^{-m} \exp[m/4 \{1 - (f/f_p)^4\}]$$

$m=5$ の場合が十分発達した風波のスペクトルである Pierson-Moskowitz スペクトルに対応する。 $m=10$ はか

なり狭帯域のスペクトルに対応する。図からわかるように, 広帯域スペクトルの場合には Rayleigh 分布とかなりかけ離れた形状を示し, 実測値との対応も非常に悪い。本研究の著者らは, これは次の 2 つの理由によるものであると考えた。

- 1) 広帯域スペクトルの場合, 包絡線はゼロクロス波の峰と峰, 谷と谷を滑らかに結んだような波形にならず, 两点間でかなり大きく変動する。したがって, ξ_1 と ξ_2 の確率特性として包絡線のものを用いることはできない。
- 2) ξ_1 と ξ_2 の 2 点の相関特性を計算する際, 式 (7) を一律に用いることはできない。すなわち波高の大きな領域では周期はほぼ一定と考えてよいが, 波高の小さな領域では両者に相関があり, 仮に Tayfun のモデルを使う場合でも, ξ_1, ξ_2 の値が小さい場合には両者の間隔は平均的に $\bar{\tau}/2$ より小さくなる。

以下, この 2 点を考慮したゼロクロス波の波高の確率モデルについて検討した。

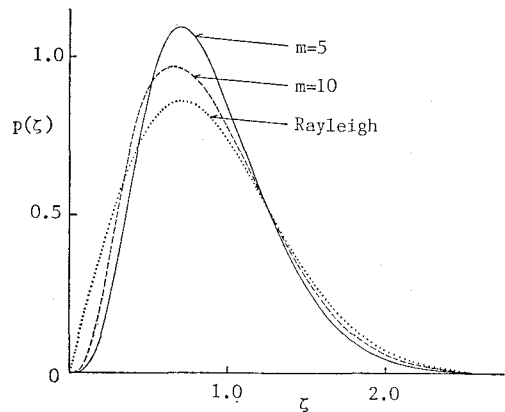


図-2 Tayfun による波高の確率分布

3. 不規則波の包絡線

従来, 不規則波形の包絡線としては Rice(1954) あるいは Dugundji(1958) の定義によるものが用いられてきた。これらの包絡線は次のように定義される。すなわち, まず無数の成分波の重ね合わせで与えられる不規則波形 η はつぎのように変形される。

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f} t + \varepsilon_n + 2\pi \bar{f} t) \\ &= Y_c(t) \cos 2\pi \bar{f} t - Y_s(t) \sin 2\pi \bar{f} t \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

ここに

$$Y_c(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f} t + \varepsilon_n) \dots \dots \dots (10)$$

$$Y_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f} t + \varepsilon_n) \dots \dots \dots (11)$$

式 (9) より

$$\eta(t) = A(t) \cos \{2\pi \bar{f}t + \phi(t)\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに

$$A(t) = \{Y_o^2(t) + Y_s^2(t)\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\phi(t) = \tan^{-1} \frac{Y_s(t)}{Y_o(t)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式 (13) が Rice による包絡線の定義である。つぎに、式 (10), (11) を展開すると、

$$\begin{aligned} Y_o(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \{ \cos(2\pi f_n t + \varepsilon_n) \cos 2\pi \bar{f}t \\ &\quad + \sin(2\pi f_n t + \varepsilon_n) \sin 2\pi \bar{f}t \} \\ &= \eta(t) \cos 2\pi \bar{f}t + \hat{\eta}(t) \sin 2\pi \bar{f}t \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_s(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \{ \sin(2\pi f_n t + \varepsilon_n) \cos 2\pi \bar{f}t \\ &\quad - \cos(2\pi f_n t + \varepsilon_n) \sin 2\pi \bar{f}t \} \\ &= \hat{\eta}(t) \cos 2\pi \bar{f}t - \eta(t) \sin 2\pi \bar{f}t \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここに $\hat{\eta}(t)$ は $\eta(t)$ のヒルベルト変換であり、次式で定義される。

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

実際の計算においては $\hat{\eta}(t)$ はつぎのようにして求められる。 $\eta(t)$ のフーリエ変換

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \exp(-i2\pi f t) dt$$

を用いると $\hat{\eta}(t)$ のフーリエ変換は次式で与えられる。

$$\hat{F}(f) = \begin{cases} -iF(f) & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ +iF(f) & f < 0 \end{cases}$$

したがって $\hat{F}(f)$ を逆フーリエ変換すれば $\hat{\eta}(t)$ を求めることができる。

式 (15), (16) より

$$A(t) = \{Y_o^2(t) + Y_s^2(t)\}^{1/2} = \{\eta^2(t) + \hat{\eta}^2(t)\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

式 (17) の第3項は Dugundiji による包絡線の定義であり、上式より Rice の包絡線と等価であることが簡単にわかる。以下では $A(t)$ を Rice の包絡線とよぶ。

式 (13) あるいは (17) で表される包絡線は、狭帯域スペクトル ($m=10$) の場合には 図-3 (a) のようにゼ

ロクロス波の最大点と最小点をほぼ滑らかに結ぶ。しかし、広帯域スペクトル ($m=5$) の場合は、図-3 (b) のように水位の最大点と最小点の間に複数の極値を有する複雑な包絡線が得られる。包絡線法ではゼロクロス波の水位の最大 (小) 点を同じ時刻における包絡線の値で置き換えて検討を行う。このため包絡線の振幅とゼロクロス波の最大 (小) 点の水位の確率特性は等しいことが要求される。したがって (b) のように2点間で大きな包絡線の変動がある場合、基本的な仮定が成立していないことになる。この観点からすれば広帯域スペクトルの場合、Rice の包絡線で水位の振幅を代表させることは好ましくない。そこでこの包絡線に代わって、より滑らかに最大点 (最小点) を結ぶ曲線を用いて包絡線とし、検討を行うこととした。すなわち、この研究では各点を3次のスプライン関数と直線で結び包絡線とすることを試みた。まず、期待スペクトルをもとにシミュレートした不規則波形 η をゼロダウクロス法で処理して水位の最大点、最小点の位置、振幅を決める。次に $\eta = |\eta|$ として最小点をゼロクロス点間の最大点となるようにし、次に各最大点を通る3次のスプライン関数と直線を計算し、包絡線とした。不規則波形のシミュレーションは逆FFT法で、サンプリング間隔 $\Delta t = 0.05$ s, 点数 $N = 8192$ として、36 ケース行った。また、不規則波のスペクトルとしては、Wallops スペクトルで $m=5$ としたスペクトル (Pierson-Moskowitz スペクトル) と $m=10$ としたスペクトルを用い、ピーク周波数 f_p を 1.0 Hz, スペクトルのピーク値 $S(f_p)$ を 1.0 とした。図-4 (a) に不規則波形 η , Rice の包絡線 A (点線), スプラインによる包絡線 SP を、図-4 (b) に η と A および直線による包絡線 LI を示す。スペクトルは $m=5$ のケースのものである。図からわかるように、 A よりも SP あるいは LI のほうが変動が少なく、より“包絡線らしく”みえる。したがって ξ_1 と ξ_2 の相関特性としては、 A から求められるものよりも SP あるいは LI から求められるものを用いるほうが望ましいと予測される。ただし、SP および LI の確率特性は A のように $S(f)$ から一義的に与えら

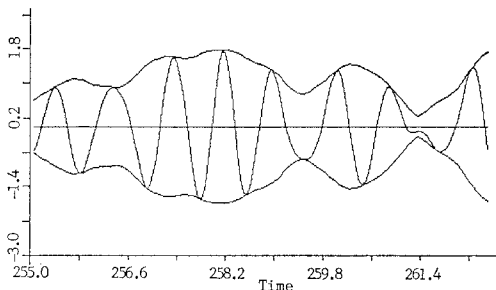


図-3 (a) 不規則波形と Rice の包絡線 ($m=10$)

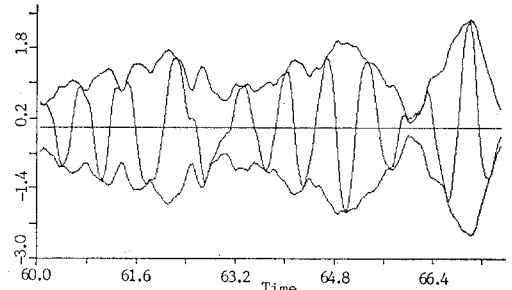


図-3 (b) 不規則波形と Rice の包絡線 ($m=5$)

れるものではないので、この時点ではそれらの確率特性は不明である。そこで、ここでは包絡線の確率特性は基本的には Rayleigh 分布で十分近似できること、包絡線のスペクトル $E(f)$ が等しければその確率特性も等しいことを踏まえてそれらを推定した。すなわち、まず、SP および LI と等価な Rice の包絡線を計算した。Rice の包絡線のスペクトル $E(f)$ は、次の Tayfun(1989a) による近似式で与えられる。

$$E(f) = {}_1\phi_1 + {}_1\phi_2 + {}_1\phi_3 \dots (18)$$

ここに

$$\begin{aligned} {}_1\phi_1 &= \frac{\pi}{4m_0} \int_0^\infty S(u) S(u+f) du \\ {}_1\phi_2 &= \frac{1}{4\pi m_0} \int_0^\infty {}_1\phi_1(u) [{}_1\phi_1(|u-f|) \\ &\quad + {}_1\phi_1(u+f)] du \\ {}_1\phi_3 &= \frac{1}{\pi m_0} \int_0^\infty {}_1\phi_1(u) [{}_1\phi_2(|u-f|) \\ &\quad + {}_1\phi_2(u+f)] du \end{aligned}$$

上式の $S(f)$ は不規則波形 η のスペクトルである。SP と LI のスペクトルはシミュレートした包絡波形より FFT 法 (自由度=50) で計算した 36 ケースの平均をと

った。このようにして求めた SP および LI のスペクトルと一致する $E(f)$ を求めるために、 $S(f)$ の帯域幅を変化させた。帯域幅を変える方法としては、Longuet-Higgins(1984) にならって $S(f)$ の値があるレベル以下となる周波数帯でスペクトルをゼロとする方法をとった。その結果、 $m=5$ の場合、 $S(f)$ の値が $S(f_p)$ (f_p : スペクトルのピーク周波数) の 8% 以下となる周波数帯でスペクトルをゼロとしたときのスペクトル $S'(f)$ から計算した $E(f)$ と、SP のスペクトルとがほぼ一致した(図-5(a))。また、25% 以下となる周波数帯でスペクトルをゼロとした $S'(f)$ に対応する $E(f)$ と、LI のスペクトルとがほぼ一致した(図-5(b))。以上の結果より、SP および LI は、かなり狭帯域化したスペクトルの不規則波に対する Rice の包絡線に近い特性を持つことがわかる。 $m=10$ の場合の結果を示したものが 図-5(c) であり、 $S(f)$ の 15% 以下をゼロとして計算した $S'(f)$ に対応する $E(f)$ と LI のスペクトルがほぼ一致し、この場合でも Rice の定義による包絡線より narrow band の $E(f)$ に対応していることがわかる。以上のようにして決定した $S'(f)$ を新たな $S(f)$ として式 (7) に用いた。

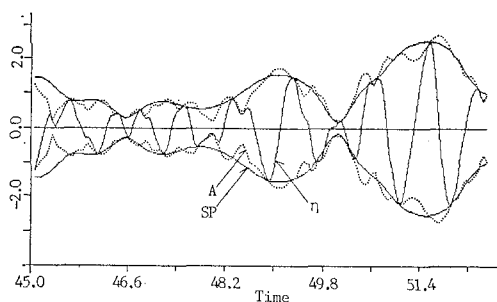


図-4(a) Rice, スプラインによる包絡線

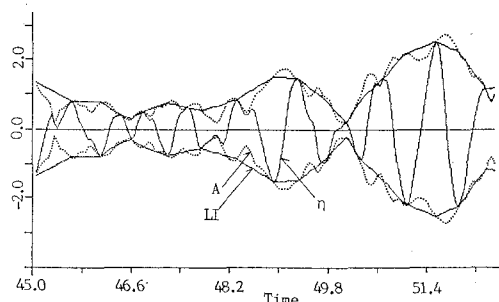


図-4(b) Rice, 直線による包絡線

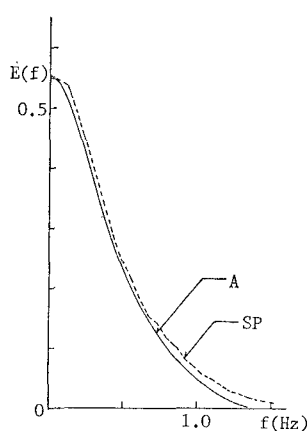


図-5(a) スプライン包絡線のスペクトル ($m=5$)

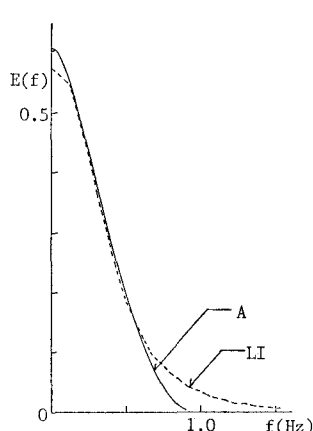


図-5(b) 直線包絡線のスペクトル ($m=5$)

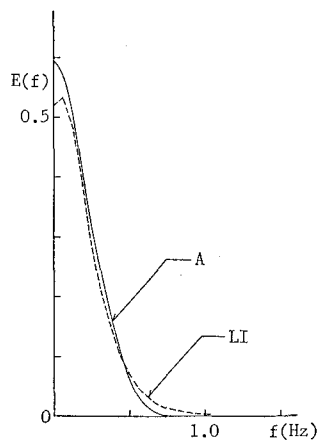


図-5(c) 直線包絡線のスペクトル ($m=10$)

4. 波高と周期の相関

波高の小さな領域では波高と周期の間に相関があり、波高が小さくなれば周期も小さくなる(合田, 1977)。しかし, 2. で述べたように, Tayfun はゼロクロス波の最大点と最小点の間隔を平均周期 $\bar{\tau}$ の半分に固定して波高の確率分布を求めており, 波高と周期の相関は考慮していない。この研究ではこの点に対処するため, Longuet-Higgins(1983) の波高と周期の結合分布に関する理論を用いてゼロクロス波の周期に及ぼす波高の影響を導入した。この理論によれば波高と周期の結合分布は次式で与えられる。

$$p(h, t) = \frac{4h^2}{\pi^{1/2} \nu^2} \frac{\exp[-h^2 \{1 + (1-t)^2/\nu^2\}]}{1 + (1+\nu^2)^{-1/2}} \quad (19)$$

まず, 式 (19) より周期の条件付き確率分布 $p(t|h)$ を求め, $\partial p(t|h)/\partial t = 0$ とおくと周期の最頻値 t_{mode} は次式のように与えられる。

$$t_{\text{mode}} = \frac{2}{1 + (1 + 4\nu^2/h^2)^{1/2}} \quad (20)$$

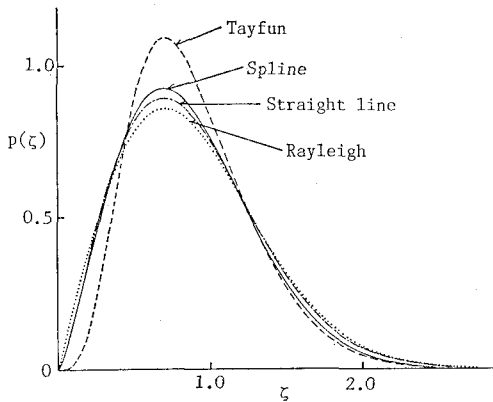


図-6(a) 波高の確率分布の比較 ($m=5$)

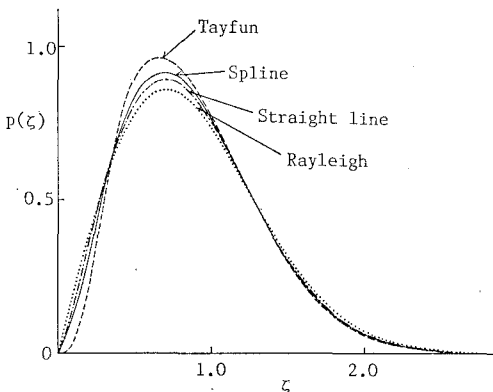


図-6(b) 波高の確率分布の比較 ($m=10$)

本来ならば波高ごとの条件付き確率 $p(t|h)$ の平均値を用いる方が望ましいが, 式 (19) でこれを計算すると, 理論の不備のために無限大となるため, ここでは式 (20) の最頻値を波高ごとの代表周期として式 (7) の計算に用いた。

5. 波高の確率分布

3. および 4. の結果を用いて波高の確率分布をつぎのように算定した。

1. $S(f)$ には 3. で述べたように狭帯域化したスペクトル $S^*(f)$ を, τ には式 (20) で与えられる値を式 (7) に用いて r を計算した。
2. 式 (8) により波高の確率分布を算定した。ただし, 式 (8) の積分は数値積分によった。

図-6 はこのようにして導いた波高の確率分布であり, 実線がスプラインの包絡線によるもの, 一点鎖線が直線の包絡線によるもの, 破線が Tayfun によるもの, 点線が Rayleigh 分布である。図からわかるように, Tayfun の結果よりかなり Rayleigh 分布に近い結果が得られた。特に直線によるものの方が Rayleigh 分布に近い結果が得られた。また, $m=5, 10$ の両方の計算結果ともほぼ等しい結果が得られた。

参考文献

- 合田良実 (1977): 波浪観測記録における波高と周期の結合分布について, 港研資料, No. 272, p. 19.
- Battjes, J. A. and Van Vledder, G. Ph. (1984): Verification of Kimura's theory for wave group statistics, Proc. 19th ICCE, pp. 642~648.
- Dugundji, J. (1958): Envelopes and pre-envelopes of real wave forms, IRE Trans. on Information Theory, IT-4, pp. 53~57.
- Kimura, A. (1980): Statistical properties of random wave groups, Proc. 17th ICCE, pp. 2955~2973.
- Longuet-Higgins, M. S. (1952): On the statistical distributions of the heights of sea waves, J. Marine Res., Vol. 11, No. 3, pp. 245~265.
- Longuet-Higgins, M. S. (1983): On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave field, Proc. Roy. Soc. London, A389, pp. 241~258.
- Longuet-Higgins, M. S. (1984): Statistical properties of wave groups in a random sea state, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, Vol. 312, pp. 219~250.
- Rice, S. O. (1954): Noise and stochastic processes edited by W. Nelson, Dover, pp. 133~294.
- Tayfun, M. A. (1983): Effects of spectrum band width on the distribution of wave heights and periods, Ocean Eng., Vol. 10, No. 2, pp. 107~118.
- Tayfun, M. A. (1989a): Wave envelope and related spectra, J. Wtrway., Port, Coast., and Oc. Eng., ASCE, 115, No. 4, pp. 515~533.
- Tayfun, M. A. (1989b): Envelope, phase, and narrow-band models of sea waves, J. Wtrway., Port, Coast., and Oc. Eng., ASCE, 115, No. 5, pp. 594~613.