

高波の連なりに及ぼす非線形干渉の影響について

安田孝志*・伊藤一教**

1. 緒 言

高波浪、特に $H_{\max}$ を含んだ高波の連なりの特性を解明することは、大水深域での合理的な設計波の推算とも関わって重要である。このため、確率論的取り扱いが合田 (1976) や Kimura (1980) によってなされているが、十分に発達した風浪やうねりに対しては風などの偶然外力に代わって非線形干渉などの影響が相対的に強く顕れるようになるため、高波浪に対するそれらの適用性は必ずしも明らかではない。また、高波浪時の観測データの蓄積が不十分なこともその実態の解明の大きな障害となっている。著者ら (1989) は、うねりのモデル方程式による伝播シュミレーションによって波群と非線形干渉が密接に関わっていることを示したが、モデル方程式の非線形項が長波近似に基づく最低次のものであったという点に問題を残していた。

そこで本研究では、任意スペクトルの不規則波列の伝播問題を3次以上の非線形干渉まで厳密に評価して解き、非線形性の影響を無視できない高波浪時の高波の連なりの特性を流体力学的厳密さをもって解明したい。

2. 伝播シュミレーション

(1) 支配方程式とその解法

非圧縮完全流体場での非回転波動に対する基礎方程式は、波形 $\eta(X, t)$ および水面での速度ポテンシャル $\phi^s(X, t)$ に関する正準方程式に書き換えられる。

$$\partial_t \eta = -\partial_x \phi^s \partial_x \eta + [1 + (\partial_x \eta)^2] \phi_z \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\partial_t \phi^s = -g\eta - \frac{1}{2}(\partial_x \phi^s)^2 + \frac{1}{2}[1 + (\partial_x \eta)^2] \phi_z^2 \quad \cdots \cdots (2)$$

ここに、 ∂_t および ∂_x は時間 t および水平座標 x に関する偏微分記号、 g は重力加速度、 z は平均水面を原点とする上向きの鉛直座標、 t は時間である。現在の計算機的能力では、任意のスペクトルを持つ不規則波に対し、式 (1) および (2) をモード方程式として実際に解くことは2次干渉までが限度であり、3次の共鳴干渉を正

しく評価できない。そこで、Dommermuth-Yue (1987) にならない、式 (1) および (2) を η および ϕ^s に関して直接解くことにする。Dommermuth-Yue によれば、有限水深場における ϕ_z は、 N 個のフーリエモードから成る波動場において M 次までの非線形干渉を考慮した場合、次式のように与えられる。

$$\phi_z = \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{M-m} \frac{\eta^k}{k!} \sum_{n=1}^N \phi_n^{(m)}(t) \partial_z^{k+1} \phi_n(x, 0) \cdots (3)$$

$$\phi_n(x, z) = \cosh k_n(z+h) e^{ik_n x} / \cosh k_n h \cdots \cdots (4)$$

ここで、 $\phi_n^{(m)}(t)$ は、次式を逐次解けばよい。

$$\sum_{n=1}^N \phi_n^{(1)} \phi_n(x, 0) = \phi^s \quad \cdots \cdots (5)$$

$$\sum_{n=1}^N \phi_n^{(m)} \phi_n = - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \partial_z^k \left[\sum_{n=1}^N \phi_n^{(m-k)}(t) \phi_n(x, 0) \right] \quad \cdots \cdots (6)$$

初期波形 η は所定の $k_p a$ 、 $k_p h$ および $m(k_p)$ はスペクトルのピーク波数、 a は $0.5 H_{1/3}$ で与えられる振幅、 m はスペクトルバンド幅パラメタに従う Wallops 型スペクトルによって与え、 ϕ^s はその線形変換によって求める。擬似スペクトル法によって導関数は波数空間上で、非線形干渉項はすべて実空間上で任意のオーダーまで取り込んで計算する一方、時間発展の計算は実空間上で4次の Runge-Kutta-Gill 法によって行う。なお、非線形干渉項の計算によって生じる aliasing 誤差を除去するため、スーパーコンピュータ (VP-200) のベクトル演算による FFT を最大限有効に生かした最適スキームを開発して計算を行っている。

(2) 数値解の精度および計算条件

数値解は空間波形を与えるため、実測時間波形との比較による精度検証はできない。そこで、厳密解 η_e が得られている定常周期波の時間発展波形について数値解 η_n と比較し、その精度について検討する。このため、 η_n と η_e の伝播過程での最大絶対誤差 $\varepsilon_1 = |\eta_n - \eta_e|_{\max}$ によって数値解の厳密解に対する精度を評価する一方、初期波の全エネルギー $E(0)$ に対する誤差 $\varepsilon_2 = |1 - E(t)/E(0)|$ によってエネルギー保存則に対する精度についても検討する。表-1 は $t/T=100$ (T は周期) の時間進ませた時

* 正 会 員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

** 学生会員 岐阜大学大学院 工学研究科

の $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の値を示す。 $ka=0.13$ では 3 次干渉, $ka=0.17$ になると 8 次干渉までの評価が必要となっている。いずれにせよ, 上述の手法によって流体力学の基礎方程式がほぼ厳密に解かれていることは確かである。

表-1 数値解の精度

ka	kh	M	N	t/T	ε_1	ε_2
0.08	1	3	16	100	0.001	0.0006
0.13	1	3	16	100	0.009	0.0014
0.17	1	8	16	100	0.009	0.0035

不規則波に対しては, 非碎波の下で ε_2 が常に 0.05 以下に留まるように $M(\geq 3)$ および N を適宜変化させて計算した。また, 計算は一定水深場での周期的境界条件下の一方方向伝播とし, 波列の長さは $2^6 L_P$ (L_P はスペクトルのピークモードの波長) とした。初期波の条件は, 前述の $k_p h$ の値を 1.04, 1.72, 3.0, $k_p a$ の値を 0.08, 0.17, m の値を 5, 15, 30 とそれぞれ変化させた 18 ケースとした。なお, a の値は生成されたシミュレーション波形の $H_{1/3}$ より求められるものであり, このときの m の値はスペクトル尖鋭度パラメータ Q_p では 2.00, 4.04 および 5.90 に相当している。なお, 1 ケース当たりの計算時間は VP-200 で約 22 分であった。

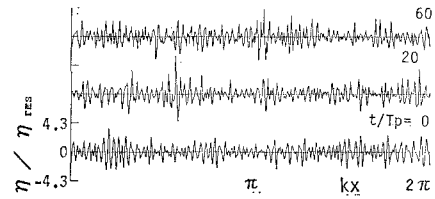
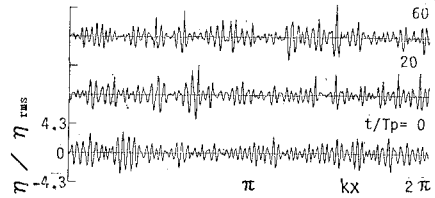
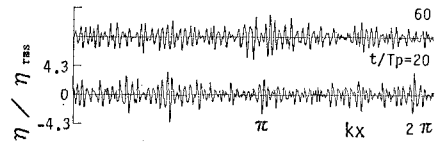
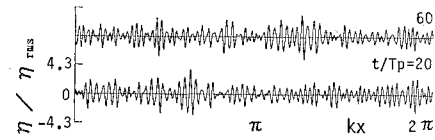
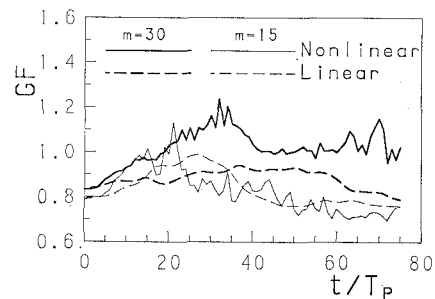
3. 非線形干渉の影響

(1) 変調不安定

図-1 は $k_p a=0.17$, $k_p h=3.0$ の下で $m=15$ および 30 とした場合の波形であり, 図-2 は比較のために同一の初期波を線形波として進ませたものである。不規則波列の形状は非線形干渉の有無に大きく依存しており, 図-2 の波形は波群現象のランダムな位相の組み合わせによる線形変調として説明できることを示すが, 図-1 の波形はこれに比べて急峻であり, 高波浪時の波群が線形変調とは別の機構に基づいていることを示している。

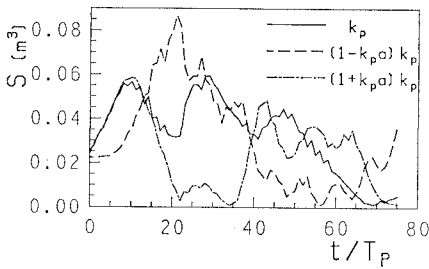
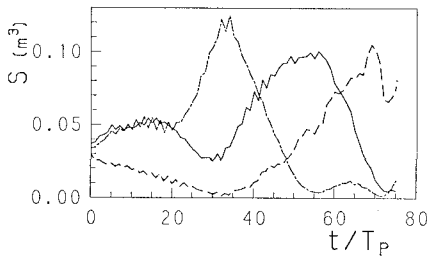
図-3 はこれらの波形に対する GF(Groupiness Factor) の伝播過程での変動を示したものである。線形波とした場合には GF の変動は小さく, バンド幅の影響もほとんど顕れないが, 非線形干渉を評価すると, 波群の形状が急峻となるだけでなく伝播過程での変動も著しく, 狭帯化が進むに従って GF の値も増大する。こうした GF の変化は非線形干渉によるものであり, 高波浪時の波群現象に対してはその影響評価が必須となる。

図-4 は, このときの GF の変動が変調不安定によることを示すため, k_p とその側帯波成分 $(1 \pm k_p a) k_p$ のパワーの時間変化を示したものである。このときのスペクトル形状が非対称なために, 側帯波モードの発達も非対称であるが, $m=15$ では $t/T_p=20$ 付近, また $m=30$

(a) $m=15$ (b) $m=30$ 図-1 非線形不規則波列の時間発展
($k_p h=3.0, k_p a=0.17$)(a) $m=15$ (b) $m=30$ 図-2 線形不規則波列の時間発展
($k_p h=3.0, k_p a=0.17$)図-3 伝播に伴う GF の変動 ($k_p h=3.0, k_p a=0.17$)

では $t/T_p=35$ 付近において側帯波モードに変調不安定が生じてパワーが極大となり, 同時に GF の値も極大となっていることがわかる。このときの GF と両側帯波モードのパワーの差の絶対値 $|S\{(1+k_p a)k_p\} - S\{(1-k_p a)k_p\}|$ との相関係数は, $m=15$ では 0.67, $m=30$ では 0.82 となり, GF と側帯波モードの変調との著しい

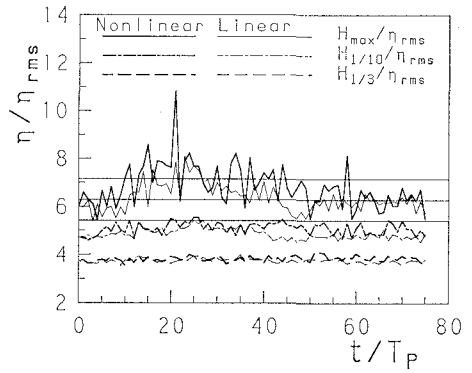
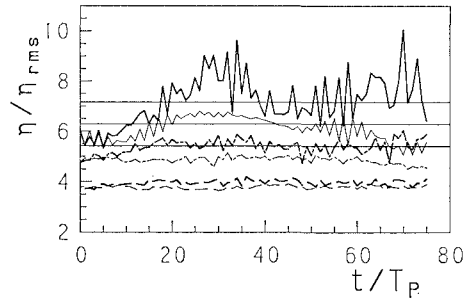
相関から、 $k_p a = 0.17 (H_{1/3}/L_p = 0.054)$ となるような高波浪時の波群現象の主原因は非線形干渉による変調不安定にあることが明瞭となっている。ただし、図面は省いているが、 $k_p a = 0.08$ 程度の小振幅になると、バンド幅に関係なくモードの変調は微小となり、その影響は無視できるようになる。また、 $m=5$ の広帯域の場合でも、 $k_p a = 0.17$ であれば各モードに変調は生じるが、互いに消殺し合うため波群の形成に関する影響は小さい。

(a) $m=15$ (b) $m=30$

図—4 フーリエモードの振幅の変調不安定
($k_p h = 3.0, k_p a = 0.17$)

(2) 代表波高

図—5は、前述の図—1および2に示した波形について、初期波の η_{rms} によって基準化した H_{max} 、 $H_{1/10}$ および $H_{1/3}$ の伝播過程での変動を示したものである。図中の三本の横線は、線形狭帯域仮定の下に導かれる H_{max}/η_{rms} の期待値 $E = 2\sqrt{2\ln J} + 0.5772\sqrt{2\ln J}$ とこれに対する標準偏差 $\sigma = \pi/\sqrt{3\ln J}$ の幅を示したものであり、このときのゼロダウンの波の個数 J は約80である。保存系の下では、変調不安定に関係なく $H_{1/3}$ はほとんど変化せず、線形波との差も無視できる。したがって、 $H_{1/3}$ に関して波浪推算を行う限り、非線形干渉の影響はそれほど重要ではなく、エネルギー収支の合理的評価が本質的といえる。しかし、 H_{max} について見ると、線形波ではその変動は $E \pm \sigma$ の範囲内にほぼ留まっているが、非線形波ではその範囲を上側に大きく越えた変動が生じている。したがって、線形狭帯域の仮定の下に $H_{1/3}$ から H_{max} を推定することは過小評価となり、 H_{max} の

(a) $m=15$ (b) $m=30$

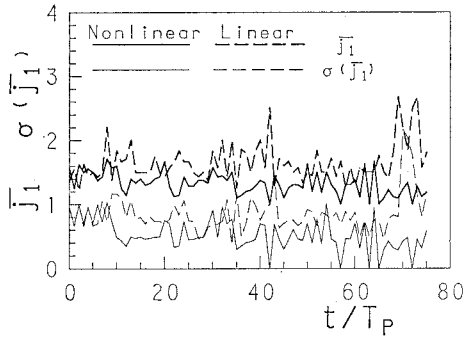
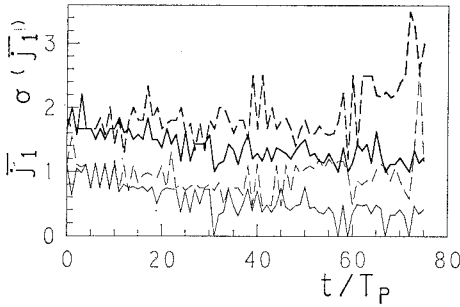
図—5 伝播に伴う代表波高の変動($k_p h = 3.0, k_p a = 0.17$)

推定においては3次以上の非線形干渉の影響を正しく評価することが必要となる。

(3) 高波の連長

波群を時系列の観点から高波の連なりとして捉え、それに及ぼす非線形干渉の影響について検討する。

図—6は、図—5の波について、 $H_{1/3}$ を設定値とした連長の平均 $\bar{j}_1$ およびその標準偏差 $\sigma(\bar{j}_1)$ の伝播過程での変動を示す。連長もやはり伝播の過程で変動し、その変動はGFよりも激しいが、GFの場合と異なり、線形波の方が $\bar{j}_1$ および $\sigma(\bar{j}_1)$ 共に絶対値だけでなく変動も大きい。これは、波群の形状が非線形波のものに比べて穏やかである一方、波群が確率に直接支配される線形変調によっていることにある。ついで、このような平均連長 $\bar{j}_1$ の変動特性を明らかにするため、その変動を平均値 $\langle \bar{j}_1 \rangle$ とそこからの変動の程度を表す変動係数 $C.V. [\bar{j}_1]$ に分け、これらと $k_p h$ および m との関係を表—2に示す。表中のそれぞれ上段は $\langle \bar{j}_1 \rangle$ 、下段は $C.V. [\bar{j}_1]$ を示し、()内は線形波の値を示す。 $\langle \bar{j}_1 \rangle$ について見ると、バンド幅や $k_p h$ の値に関係なく線形波の方が連長は長く、その差は狭帯化に伴って増大する。これは、線形波の $\langle \bar{j}_1 \rangle$ が狭帯化に伴って増大するのに対し、非線形干渉を評価した場合に波列の急峻化によって H_{max} は増大しても連長はほとんど変化しないことによ

(a) $m=15$ (b) $m=30$ 図-6 伝播に伴う連長の平均 $\bar{j}_1$ および標準偏差 $\sigma(\bar{j}_1)$ の変動 ($k_p h=3.0, k_p a=0.17$)表-2 $\bar{j}_1$ の平均値 $\langle \bar{j}_1 \rangle$ と変動係数 C.V. $[j_1]$ に及ぼす非線形干渉とバンド幅 m の影響

$k_p a$	$k_p h$	m		
		5	15	30
0.17	3.0	1.29 (1.34) 0.098 (0.134)	1.32 (1.65) 0.134 (0.182)	1.38 (1.90) 0.174 (0.224)
	1.72	1.36 (1.41) 0.098 (0.138)	1.32 (1.42) 0.128 (0.116)	1.57 (1.72) 0.159 (0.159)
	1.04	1.34 (1.30) 0.127 (0.119)	1.62 (1.78) 0.200 (0.116)	1.78 (2.08) 0.217 (0.216)
0.08	3.0	1.34 (1.34) 0.130 (0.134)	1.63 (1.65) 0.168 (0.182)	1.83 (1.86) 0.165 (0.171)

る。ついで、変動係数について見ると、 m や $k_p h$ の値だけでなく線形・非線形による差異もほとんど認められず、伝播の過程での $\bar{j}_1$ の変動は、非線形干渉の有無や初期波の統計量にほとんどよらないことがわかる。また、 $k_p a=0.08$ では非線形干渉の連長に及ぼす影響はほとんど顕れない。

表-3 は、 $k_p h=3.0$ 、 $k_p a=0.17$ 、 $m=5, 15$ および 30 の初期波に対して合田および木村の理論によって求めた $\bar{j}_1$ と表-2 における $\langle \bar{j}_1 \rangle$ との比較を示す。 γ は隣合った波高の相関係数。非線形波の $\langle \bar{j}_1 \rangle$ は、バンド幅に関係なく線形狭帯域仮定による木村の理論値に

表-3 合田および木村の連長の理論値との比較

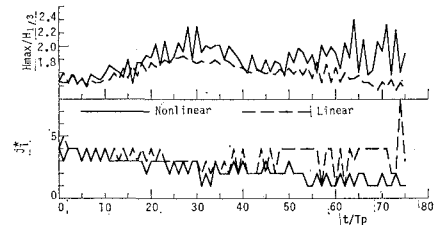
m	γ	Goda's theory	Kimura's theory	$\langle \bar{j}_1 \rangle$	
				Linear	Nonlinear
30	0.45	1.16	1.39	1.90	1.38
15	0.43	1.20	1.40	1.65	1.32
5	0.22	1.18	1.34	1.34	1.29

ほぼ対応し、合田の観測値 1.42 にも近い。これは、非線形干渉にゼロクロス波高をマルコフ連鎖に従わせる働きのあることを示し、このことがその仮定に反した現地波浪の連長をも木村の理論に従わせる原因になっているものと推察される。

(4) $H_{\max}$ を含む連の長さ

$H_{\max}$ を含む連に着目し、 $H_{1/3}$ を設定値としたその連長 j_1^* に及ぼす非線形干渉の影響について検討する。まず、 j_1^* の伝播過程での平均値 $\langle j_1^* \rangle$ および変動係数 C.V. $[j_1^*]$ と初期波との関係について調べた。その結果、前述の表-2 に示した $\bar{j}_1$ の場合と同様な傾向が認められ、 $H_{\max}$ を含む連も単に波列中の 1 個の連に過ぎず、同列に扱われてよいことがわかった。

図-7 は、 $H_{\max}$ と $H_{\max}$ を含む連の長さ j_1^* の伝播過程での変動を比較したものである。線形波の場合も含めて $H_{\max}$ と j_1^* の間に正の相関は見られず、非線形干渉を考慮した場合の $H_{\max}/\langle H_{\max} \rangle$ と $j_1^*/\langle j_1^* \rangle$ の相関係数は逆に -0.55 になる。一般に、 $H_{\max}$ の波は波群を伴い、 $H_{\max}$ の値が増せば、連長 j_1^* も増大すると考えられているが、ここで示した結果は、これと逆の傾向、すなわち、 $H_{\max}$ の波は孤立化して、いわゆる 'freak wave' になる傾向を強め、より大きな $H_{\max}$ を含む波群は他の波群よりも急峻な形状を持つようになることを示している。

図-7 伝播に伴う $H_{\max}$ と $H_{\max}$ を含む連長 j_1^* の変動 ($k_p h=3.0, k_p a=0.17, m=30$)

4. 非線形干渉による 'freak wave'

単独で出現する異常高波は 'freak wave' と呼ばれるが、その成因は多方向からの波が 1 点で強め合うことにあり (Klinting and Sand, 1986)、一方向伝播では 'freak wave' は出現し難いと考えられている。しかしながら、

これまでの検討によって明らかとなったように、非線形干渉によって、‘freak wave’に近い高波の発達が見られるようになる。しかもその傾向は $m=30$ よりも $m=15$ の方が強く、ストークス波の変調不安定とは様相を異にしている。

そこで、Klinting・Sand の定義にならない、 H_{max} の波峯に対する ‘freak wave’ の判定条件として、 $H_{max}/H_{1/3} \geq 2$ 、隣合った波高との比 $\kappa(=H_{i+1}/H_i) \geq 2$ 、波高に対する峯高比 $\mu \geq 0.65$ を設け、伝播の過程でのこれらの値の変化について調べる。図-8 は $k_p h = 3.0$ 、 $k_p a = 0.17$ 、 $m=15$ の場合であり、図中の破線は ‘freak wave’ の臨界値を示す。一方向伝播であっても非線形干渉（共鳴干渉）によって ‘freak wave’ が出現しうることがわかる。表-4 は、伝播の過程で H_{max} の波峯がこれらの条件を満たす頻度を各初期波に対して % で示したものである。（ ）内の数字は線形波に対するものであり、各波の4段目の数字はこれら3条件を同時に満足し、‘freak wave’ と判定される頻度を示す。線形波では ‘freak wave’ の出現頻度はゼロであるが、 $k_p h = 3.0$ の場合に

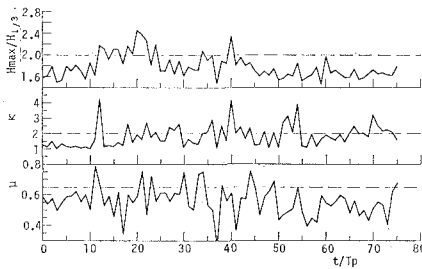


図-8 伝播過程での H_{max} の波峯における ‘freak wave’ の出現状況 ($k_p h = 3.0$, $k_p a = 0.7$, $m=15$)

表-4 H_{max} の波峯が ‘freak wave’ となる頻度

m		$k_p h$		
		3.0	1.72	1.04
5	$H_{max}/H_{1/3} \geq 2$	6.6(1.3)	2.6(9.2)	0 (0)
	$\kappa \geq 2$	23.7(14.5)	5.2(7.9)	18.4(19.7)
	$\mu \geq 0.65$	19.7(1.3)	11.8(5.3)	5.2(1.3)
		2.6(0)	0 (0)	0 (0)
15	$H_{max}/H_{1/3} \geq 2$	22.3(5.3)	0 (0)	0 (21.0)
	$\kappa \geq 2$	34.2(0)	19.7(7.9)	2.6(0)
	$\mu \geq 0.65$	14.5(0)	17.1(1.3)	7.8(0)
		1.3(0)	0 (0)	0 (0)
30	$H_{max}/H_{1/3} \geq 2$	23.7(0)	2.6(0)	0 (15.0)
	$\kappa \geq 2$	19.7(0)	6.6(0)	0 (0)
	$\mu \geq 0.65$	13.2(0)	9.2(0)	7.9(0)
		0 (0)	0 (0)	0 (0)

非線形干渉によって ‘freak wave’ が出現する。この結果は、1次元的に伝播するうねりや十分に発達した風波においても非線形干渉によって ‘freak wave’ が出現しうることを示している。また、GF から見た非線形干渉による波群の発達が最も著しい $m=30$ の場合には ‘freak wave’ の出現頻度はゼロであり、むしろ広帯域の $m=5$ において最も出現頻度が高くなっている点は興味深い。 $m=5$ 、 $k_p h = 3.0$ での $\langle \bar{j}_1 \rangle$ および $\langle j_1^* \rangle$ が 1.3 および 1.1 であり、広帯域になる程、 H_{max} の波が ‘freak’ 的となることに対応している。このように、非線形干渉は、狭帯域では波群を発達させ、GF や $\bar{j}_1$ だけでなく H_{max} にも大きな影響を及ぼす一方、広帯域では H_{max} の波を ‘freak’ 的とし、スペクトルのバンド幅に関係なく非線形干渉、特に共鳴干渉の影響が顕れてくることがわかる。

5. 結 語

任意のバンド幅を持つ不規則波に対して3次の非線形干渉まで厳密に評価した伝播計算を行い、非線形干渉、特に変調不安定の高波の連なりに及ぼす影響について系統的な検討を試みた。その結果、 $k_p h \geq 1.72$ となるような大水深を進む大振幅 [$k_p a \geq 0.17$ ($H_{1/3}/L_p \geq 0.054$)] の不規則波に見られる波群は変調不安定と密接に関わっており、その様相は線形波のものとかかなり異なっていることがわかった。すなわち、狭帯化に伴って H_{max} や GF の値は増大するが、連長は必ずしも増大せず、非線形干渉によって波群の形状は急峻となる。一方、広帯域になると GF および連長共に減少し、波群としての発達は弱くなるが、 H_{max} の波が突出するようになり、一方向伝播の過程でも ‘freak wave’ が出現することになる。

最後に、数値計算の実施に当たって本学共通講座の田中光宏博士に御教示を頂いた。また、本研究は文部省科学研究費一般研究 (C) による成果であることを付記し、併せて感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 合田良実 (1976): 波の連なりの統計的性質について, 港研報告, 第15巻3号, pp. 3~19.
- 安田孝志・鶴飼亮行・土屋義人 (1989): 1次元的に伝播するうねりの統計的性質の空間的変動, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 109~113.
- Dommermuth, D. G. and D. K. P. Yue (1987): A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves J. Fluid Mech., Vol. 184, pp. 267~288.
- Kimura, A. (1980): Statistical properties of random wave groups, Proc. 17th ICCE, pp. 2955~2973.
- Klinting, P. and S. E. Sand (1987): Analysis of prototype freak wave, in Coastal Hydrodynamics (Ed. R. A. Dalrymple, ASCE), pp. 618~632.