

渦素子法を用いた水平床上周期波砕波の数値解析

長尾昌朋*・沢本正樹**・首藤伸夫***

1. はじめに

海岸工学の諸問題において波を外力として正しく評価することは非常に重要である。外洋から伝播してくる波の変形過程はかなりの精度で予測できる。また、砕波後の波状段波等の波高変化やエネルギー減衰に関しては実験的研究がよくなされている。しかし、それを結び付ける砕波現象に関しては水深、波高および波長を用いて砕波指標や砕波形態としてまとめられているだけで、その内部機構に関する詳細な研究は少ない。

砕波現象を数値計算で再現する場合、多価関数となる水面波形をどのように扱うかが問題となる。MAC法(例えば Sakai ら, 1988)等の2次元計算ではこのような水面波形を取り扱うことは可能であるが、スーパーコンピュータを用いてもなお膨大な計算時間を要する。そこで、本研究では、媒介変数を用いて水面波形を表現できる渦素子法を用いて砕波現象を再現する。また、基本的に渦を取り扱うため、流体内に存在する渦の挙動も計算できる利点を利用して、流体内の乱れを渦で模式的に表現し、乱れなどの外乱が砕波現象に与える影響を考察する。

2. 砕波変形に関する数値解析

(1) 基礎方程式と計算方法

砕波現象のように自由に変形する境界を持つ流体運動には2層流や内部波がある。2層流の界面は Helmholtz の不安定として知られている。Birkhoff (1962) は界面に同じ強さの渦を等間隔に配慮して界面の両側の流体の運動を表現し、渦の相互干渉から界面の挙動を考察している。また、Baker ら(1982) は内部波の挙動を再現するために、上下の流体の密度差と圧力の連続を考慮して界面と見なす渦膜の位置と強さを表す方程式を導いた。ここでは、この方法を拡張して水表面と見なす渦膜に関する基礎方程式を導く。

等間隔(L : 波長)で並んだ同じ強さの渦(Z : 渦の複素

座標, r : 強さ $\times 2\pi$)の複素速度ポテンシャルは

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{r}{2\pi i} \log \{z - (Z + jL)\} \\ = \frac{r}{2\pi i} \log \left[\sin \frac{\pi}{L} (z - Z) \right] \dots \dots \dots (1)$$

となる。水表面を渦の集合(渦膜)と考えた周期波の複素速度ポテンシャルは式(1)を水面に沿って積分することで得られる。また、水平床の場合には底面に関する鏡像を重ね合わせることで底面の境界条件を満たすことができる。部分積分を施して整理すると、水平床上の周期波の複素速度ポテンシャルを表す式(2)が得られる。右辺第2項は底面に関する鏡像である。

$$W(z, t) = \frac{1}{2Li} \int_0^L \mu(a, t) \cot \frac{\pi}{L} \{z - Z(a, t)\} \\ \cdot \frac{\partial Z(a, t)}{\partial a} da - \frac{1}{2Li} \int_0^L \mu(a, t) \cot \frac{\pi}{L} \{z - Z^*(a, t)\} \\ + 2hi \frac{\partial Z^*(a, t)}{\partial a} da \dots \dots \dots (2)$$

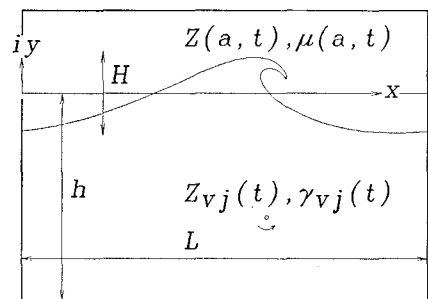


図-1 座標系

表-1 数値計算条件

波長	水深	初期波高		格子間隔	
L (m)	h (m)	H (m)	case	Δa (m)	Δt (s)
1.00	0.50	0.10 - 0.20	6	1/128	1/128
1.00	0.30	0.10 - 0.30	7	1/128	1/128
1.00	0.20	0.10 - 0.30	7	1/128	1/128
1.00	0.10	0.10 - 0.30	7	1/256	1/128
1.00	0.05	0.10 - 0.30	7	1/256	1/128

* 正会員 工修 東北大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 東北大学教授 工学部災害制御研究センター

ここで、 z : 複素平面、 t : 時間、 a : 水表面の Lagrange 変数、 g : 重力加速度、 L : 波長、 h : 水深、 H : 波高、 W : 複素速度ポテンシャル、 Z : 水表面の複素座標、 μ : 水表面の渦膜の r を a 積分した量である (図-1 参照)。

この渦膜の運動を水表面と見なすためには、渦膜上で水表面での運動学的・力学的境界条件を満たす必要がある。運動学的条件から渦膜の移動速度が流体内の流速に等しいので式(3)が得られる。

$$\frac{\partial Z(a,t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial W(z,t)}{\partial z} \right\}^* \text{ on } z=Z(a,t) \dots\dots\dots (3)$$

また、力学的条件から渦膜上での圧力が大気圧中と同じで、Bernoulli の方程式から式(4)が得られる。

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial W(z,t)}{\partial z} \left\{ \frac{\partial W(z,t)}{\partial z} \right\}^* + \frac{p(z,t)}{\rho} + g \operatorname{Im}[z] = f(t), p(z,t)=0 \text{ on } z=Z(a,t) \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 p : 圧力、 ρ : 流体密度である。Bernoulli 定数 f は μ の平均値が変化しないように決める。式(3)、(4)に式(2)を代入すると水表面と見なした渦膜の運動に関する方程式が得られる。このとき被積分関数の $\cot$ の項に特異点が生じるので式(5)のように変形する。

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow Z(a)} \frac{1}{2Li} \int_0^L F(a') \cot \frac{\pi}{L} \{z - Z(a')\} da' \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial F(a)}{\partial a} \left/ \frac{\partial Z(a)}{\partial a} \right. + \frac{1}{2Li} \int_0^L F(a') \cot \frac{\pi}{L} \\ \cdot \{z - Z(a')\} da' \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここで、 $\int$ は Cauchy の主値積分を意味する。

式(3)、(4)から導かれる発展方程式の数値計算には 4 次の Runge-Kutta 法を用いる。数値積分には台形公式を用い、特異点を含む区間では 3 次の spline 関数を用いて近似する。特異点を含む数値計算では、数値誤差が計算結果に大きな影響を与えるので、発展計算の 1 段階毎に、 Z 、 μ を平滑化する。

数値計算の初期条件には式(2)から微小振幅の仮定を用いて導いた解を用いる。

$$\begin{aligned} Z(a, 0) = a + \frac{H}{2} \left\{ -\coth \left(\frac{2\pi h}{L} \right) \sin \left(\frac{2\pi a}{L} \right) \right. \\ \left. + i \cos \left(\frac{2\pi a}{L} \right) \right\} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(a, 0) = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \left\{ \sqrt{\tanh \left(\frac{2\pi h}{L} \right)} \right. \\ \left. + \sqrt{\coth \left(\frac{2\pi h}{L} \right)} \sin \left(\frac{2\pi a}{L} \right) \right\} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

周期波の条件として波長を $L=1.0 \text{ m}$ とし、波高 H と水深 h を変えて計算を行った。表-1 に計算の条件を示す。

(2) 解析結果

波高の最大値と砕波形態を図-2 に示す。非砕波は○、崩れ砕波は□、巻き砕波は△である。初期条件として与

えた微小振幅波はエネルギーが一様に分布しているが、非線形波では山の部分にエネルギーが集中するため波高増幅が起こる。相対水深が小さいほどこの傾向は大きい。波高が砕波限界を越えると砕波するが、砕波・非砕波の境界は Yamada ら (1968) の砕波指標とよく一致している。図-2 に示す CASE1 の $\rho \sqrt{gh^3}$ 、 ρgh^2 で無次元化した運動量とエネルギーの経時変化を図-3 に示す。全エネルギーがほぼ一定値であることから、数値計算の精度は妥当なものといえる。巻き砕波では砕波点を越えると位置エネルギーが減少し、運動エネルギーが増加する。これと同時に鉛直下向きの運動量が発生することから、砕波の突出部が重力によって落下し、位置エネルギーが運動エネルギーに変化するものと考えられる。

CASE1 の波形、流速分布、圧力分布、加速度分布を図-4 に示す。流速は、砕波点において水表面が鉛直に切り立った部分で波速を越える。その後、流速が波速より大きい領域は砕波の突出部である。加速度は砕波前から波の前面で重力加速度を越え、その後も波の前面から突出部にかけて重力加速度より大きい。波の突出部の加速度はほとんど重力加速度に等しく、ほぼ自由落下している。

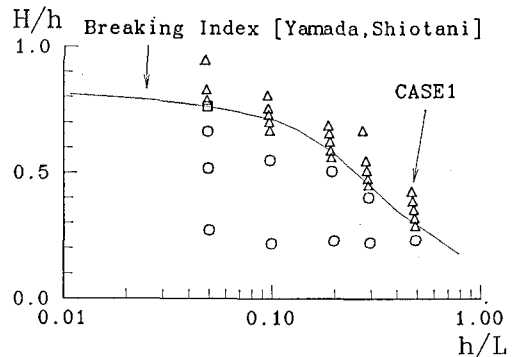


図-2 砕波波高(○非砕波, □崩れ砕波, △巻き砕波)

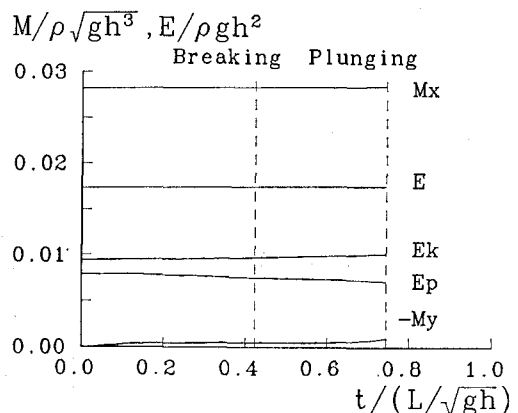
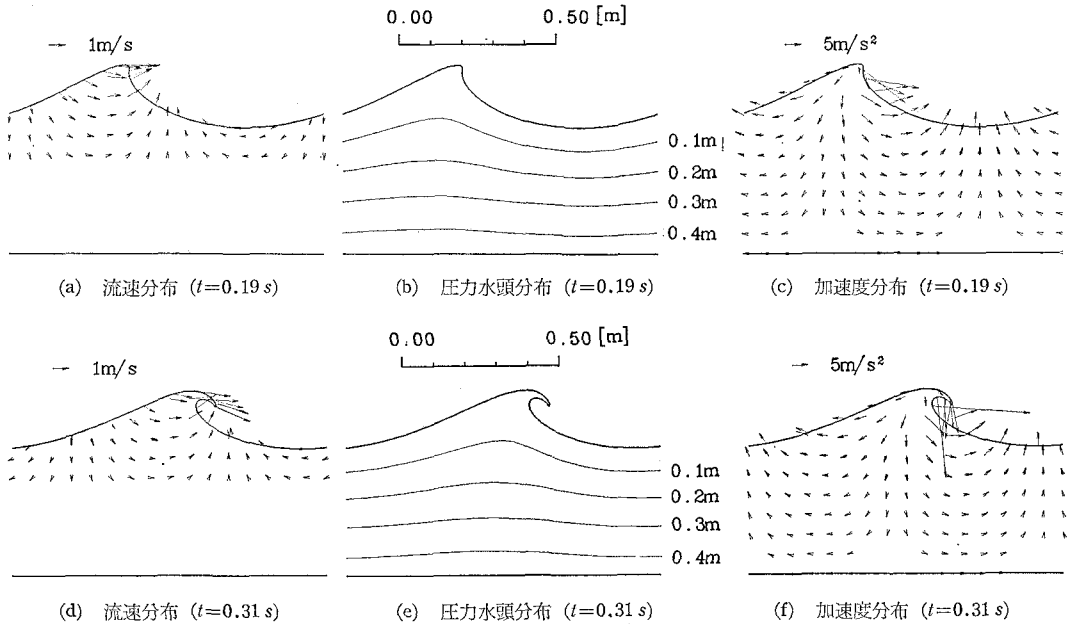


図-3 運動量、エネルギー (CASE1)



図—4 流速・圧力・加速度分布 (CASE 1)

3. 砕波変形におよぼす外乱の影響

砕波現象は不安定な過渡現象であるため、乱れの影響を大きく受けると考えられる。そこで、流体内に置いた渦を乱れと見なして、砕波変形への影響を考察する。

(1) 基礎方程式の変形

流体内に式(1)で表される複数個のポテンシャル渦を置いた場合、水平床上の周期波の複素速度ポテンシャルは式(6)となる。新たに加わった項が流体内の渦の複素速度ポテンシャルである。

$$W(z, t) = eq. (2) + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{vj}}{2\pi i} \log \left[\sin \frac{\pi}{L} \{z - Z_{vj}(t)\} \right] - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{vj}}{2\pi i} \log \left[\sin \frac{\pi}{L} \{z - Z_{vj}^*(t) + 2hi\} \right] \dots (8)$$

ここで、 Z_v : 渦座標、 γ_v : 渦循環である。波の挙動を表現する方程式は式(3)、(4)である。流体内に置いたポテンシャル渦は流体の運動とともに移動するので式(9)が得られる。

$$\frac{\partial Z_{vj}(t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial W(z, t)}{\partial z} \right\}^* \text{ on } z = Z_{vj}(t), j = 1, \dots, n \dots (9)$$

式(9)に式(8)を代入すると渦の自分自身の実像が特異点となるので、これを取り除いて計算する。数値計算は2.(1)節と同じ手法を用いる。波の初期条件には式(6)、(7)を用い、 $L=1.0\text{m}$ 、 $h=0.5\text{m}$ 、 $H=0.4\text{m}$ として強制的に巻き砕波を発生させた。

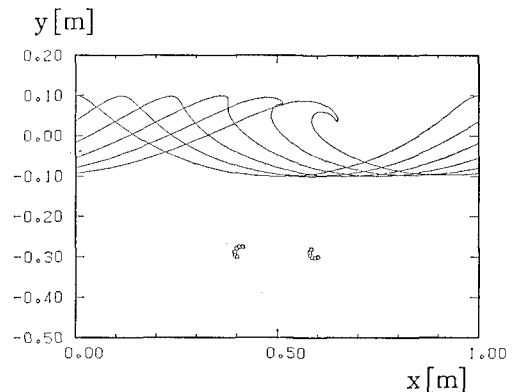
(2) 砕波変形におよぼす乱れの影響

まず、簡単な例として流体内に2個の渦をおいて、砕波変形への影響を調べた。渦の初期位置、循環は

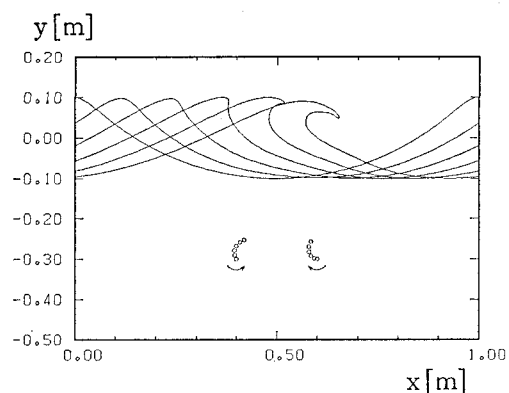
$$Z_{v1} = (0.4\text{m}, -0.3\text{m}), \gamma_{v1} = \pm 0.1\text{m}^2/\text{s}, \\ Z_{v2} = (0.6\text{m}, -0.3\text{m}), \gamma_{v2} = \pm 0.1\text{m}^2/\text{s} \dots (10)$$

とし、渦の向きを変えて4例の数値計算を行った。砕波変形に与える影響を強調するために、循環の大きさを渦による水面付近での流速が渦の無い場合の流速の10%程度になるように設定した。

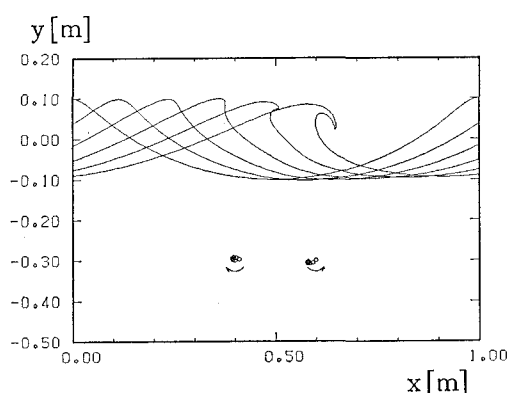
図—5に基準となる渦の無い場合の砕波波形を示す。図中の粒子は水粒子の動きである。図—6に渦を置いた場合の砕波波形を示す。図—6(a)では渦の間に上昇流が生じている。渦の影響は主に初期状態における谷部分に



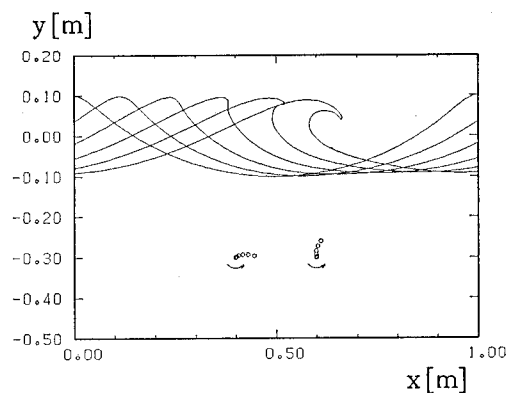
図—5 渦無し砕波変形



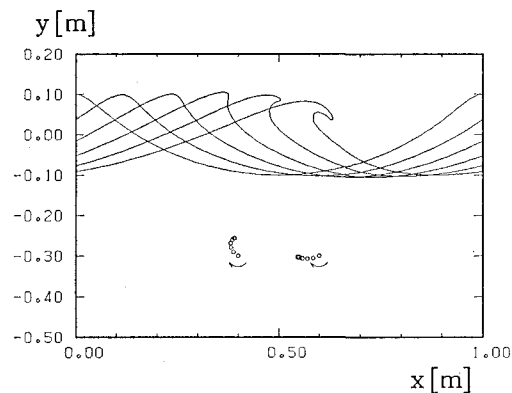
(a) 渦の間に上昇流となる場合



(b) 渦の間に下降流となる場合

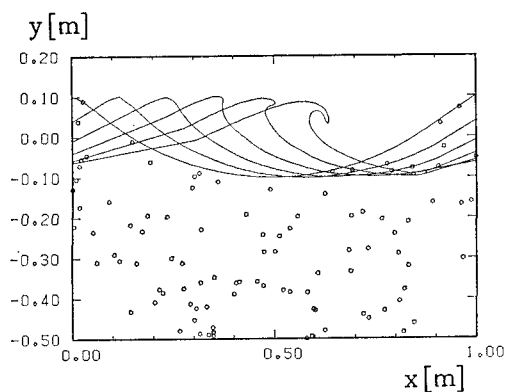


(c) 2個の渦が左回転

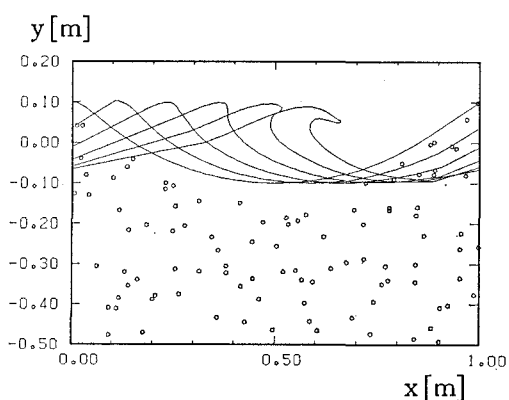


(d) 2個の渦が右回転

図-6 流体中に2個の渦がある場合の砕波変形



(a) 例1



(b) 例2

図-7 たくさんの渦を不規則に配置した場合の砕波変形 (渦は初期位置のみ表示)

働いているので、砕波点付近までは渦の影響は無く、谷部分にわずかに水位の上昇として影響がみられる。砕波後は、谷部の水位の上昇により波前面部での圧力勾配が小さくなり、その影響で波前面の鉛直に切り立った部分の進行速度が遅くなっている。また、波の突出部の速

度は砕波点での波速で決まるので、上昇流の影響が小さいために突出部の速度は渦無しの場合とほぼ同じである。その結果進行方向に延びた砕波波形となっている。図-6(b)では渦の間に下降流が生じている。この場合には逆の現象が生じ、谷部の水位の低下により波前面部で

の圧力勾配が大きくなりその部分での進行速度が速くなる。突出部の速度は変わらないので、結果的に突出部が巻き込まれたような形となっている。図-6(c)では全体的に左回りに回転している。砕波前では渦の影響は波前面部分の水位の低下として現れている。そのため砕波点では波前面での圧力勾配が大きくなり、突出部分の速度が大きくなっている。波の前面は渦の影響で水位が低下しているので、砕波波形は大きな弧を描いている。図-6(d)では全体的に右回りに回転している。この場合渦の影響が波前面部での水位の上昇として現れるので、突出部分の速度が小さくなり、砕波波形は小さな弧を描いている。

実際の周期波の砕波現象では、前の砕波による乱れが次の砕波まで残っていると考えられる。そこで、流体内に100個の渦を不規則に配置してそのような現象を再現した。渦の循環の絶対値の最大値は $5 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ 程度で、これらの渦により発生する流速は大部分の領域で波速の数%以下である。このような乱れを含む砕波現象の計算結果を図-7に示す。このような乱れは砕波の規模、変形過程に大きな影響をおよぼす。よって、砕波現象とその後に生じる大規模な乱れを考える場合には、その相互作用も考慮にいれて考察しなければならない。

4. おわりに

渦素子法を水表面に適用して水平床上の周期波の砕波を再現した。砕波・非砕波の境界は砕波指標とよく一致

した。巻き砕波では砕波点を過ぎると突出部が自由落下するため、位置エネルギーが運動エネルギーに変換されると考えられる。

流体中の乱れを渦で模式的に表現すると、乱れを考慮した砕波現象を再現できる。圧力勾配の大きな領域に乱れが存在すると砕波変形に対して大きな影響を与える。元来、乱れの大部分は前の砕波によって発生したと考えられるので、砕波と大規模乱れはお互いに干渉し合う関係にあると考えられる。

最後に、本研究は文部省科学研究費重点領域研究(1)(代表者: 大橋秀雄東京大学教授)および総合研究(A)(代表者: 服部昌太郎中央大学教授)の補助を受けたことを付記し、謝意を表します。また、本論文の発表に際し、小川記念基金の補助を受けた。

参考文献

- Sakai, T., H. Tanaka and K. Murai (1988): Numerical analysis of violent motion after wave plunging on beach, 6th Congr. Asian and Pacific regional division IAHR, Kyoto, pp. 81~88.
- Birkhoff, G. (1962): Helmholtz and Taylor instability, Proc. Symp. Appl. Math., 13, pp. 55~76.
- Baker, G. R., D. I. Meiron and S. A. Orzag (1982): Generalized vortex method for free-surface flow problems, J. Fluid Math., Vol. 123, pp. 477~501.
- Yamada, H. and T. Shiotani (1968): On the highest water waves of permanent type, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., Vol. 18, Part 2, No. 135, pp. 1~22.