

砕波帯内における質量輸送(戻り流れ)の鉛直分布に関する研究

平 山 秀 夫*

1. 緒 論

最近, 砕波帯内における戻り流れの研究が盛んであって, Svendsen (1984)をはじめ, 土屋ら (1986), 灘岡ら (1986)及び岡安ら(1987)等によって, 砕波帯内における定常流の鉛直分布に関する理論的表示法の確立を目ざした研究が数多くなされておられ, 特に岡安らの研究は実験値をかなり良く説明できる段階まで来ている。しかし, その理論的表示式は Dean (1965) の流れ関数法を併用しなければならない等, その適用に当ってはかなり複雑であって, 理論結果をより簡便に表現するという観点からは, まだ検討の余地があるように思われる。

もともと砕波帯は, 砕波に伴って発生する組織的な渦の支配的領域(渦層)とその下層のかなりポテンシャル性の強い領域(波動層)に分けて考えることができる(例えば, 灘岡ら, 1985)。従って, ここで, 渦層領域の特性値を近似的に渦度の大きさの程度で評価できるものとすれば, 下層の波動層は, 渦層と底面境界層を境界条件とするポテンシャル運動と考えても, 波帯内部の流体運動特性の概要はある程度までは把握できるものと考えられる。

本研究では, このような立場から, 一様傾斜面上での砕波帯内外における戻り流れの鉛直分布の理論の確立を, より簡便に表示するという観点から模索しようとするものである。ここでは, まず第1に, 基礎式として Longuet-Higgins (1953) の conduction equation を用いる場合の境界条件式の検討を行う。すなわち, まず底面条件としては, 従来得られている底面波動境界層に基づく底面質量輸送速度を, 傾斜面上での境界層厚や波高の変化をも考慮して理論的に求め, 一方, 水面境界条件としては, 渦層の特性を, Longuet-Higgins (1960) の水面渦度の表現にならって近似的に渦度の推定値で表現した結果を用いる。次に, このようにして得られた底面及び水面境界条件式と流れの連続式を用いて基礎方程式を解くことによって, 戻り流れの鉛直分布を理論的に求めるとともに, 岡安ら(1987)の実験値と比較し, その妥当性

を検証しようとするものである。

2. 砕波帯内における波の質量輸送(戻り流れ)の鉛直分布に関する理論解析

(1) 基礎式及び連続条件式

座標系は静水面に x 軸, その鉛直下方に z 軸をとる。いま, 砕波帯内の波動層内では, 砕波帯外と同様に一貫して微小振幅波理論が適用できるものと仮定すれば, 質量輸送の鉛直分布を支配する基礎方程式は, 質量輸送の流れ関数 Ψ を用いることによって, 次式のように表わされる (Longuet-Higgins 1953b)。

$$\varepsilon^2 \nabla^4 \Psi = \nabla^4 \left\{ \frac{\sigma \sinh 2k(z-h)}{4 \sinh^2 kh} \cdot a^2 \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで, $\varepsilon = a/L$ (a : 波の振幅, L : 波長), $k = 2\pi/L$ である。

次に, 式 (1) において Ψ を, Longuet-Higgins と全く同様に,

$$\varepsilon^2 \Psi = a^2 \sigma \{ \sinh 2k(z-h) + Z^p(z) \} / 4 \sinh^2 kh \dots\dots\dots (2)$$

のように仮定すれば, 式 (1) から次の基礎微分方程式が得られる。

$$d^4 Z^p / dz^4 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

この式を積分することによって, Z^p は,

$$Z^p = \frac{1}{6} C_1 z^3 + \frac{1}{2} C_2 z + C_3 z + C_4 \dots\dots\dots (4)$$

のように表わされる。ここで, $C_i (i=1 \sim 4)$ は未知の積分定数であって, 以下に示す連続条件及び境界条件式から決定される。

連続条件は, 砕波帯内の波動層内でも, 運動の連続性は保持されているとすれば, 質量輸送の流れ関数 Ψ は, $(\Psi)_{z=0} = 0$ 及び $(\Psi)_{z=h} = 0$ が満足されなければならないので, 結局, 次式のような連続条件式が得られる。

$$(Z^p)_{z=0} = \sinh 2kh \dots\dots\dots (5)$$

$$(Z^p)_{z=h} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

(2) 境界条件式の検討

a) 底面境界条件 (平山, 1990): 底面境界条件式を導くに当って, ここでも, 波動層内では砕波帯内外を間

わず一貫して波動性は保持されているものと仮定する。
従って、砕波帯内の波動層内でも、次式で示す質量輸送の基礎式(平山, 1987)が成立するものとする。

$$\begin{aligned} \bar{U} = & \left[\frac{1}{\nu} \int_{-h}^z \left\{ \overline{uw} - \overline{(uw)}_{\infty} \right\} dz \right. \\ & + \frac{1}{\nu} \int_{-h}^z \int_{-h}^{-h+D} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_{\infty}^2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} \right) dz dz \left. \right] \cos \theta \\ & - \frac{1}{\nu} \int_{-h}^z \int_{-h}^{-h+D} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} \sin \theta dz \cdot dz \\ & - \frac{\cos \theta}{\nu} \frac{\partial D}{\partial x} \int_{-h}^z \bar{u}^2 dz + \frac{\partial u}{\partial x} \int_{-h}^z u dt + \frac{\partial u}{\partial z} \int_{-h}^z w dt \\ & \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{U}$: 底面境界層内における質量輸送速度、 ν : 動粘性係数、 D : 境界層厚 [= $\delta\alpha$, α : 定数(水平床上では $\alpha \div 4.0$)、 $\delta = \sqrt{\nu/\sigma}$, $\sigma = 2\pi/T$, T : 周期], $\tan \theta$: 底面勾配、 (u, w) 及び (u_{∞}, w_{∞}) : それぞれ境界層内及び外縁での流速成分である。式(7)に境界層内の運動方程式から得られる (u, w) 等を代入して整理すれば、境界層内及び外縁での質量輸送が求められ、結局、底面境界条件となる境界層外縁における質量輸送速度 ($\bar{U}_{\infty}$) は、次式のように導出される。

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\infty} = & \frac{5}{4} \frac{A^2 k}{\sigma} \left[\frac{1}{5} (2 + 3 \cos \theta) - \frac{3}{5} \cos \theta \cdot \frac{1}{Ak} \right. \\ & \times \frac{dA}{dh} \frac{dh}{dx} - \frac{1}{5k} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \sin \theta - \frac{4}{5} \frac{\cos \theta}{A^2 k} \frac{d\alpha}{dx} \cdot A^2 \\ & \left. \times \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right] \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 $A = \hat{u}_{\infty} = H_0 \sigma [2 \cosh^2 kh / (2 kh + \sinh 2 kh)]^{1/2} / 2 \sinh kh = H_0 \sigma k_s / 2 \sinh kh = H \sigma / 2 \sinh kh$ (k_s : 浅水係数、 H : 波高、 $k = 2\pi/L$, L : 波長、 $\hat{u}_{\infty}$: u_{∞} の最大値) である。次に、式(8)を使って $\bar{U}_{\infty}$ を算出するに当っては、 A 及び dA/dh の値が与えられなければならない。そのためには、砕波帯内外における波高 H の推定式が必要である。従って、ここでは、砕波点以深では微小振幅波理論による浅水係数 (k_s) を用いることにし、一方、砕波点以浅では、次式に示すように、Battjes (1972) の bore モデルを修正した岩垣ら (1981) の波高推定式を用いて、波高変化を表示した。

$$H = \gamma h_b \left[\left(1 - \frac{4}{9} \kappa \right) \frac{h}{h_b} + \frac{4}{9} \kappa \left(\frac{h}{h_b} \right)^{-7/2} \right]^{-1/4} \dots \dots \dots (9)$$

ここで、 h_b は砕波水深で、 γ は次式で表示される菅原ら (1978) の提案式を用いた。

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{H_b}{h_b} = 0.17 \left(\frac{h_b}{L_0} \right)^{-0.9} \times \left\{ 1 - \exp[-1.5 \pi \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{h_b}{L_0} \right)^{0.9} (1 + 15 \tan^4 \theta) \right\} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

(H_b : 砕波々高、 $\kappa = (2\gamma/\pi) B \cdot \varepsilon_0^{-1}$, $\varepsilon_0 = \tan \theta / \sqrt{H_b/L_0}$, $L_0 = gT^2/2\pi$, B は次式に示すように、勾配別に h/h_b の

値によって異った値をとる)。

$i > 1/20$ の場合 (i : 斜面勾配):

$$\left. \begin{aligned} B = & 1 \quad (0.9 \leq h/h_b \leq 1.0) \\ B = & 13 - \frac{40}{3} \cdot \frac{h}{h_b} \quad (0.6 \leq h/h_b \leq 0.9) \\ B = & 5 \quad (h/h_b \leq 0.6) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

$i \leq 1/20$ の場合:

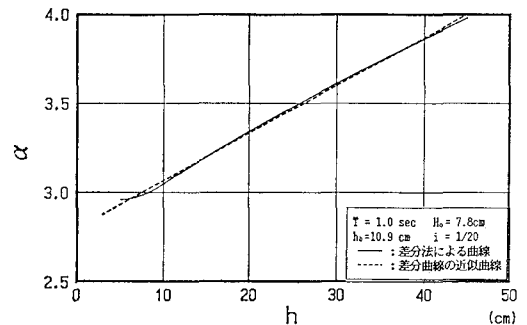
$$\left. \begin{aligned} B = & 11 - 10 \cdot \frac{h}{h_b} \quad (0.6 \leq h/h_b \leq 1.0) \\ B = & 5 \quad (h/h_b \leq 0.6) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

また、これらの式(11)、(12)から dA/dh は次式のように与えられる。

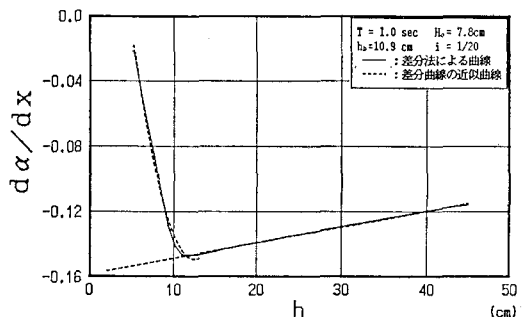
$$\begin{aligned} \frac{dA}{dh} = & \frac{\sigma}{2 \sinh kh} \left[-\frac{\gamma}{4} \left\{ \left(1 - \frac{4}{9} \kappa \right) \frac{h}{h_b} \right. \right. \\ & + \frac{4}{9} \kappa \left(\frac{h}{h_b} \right)^{-7/2} \left. \left. \right\}^{-3/4} \left\{ 1 - \frac{4}{9} \left(\frac{2\gamma}{\pi} \right) \varepsilon_0^{-1} \cdot \left[h_b \frac{dB}{dh} \right. \right. \right. \\ & \times \left\{ \frac{h}{h_b} - \left(\frac{h}{h_b} \right)^{-7/2} \right\} + B \left\{ 1 + \frac{7}{2} \left(\frac{h}{h_b} \right)^{-9/2} \right\} \right. \\ & \left. \left. \left. - H \kappa \coth kh \right\} \right] \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

なお、これらの数式の算定に当っては、平均水位の変化をも考慮して計算を行った。

次に、式(8)中に存在する砕波帯内外における境界層厚の変化特性を示す (α , $d\alpha/dx$) の値の推算法の概要を述



(1) α の値の変化



(2) $d\alpha/dx$ の値の変化

図-1 逆算された $(\alpha, d\alpha/dx)$ の結果

表-1 調整された未定係数の値

勾配	周期 (sec)	沖波々高 (cm)	a	b	c	d	e	f	g
1/20	1.0	7.8	0.02660	2.84067	0.00096	-0.15819	0.00245	-0.06116	0.23296
	1.5	5.2	0.02248	2.99986	0.00062	-0.12590	0.00177	-0.02423	-0.04104
	2.0	4.7	0.01899	3.15008	0.00040	-0.10437	0.00068	-0.01394	-0.02842
1/10	2.0	4.8	0.01955	3.13538	0.00104	-0.22162	0.00125	-0.02009	-0.13220
	1.0	7.5	0.02843	2.76404	0.00235	-0.34414	0.00180	-0.03715	-0.13184
	1.2	5.9	0.02590	2.85742	0.00193	-0.30626	0.00199	-0.03160	-0.16732

べる．ここではまず最初に，質量輸送速度の実験値（平山，1981）から式（8）を用いて差分による逐次計算法に基づいて $(\alpha, d\alpha/dx)$ の値を逆算した．それらの結果の1例を図-1に示す．これらの図から明らかなように，差分法による結果は，一般的に， α については砕波点内外を問わず h の1次関数で，一方， $d\alpha/dx$ は砕波点以深では h の1次関数で，砕波点以浅では h の2次関数で近似できるように思われるので，次式のように回帰曲線を仮定して計算を進めた．

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= ah + b \\ d\alpha/dx &= ch + d (h/h_b \geq 1) \\ d\alpha/dx &= eh^2 + fh + g (h/h_b < 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

これらの未定係数 $(a, b, \dots, g)$ は最小自乗法によって算定されるが，より実験値に適合するように若干修正された結果を，各実験条件ごとにまとめて示したのが表-1である．これらの結果から明らかなように，境界層厚は砕波帯外から内に向ってほぼ直線的に減少することが明らかである．次に，境界層厚の変化を波の諸元（例えば， $T, H_0/L_0$, etc.）と関係づけることを試みた．その結果，図-2にそれらの結果の1例を示すように，いずれも周期 T の1次関数で表示できることが明らかになった．従って，最終的には， α 及び $d\alpha/dx$ は勾配別に次式に示すように周期と水深の関数として表わされることが見い出された．

$i=1/20$ の場合: (c. g. s. 単位)

$$\alpha = (-0.00701 h + 0.30941)T + 0.03410 h + 2.53276$$

$$d\alpha/dx = (-0.00056 h + 0.05382)T + 0.00150 h - 0.21021 (h/h_b > 1 \text{ のとき})$$

$$d\alpha/dx = (-0.00177 h^2 + 0.04723 h - 0.26138)T + 0.00422 h^2 - 0.10839 h + 0.49434 \quad (h/h_b \leq 1 \text{ のとき})$$

..... (15)

$i=1/10$ の場合: (c. g. s. 単位)

$$\alpha = (-0.00901 h + 0.37334)T + 0.03731 h + 2.38270$$

$$d\alpha/dx = (-0.00134 h + 0.12252)T + 0.00369 h - 0.46666 (h/h_b > 1 \text{ のとき})$$

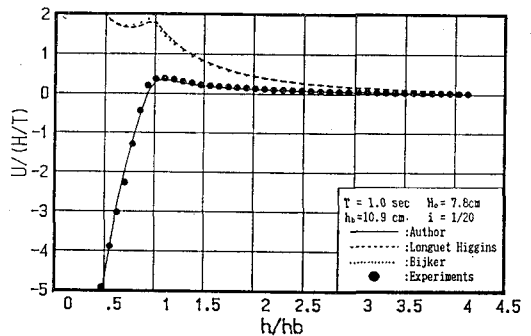
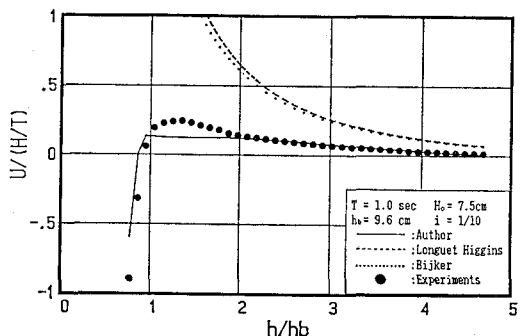
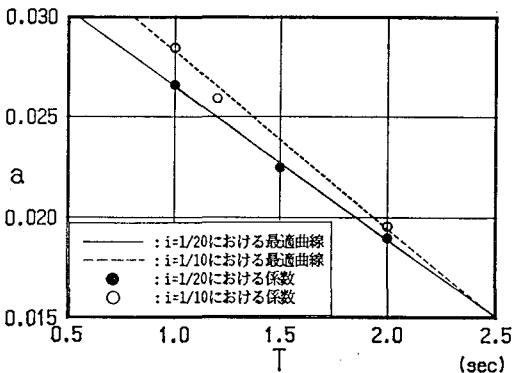

 (1) $i=1/20$ の場合

 (2) $i=1/10$ の場合

 図-2 未定係数 a と波の周期との関係

図-3 底面質量輸送速度の理論値と実験値の比較

$$\begin{aligned} d\alpha/dx = & (-0.00055 h^2 + 0.01706 h - 0.00036)T \\ & + 0.00236 h^2 - 0.05422 h - 0.13148(h/h_0 \leq 1) \end{aligned} \quad (16)$$

以上に示した式 (15) と (16) の α , $d\alpha/dx$ の値を用いて式 (8) に基づいて計算された底面質量輸送速度の理論結果を実験値と比較して勾配別に例示したものが図-3(1), (2) である。これらの図から明らかなように、式 (15), (16) に基づく底面質量輸送速度の推定式は実験値のある程度良く説明しているように思われる。

以上の結果から、結局、最終的な底面境界条件式は、式 (2) と (8) を用いることによって、 $\bar{U}_\infty = (\varepsilon^2 \partial \Psi / \partial z)_{z=h}$ の関係式から次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dZ^p}{dz} \right)_{z=h} = & 5k \left[\frac{1}{5} (2 + 3 \cos \theta) - \frac{3}{5} \cos \theta \frac{dh}{dx} \right. \\ & \cdot \left(\frac{1}{Hk} \frac{dH}{dh} - \coth kh \right) - \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \sin \theta - \frac{4}{5k} \cos \theta \\ & \cdot \left. \frac{d\alpha}{dx} \cdot \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right] - 2k \quad (17) \end{aligned}$$

ここで、上式中の $(\alpha, d\alpha/dx)$ は、前述の式 (15), (16) のように与えられている。

b) 水面境界条件: ここでの水面条件は、砕波帯内における渦層の渦度を Longuet-Higgins (1960) と類似な方法によって表現できるものとし、いま、水面質量輸送速度勾配 $(\varepsilon^2 \partial^2 \Psi / \partial z^2)_{z=0}$ を過度の程度に応じて決定されるべき定数 β ($\beta > 0$) を用いて表わせば、次式のように与えられる。

$$\left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)_{z=0} = -2a^2 \sigma k^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right) \coth kh \quad (18)$$

従って、水面境界条件 $(d^2 Z^p / dz^2)_{z=0}$ は、式 (2) と式 (18) から結局次式のように表わされることになる。

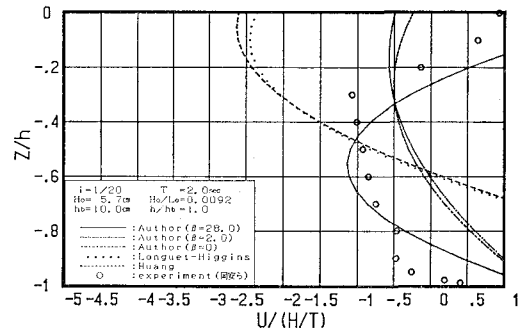
$$\frac{d^2 Z^p}{dz^2} = -2\beta k^2 \sinh 2kh \quad (19)$$

このように、砕波帯内の渦層の渦度は係数 β の値によって大きく変化させることができるが、従来の水平床上での水面渦度は、次に示す β の値によって、

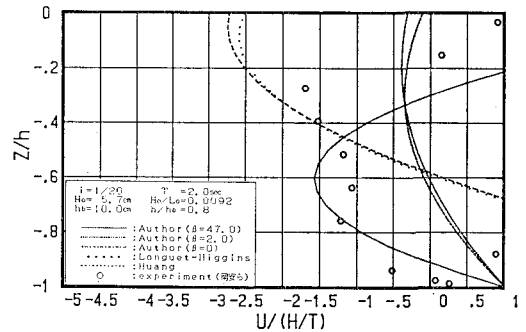
- $\beta=0$: 水表面で渦度を 0 と仮定した Stokes (1847) あるいは Huang (1970) の水面条件による結果、
 $\beta=2$: Longuet-Higgins (1960) の理論結果、を表わすことになる (平山ら, 1988)。

(3) 理論結果

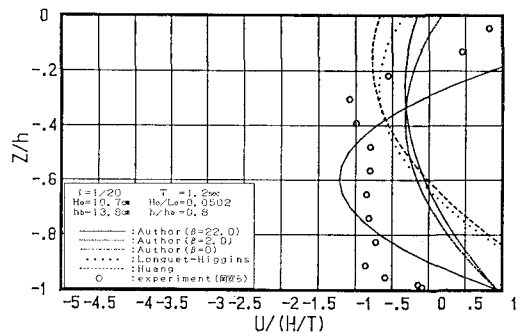
以上に示した連続条件式 (式 (5), (6)) 及び境界条件式 (式 (17), (19)) を用いることによって基礎式 (式 (3)) を解けば、式 (4) 中の未知定数 C_i ($i=1 \sim 4$) が決定される。得られた Z^p を式 (2) に代入して $\varepsilon^2 \Psi$ を求めれば、傾斜面上の砕波帯内での質量輸送速度 (戻り流れ) $\bar{U}$ の理論結果は、次式のように表わされ、結局、これが砕波帯内における戻り流れの鉛直分布を表示することになる。



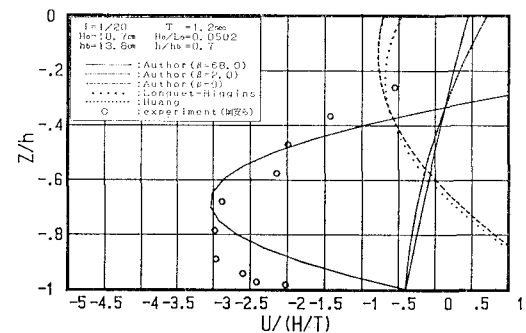
(1) $T=2.0$ s, $H_0=5.7$ cm, $h/h_0=1.0$ の場合



(2) $T=2.0$ s, $H_0=5.7$ cm, $h/h_0=0.8$ の場合



(3) $T=1.2$ s, $H_0=10.7$ cm, $h/h_0=0.8$ の場合



(4) $T=1.2$ s, $H_0=10.7$ cm, $h/h_0=0.7$ の場合

図-4 砕波帯内の質量輸送速度 (戻り流れ) の鉛直分布の理論値と実験値の比較 ($i=1/20$)

$$\begin{aligned} \bar{U} = \varepsilon^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= -\frac{a^2 \sigma k}{4 \sinh^2 kh} \left[2 \cosh \left\{ 2 kh \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \right\} + 3 \cos \theta \right. \\ &\quad + \frac{\beta kh}{2} \cdot \left(3 \frac{z^2}{h^2} - 4 \frac{z}{h} + 1 \right) \sinh 2kh \\ &\quad \left. + 3 \left(\frac{\sinh 2kh}{2 kh} + \frac{3}{2} \cos \theta \right) \left(\frac{z^2}{h^2} - 1 \right) + R \right] \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、

$$\begin{aligned} R = \frac{9}{2} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) &\left[-\frac{4}{3k} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{d\alpha}{dx} \cdot \cos \theta \right. \\ &\quad - \sin \theta \cdot \left(\frac{1}{4 kh b_0} \left[\frac{h}{b_0} + \frac{4}{9} \kappa \left\{ \left(\frac{h}{b_0} \right)^{-7/2} - \frac{h}{b_0} \right\} \right] \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \left\{ 1 - \frac{4}{9} \frac{1}{B} \kappa \cdot \left[h_b \frac{dB}{dh} \left\{ \frac{h}{b_0} - \left(\frac{h}{b_0} \right)^{-7/2} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B \left\{ 1 + \frac{7}{2} \left(\frac{h}{b_0} \right)^{-9/2} \right\} \right] \right\} + \coth kh \\ &\quad \left. + \frac{1}{3k} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

である。なお、上式中の α 及び $d\alpha/dx$ は、前述のように、それぞれ式(15)及び(16)で与えられる。

3. 砕波帯内における質量輸送（戻り流れ）の鉛直分布特性

式(20)を用いて種々の β の値に対して計算された理論結果を、岡安ら(1987)の実験結果と比較して示したのが図—4 (1)～(4)である。図中の1点鎖線、2点鎖線及び実線は、それぞれ $\beta=0$ 、 $\beta=2.0$ 及び実験値に最も適合するような β の推定値に基づく場合の結果を示す。ここでは、理論値と実験値の比較は $i=1/20$ の場合のみしか示していないが、これらの図から明らかなことは、1)本理論結果は、係数 β の値の変化に伴ってその鉛直分布型は著しく異なるが、適当な β の値を選べば、実験条件にかかわらず、全般的に岡安ら(1987)の実験値をかなり良く説明できるように思われる点、2)水深が浅くなって h/h_0 の値が小さくなるにつれて、前進する水面質量輸送速度はかなり大きくなる傾向が見られるが、一方、底面付近の戻り流れは、それに対応して逆に冲向き速度が大きくなるようである点、3)このようにして算定された渦度の推定値は、傾斜面上の砕波帯内の水面渦度が、水平床上の砕波帯外のそれに比較して、約1桁以上オーダーが大きくなり、かつそれは砕波型式や水平方向の位置の相違によってもかなり変化する点、などである。

4. 結 論

本研究で得られた成果を要約すれば、次のようである。

1) 底面条件として理論的に導いた底面質量輸送速度は、砕波帯内外を問わず実験値をかなり良く説明できる。

2) 推定された渦層の渦度の大きさは、砕波帯外と比較して約1桁オーダーが大きく、かつ砕波型式や水平方向の位置の相違によってもかなり変化する。

3) 質量輸送速度（戻り流れ）の理論値の鉛直分布型は、水面条件の渦度の大きさの与え方によって著しく変化するが、適当な値を与えれば、本理論結果はかなり良く実験値を説明でき、かつ簡単に理論値を算出できることから実用的と思われる。

最後に、これまで常日頃、温かい御指導を賜ってきた京都大学名誉教授岩垣雄一先生（現名城大学理工学部教授）、日頃、御激励を賜っている京都大学防災研究所長土屋義人教授及び実験データを快く御提供賜った横浜国立大学工学部助教授柴山知也・岡安章夫の両先生に深甚なる謝意を表わします。

参 考 文 献

- 岩垣雄一・間瀬 肇・田中 剛 (1981): 不規則波の浅海変形モデルについて、第28回海岸工学講演会論文集, pp. 104～108.
- 岡安章夫・柴山知也・堀川清司 (1987): 砕波帯内定常流速場の鉛直分布に関する研究、第34回海岸工学講演会論文集, pp. 31～35.
- 菅原輝夫・山本正昭 (1978): 波の浅水変形計算モデル、第25回海岸工学講演会論文集, pp. 80～84.
- 土屋義人・山下隆男・植本 実 (1986): 砕波帯における戻り流れについて、第33回海岸工学講演会論文集, pp. 31～35.
- 瀬岡和夫・小谷野宮二・日野幹夫 (1985): 二成分光ファイバ—流速計を用いた砕波帯内流速場の特性の解明、第32回海岸工学講演会論文集, pp. 50～54.
- 瀬岡和夫・広瀬文人 (1986): 砕波の物理過程に基づいた砕波帯内の拡散係数のモデル化、第33回海岸工学講演会論文集, pp. 26～30.
- 平山秀夫 (1981): 傾斜底面上における波による質量輸送速度に関する実験的研究、第28回海岸工学講演会論文集, pp. 29～33.
- 平山秀夫 (1987): 二次元傾斜海岸上における質量輸送に関する理論的研究(第2報)、第34回海岸工学講演会論文集, pp. 6～10.
- 平山秀夫 (1988): 二次元傾斜海岸上における波による質量輸送の鉛直分布について、第35回海岸工学講演会論文集, pp. 11～15.
- 平山秀夫 (1990): 傾斜面上の砕波点付近における底面質量輸送速度に関する研究、大阪府立高専研究紀要, Vol. 24, (投稿中).
- Dean, R. G. (1965): Stream function representation of nonlinear ocean waves, J. G. R., Vol. 70, No. 18, pp. 4561～4572.
- Longuet-Higgins, M. S. (1953): Mass transport in water waves, Phil. Trans. Royal Soc., Series A, No. 903, Vol. 245, pp. 535～581.
- Longuet-Higgins, M. S. (1960): Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface, J. F. M., Vol. 8, pp. 293～306.
- Svendson, I. A. (1984): Mass flux and undertow in a surf zone, Coastal Eng., Vol. 8, pp. 347～365.