

任意海底地形と汀線移動を考慮した沿岸波浪の数値解析

水田 洋*・蓑島正敏**・岡村敬二***・高橋 将****

1. はじめに

海岸線より数 km 以内の沿岸域における海洋波動の研究では、日常的な波浪が主な研究対象であるが、突発的で大規模な津波や高潮などが、我々に身近なスケールではどの様に振舞い災害をもたらすかを知ること重要なテーマである。この方面では、これまで数多くの理論的・実験的・数値的な研究が行われてきているが、沿岸域で二次元的な拡がりを持つ領域における数値的な研究となると、その数は限られたものになってしまう。その主な理由は、沿岸域の数値解析では、海底地形の変化とともに汀線の動きも考慮することが必要になってくるため、微分型の浅水波方程式を固定された規則格子で差分化するのが困難なためである。これは、解析領域が数百 km 以上あるため汀線の動きがほとんど問題とならず、固定された規則格子で数値解析を実行できる従来の津波・高潮の数値的な研究とは対照的である。

汀線の動きと海底地形の変化を取り入れた沿岸海洋波動の数値解析を行うため、動く境界と共に流体を分けたセルが変形する「変形可能セル法」の適用を図った。この方法とそれによる計算機プログラムはもともと、境界に自由表面・密度界面を持つ水理学的な流れを扱うために開発されたものである（水田, 1985, 1987, 1990）。海洋波動と水理学的な流れでは支配する方程式は異なるが、「変形可能セル法」では数値解析式をセルに含まれる体積・質量・運動量に対する積分型の保存則から導いており、圧力を水位、自由表面を汀線、水路幅の変化を海底地形の変化と見直すと、従来のプログラムを沿岸海洋波動のために無理なく利用することができるのである。

本論文ではまず、「変形可能セル法」に従って、積分型の保存則から浅水波方程式に相当する数値解析式を導

く。沿岸海洋波動の数値解析では、「汀線」と、沖合の「開いた境界」が重要な境界条件である。ここでは、「汀線」に接するセルに単位時間当りに流入出する流量から体積保存則を満たすように汀線の法線流速を求め、また Sommerfeld の放射条件を満たすように「開いた境界」上の水位を定めた。

数値解析例として、海底地形も沖波の形も沿岸方向には変化しない一次元的な場合と、解析領域の中央に海谷がある二次元的な場合を紹介する。一次元的な場合については、既にある実験や数値解析と定量的な比較を行った。本論文では更に、境界要素法で同様の数値解析を行い、その結果とも比較している。二次元的な場合については定性的な検討に留まるが、波浪の反射・屈折などを予測どおり再現した。

2. 積分型の保存則による数値解析式

津波や高潮の数値解析には普通、微分型の二次元浅水波方程式の空間微分を規則格子上で差分化した式を用いるが、本論文では、汀線の動きに合わせて変形する四辺形のセルで水平方向の分割を行い、数値解析式は体積・質量・運動量に対する積分型の保存則から導く。この際浅水波方程式と同様、流速は鉛直方向に一樣、圧力は静水圧分布であることを仮定する。

基本量として、図-1(a)のセル $c=A, B, \dots$ に、セル内部の流体の体積 V_c ・質量 M_c ・運動量 $(Mv)_c$ を、格子点 $v=1, 2, \dots$ に、水平座標 r_v ・破線で囲まれた領域内

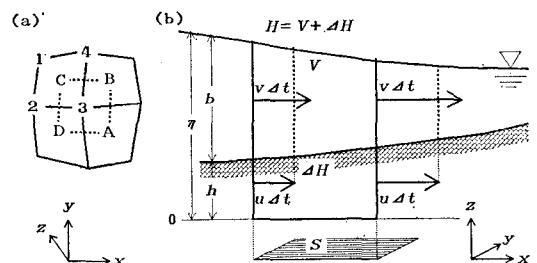


図-1 セルの平面図(a)および鉛直断面図(b)

* 正会員 理博 北海道大学助手 工学部数物系共通講座

** 学生会員 北海道大学大学院工学研究科

(現(株)竹中工務店)

*** 学生会員 工修 北海道大学大学院工学研究科

**** 正会員 北海道大学助教授 工学部数物系共通講座

の体積 H_v を配置する。ただし H は図—1(b) のように、鉛直面に囲まれた流体の体積 V に基準水平面から海底面までの体積 ΔH を加えたものである。これらから、セル内部では水位 η_0 (η_v より内挿)・流体密度 ρ_0 ($=M_0/V_0$)・流速 $\mathbf{v}_0$ ($=(M\mathbf{v})_0/M_0$) が、格子点上では水位 η_v ($=H_v/S_v$, S_v は図—1 破線領域の面積)・流体厚 b_v ($=\eta_v - h_v$, h_v は海底面の高さ)・流体密度 ρ_v (ρ_0 より内挿)・流速 $\mathbf{v}_v$ ($\mathbf{v}_0$ より内挿)・格子点移動速度 $\mathbf{u}_v$ ($\mathbf{v}_v$ より) が、括弧内のように誘導される。

n ステップでの $\mathbf{r}_v$, H_v , V_v , M_v , $(M\mathbf{v})_v$ が既知ならば、時間 Δt 後の次のステップにおけるこれらの量は、保存則から以下のように求められる。

$$\mathbf{r}_v^{n+1} = \mathbf{r}_v^n + \mathbf{u}_v^n \Delta t, \dots\dots\dots (1)$$

$$H_v^{n+1} = H_v^n + \left[\oint_{b+h} dS \cdot \mathbf{u} \right]^n \Delta t - \left[\oint_b dS \cdot \mathbf{v} \right]^n \Delta t, \dots\dots\dots (2)$$

$$V_v^{n+1} = V_v^n + \left[\oint_b dS \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \right]^n \Delta t, \dots\dots\dots (3)$$

$$M_v^{n+1} = M_v^n + \left[\oint_b dS \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rho \right]^n \Delta t + (\text{拡散項})^n \Delta t, \dots\dots\dots (4)$$

$$(M\mathbf{v})_v^{n+1} = (M\mathbf{v})_v^n + \left[\oint_b dS \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rho \mathbf{v} \right]^n \Delta t + (\text{圧力項} + \text{重力項})^{n+1} \Delta t + (\text{摩擦項})^n \Delta t, \dots\dots\dots (5)$$

ここで面積分 $\oint dS$ の範囲は、セルの側面・上面・下面にわたる。下面は、添え字が b なら海底面、 $b+h$ なら基準水平面である。このような積分の使い分けは、本来 (3) のような体積保存則を (2) のように書き替えた際に生じた。この書き替えの理由は、たとえ h が一様でなくても、最初に η が一様で至る所で $\mathbf{v} = 0$ であれば、この状態がその後も持続することを計算上も保証するためである。なお側面積分は、被積分量が鉛直方向に一様なら、 $\mathbf{z}$ を鉛直上向き単位ベクトルとして、セルの境界に沿って一周する線積分 $\oint b d\mathbf{r} \times \mathbf{z}$ または $\oint \eta d\mathbf{r} \times \mathbf{z}$ に置き替えることができる。

$\mathbf{u}$ は任意の方法で決めてよい。 $\mathbf{u} = 0$ で Euler 法、 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ で Lagrange 法となるが、ここでは、領域内の格子点は汀線と沖合境界の移動速度の内挿に基づき、岸沖方向にだけ動くようにしている。 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が異なる効果は、保存則の中で $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ を含む対流束項によって取り込まれる。面積分に必要なのは側面積分だけで、これは、 Δt の間に隣り合うセル同士で実質的にやり取りされる領域に含まれる保存量の大きさに等しい(水田, 1985)。

静水圧分布を仮定して圧力項と重力項を合わせると、これは鉛直座標によらない $p^* \equiv p_s + \rho g \eta$ により、式(6)第2辺のように表現される。ただし p_s と g は、セル上面の大気圧と重力加速度である。この場合の面積分には

上面・下面の寄与も必要で、図—1(a)のセルCについてこの項は、 p^*_{i-4} の線形結合で式(6)第3辺のように表される。ここで格子点4から2に向かうベクトルを $\mathbf{r}_{42}$ のように表し、4を越えた下つき添え字は、4を引いた番号と同一視している。

$$(\text{圧力項} + \text{重力項}) = - \oint_b dS p^*_v = - \frac{1}{12} \sum_{v=1}^4 p^*_v \times \left[\mathbf{r}_{v+3, v+1} b_{v+2} + (\mathbf{r}_{v+3, v+1} + \mathbf{r}_{v+3, v+2}) b_{v+3} + 2\mathbf{r}_{v+3, v+1} b_v + (\mathbf{r}_{v+3, v+1} + \mathbf{r}_{v+2, v+1}) b_{v+1} \right] \times \mathbf{z}, \dots\dots\dots (6)$$

摩擦項には、式(7)を用いる。ただし S_b はセルの水平面への投影面積、 γ^2 は海底摩擦係数で、0.001–0.1の範囲の値とする。

$$(\text{摩擦項}) = S_b \tau_b, \quad \tau_b \equiv -\rho \gamma^2 |\mathbf{v}| \mathbf{v}. \dots\dots\dots (7)$$

式(2), (5)をそれぞれ S_v , $\rho_0 S_0$ で割れば、水位 η と流量 $\mathbf{q} \equiv b\mathbf{v}$ に対する浅水波方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{q}) + \frac{b}{\rho} \nabla (p_s + \rho g \eta) - \frac{\tau_b}{\rho} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

に等価になる。ここで ∇ は二次元微分演算子である。数値解析には、(8), (9)を差分化するより、式(1)~(5)を用いる方が見通しがよいことは、明らかであろう。

3. 境界条件(汀線および開いた境界)

沿岸域の数値解析で重要な境界条件は、まず「汀線」である。「自由表面」が圧力を指定して、体積保存則から法線流速を求める境界であるように、「汀線」も流体厚を0と指定して、やはり体積保存則から法線流速を求める境界である。図—2(a)のような汀線に接する領域から(b)のようなセルを取り出す。これに Δt の間に体積 ΔV だけの流体が流入出し、その結果上面 ABCD が平行に $A'B'C'D'$ まで移動するとき、鉛直方向移動距離 β を求めることを考える。移動前の体積は、 S_A などを上面内で A を中心に隣り合った3頂点で作る三角形の水平面内投影面積として、 $V = [b_c(S_B + S_C + S_D) + b_d(S_C + S_D + S_A)]/6$ と表される。移動後の体積は、同じ表式の中で $b_{c,d}$ に β を加え、 S_A などに汀線 AB の平行移動による変化を取り込んだものである。両体積の差から、 β に対する3次方程式(10)が導かれる。ここで、

$$S_A - S_D = S_B - S_C \text{ を } \Delta S \text{ と置いた。}$$

$$\Delta V = \left[\frac{1}{6} \left(5 + \frac{b_c}{b_d} \right) S_A + \frac{1}{6} \left(5 + \frac{b_d}{b_c} \right) S_B - \Delta S \right] \beta + \frac{1}{2} \left(\frac{S_A}{b_d} + \frac{S_B}{b_c} \right) \beta^2 + \frac{\Delta S}{3b_c b_d} \beta^3. \dots\dots\dots (10)$$

$\mathbf{n}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{x}$ を法線、接線、岸沖各方向の単位ベクトルとすれば(以後ベクトルは、もし鉛直成分があっても水平面内成分だけを考える)、法線流速は β により、

$v_n \Delta t = \beta(r_{DA}/b_D + r_{CB}/b_C) \cdot \mathbf{n}/2$ で与えられ、接線流速 v_s が求まればこれと共に境界上の流速を $\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + v_s \mathbf{s}$ と表すことができる。また格子点の移動速度は今の場合、 $\mathbf{u} = v_n \mathbf{x}/(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$ のように求められる(図-2(a) 参照)。

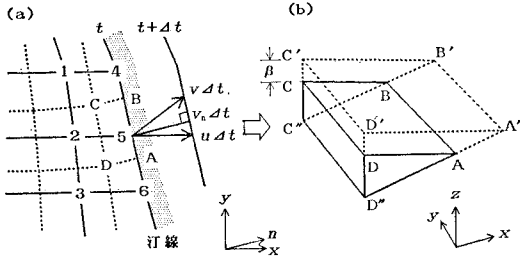


図-2 汀線における法線流速 v_n の求め方

以上により、体積保存則と、水位が海底面の高さに一致するという2つの条件は同時に満たされる。なお、 Δt の間に上面が平行移動すると仮定したが、次のステップの $b_{C,D}$ には、 $b_{C,D} + \beta$ ではなく b_{1-6} の内挿値を使うので、上面の勾配は時間と共に変わり得る。

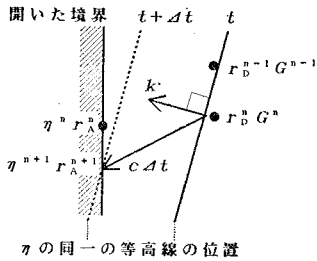


図-3 開いた境界における水位 η の求め方

「開いた境界」は、汎用性のある、特性曲線法、あるいは Sommerfeld の放射条件の考え方で扱う。すなわち、時刻 $t + \Delta t$ および境界上の点 $\mathbf{r}_A^{n+1}$ における水位 η^{n+1} は、情報伝達速度(長波速度と考えてもよい)を $\mathbf{c}$ と定義すると、時刻 t および領域内の点 $\mathbf{r}_A^{n+1} - \mathbf{c} \Delta t$ における η に等しい(図-3 参照)。このことは式(11)のように表されるが、前の時間ステップでの水位が $\mathbf{r}_A^{n+1}$ とは一般に異なる点 $\mathbf{r}_A^n$ 上で $\eta^n = \eta(\mathbf{r}_A^n, t)$ と与えられることを考慮しながら式(11)を Δt で Taylor 展開すると $(\mathbf{r}_A^{n+1} - \mathbf{r}_A^n = O(\Delta t))$ 、Sommerfeld の放射条件 $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla \eta = 0$ と等価な式(12)を得る。

$$\eta^{n+1} = \eta(\mathbf{r}_A^{n+1}, t + \Delta t) = \eta(\mathbf{r}_A^{n+1} - \mathbf{c} \Delta t, t) \dots (11)$$

$$\approx \eta^n + (\mathbf{r}_A^{n+1} - \mathbf{r}_A^n) \cdot \nabla \eta - \mathbf{c} \Delta t \cdot \mathbf{k} [\nabla \eta] \dots (12)$$

式(12)は $\mathbf{c} \Delta t$ を単独ではなく、 η の勾配ベクトル $\mathbf{k} \equiv \nabla \eta / |\nabla \eta|$ との内積の形で含んでいる。そこでこれを内

積ごと、領域内部の点 $\mathbf{r}_D$ におけるある量 G (いまは η 自身)を用いて、

$$-\mathbf{c} \Delta t \cdot \mathbf{k} = [G^n - G^{n-1} - (\mathbf{r}_D^n - \mathbf{r}_D^{n-1}) \cdot \nabla G] / |\nabla G| \dots (13)$$

と定める。これは Orlanski (1976) の方法を、セルの形と $\mathbf{c}$ の方向が任意でもよいように拡張したものであるが $\mathbf{c}$ の方向は求める必要はない。また領域内部から外部への透過波 η^i の他に外部から内部への入射波 η^e がある時は、境界上の全水位を η として、 $\eta^i = \eta - \eta^e$ に対して式(12)(13)を適用する。

浅水波方程式による数値解析では、長波関係式 $\eta = \mathbf{q} \cdot \mathbf{c} / c^2$ によってもっと簡単に「開いた境界」を扱う場合が多い。この方法は、方程式が線形・非分散なら式(12)を用いることと等価になり、更に日野・仲座(1988)の仮想固定境界の方法も、境界付近で格子間隔を $\mathbf{c} \Delta t$ に等しくとれば、式(12)に一致する(水田, 1989)。

4. 変形可能セル法による表面重力波の数値解析

二次元領域での数値解析に先立ち、沿岸方向に変化のない海底地形に、汀線に平行で一定な波峰線を持つ沖波が入射する、一次元的な場合の数値解析を実施した。

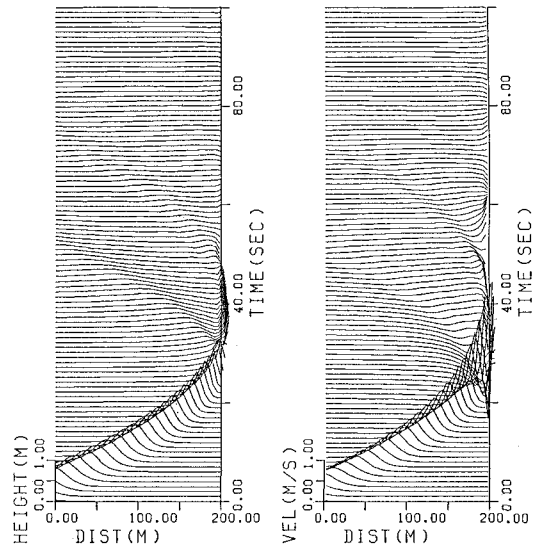
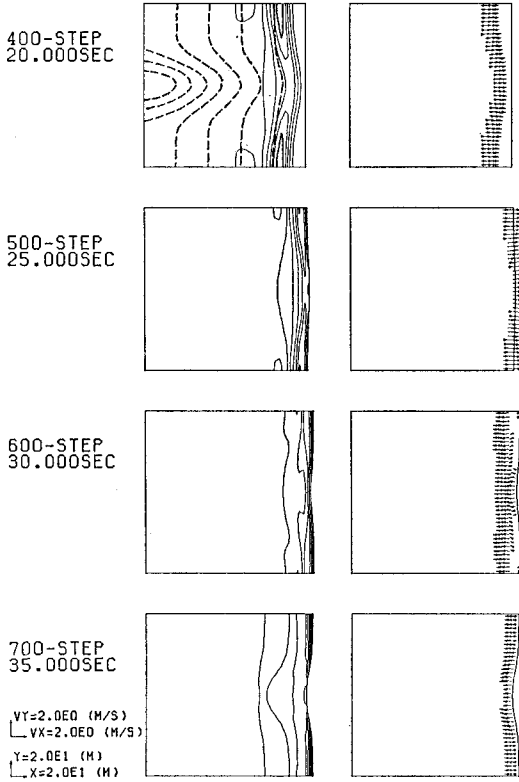


図-4 一次元的な数値解析例 左: 水位, 右: 流速

図-4 は、左端から入射した沖波波高 0.5 m の孤立波が、沖合水深 20 m, 斜面勾配 1/10 (斜面角 $\beta = 5.7^\circ$ 度に相当)、摩擦係数 0.1 のような斜面を遡上する場合の波形の時間変化を示したもので、遡上に伴う波高の増加、波長の減少、汀線の移動、一次反射、二次反射が認められる。ここでは 200 m × 200 m の領域を 40 × 40 のセルに

分割し、左端は開いた境界、右端は汀線、時間刻みは、 $\Delta t=0.05$ 秒としている。結果の定量的なチェックを行うため、既にある実験や数値解析、更に次節で述べる境界要素法による結果と共に、沖波波高と斜面上の最大遡上高の関係を調べた。これについては第6節で述べる。



図—5 二次元的な数値解析例 左：水位，右：流速

次に、海底地形が沿岸方向にも変化する二次元問題として、数値解析領域の中央に海谷（深さは最も沖合の中央で60m、両脇で20m）がある場合を、図—4と同じ領域の大きさ、境界条件、空間刻み、時間刻みで実行した。図—5は、沖合波高0.3mの孤立波が、等深線が破線で示されているような海底地形に入射する場合の水位分布(左)と流速分布(右)である。波は水深の大きいところ程速く進むから、等水位線はまず中央部が汀線に到達するが、波高は両脇の方が大きいので、最大遡上高はむしろ両脇の方が高い。このことは、津波の被害は海谷の両側で大きいという報告とも合致している。

5. 境界要素法による表面重力波の数値解析

まず非粘性流体を想定し、流体は非回転・非圧縮とする。このとき速度ポテンシャル $\phi(x, y, t)$ が存在して時間的に常に、

$$\Delta\phi(x, y, t)=0 \dots\dots\dots(14)$$

が成立する。流体境界は自由境界 Γ_s 、一定底面 Γ_b 、傾斜斜面 Γ'_b 、造波ピストン Γ_p である。ここで Γ_p の左右運動(変位 $X=X_p(t)$) が Γ_s 上に表面波を発生する。さらに長さに関して水深 h 、時間に関して $\sqrt{h/g}$ で無次元化された境界条件は流体密度を1として

$$D\phi - (\phi_s^2 + \phi_n^2)/2 + \eta = 0, \quad D\eta = 0 \quad (\Gamma_s), \\ \phi_n = 0 \quad (\Gamma_b, \Gamma'_b), \quad \phi_n = -\dot{X}_p \quad (\Gamma_p) \dots\dots\dots(15)$$

である。ただし、 D はラグランジュ微分、 η は水面変位、添字 s, n は境界の接線、法線方向の微分、ドットは時間微分を表す。また、初期静止条件としては、

$$\eta = 0 \quad (\Gamma_s), \\ \phi = 0 \quad (\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_b + \Gamma'_b + \Gamma_p) \dots\dots\dots(16)$$

を課す。

さらに式(14)から(16)に基づいて方程式系を境界積分型方程式に変換した(岡村・八鉦, 1986)。

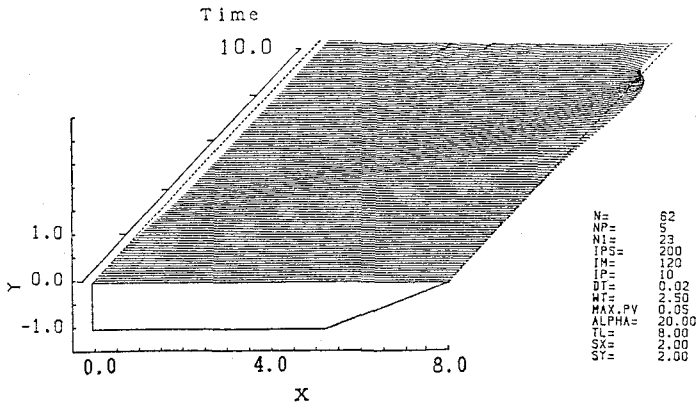
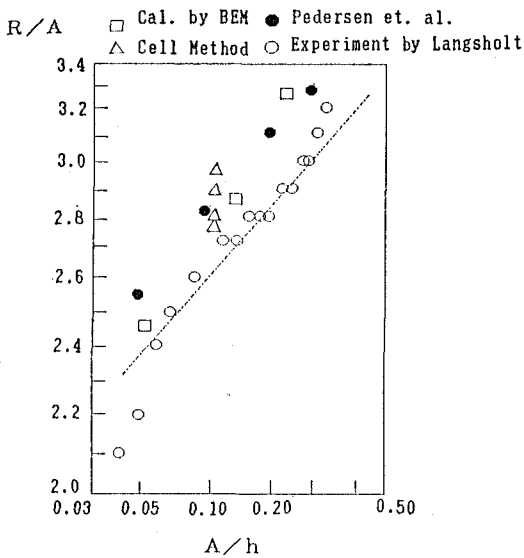
そこで変形可能セル法の摩擦係数ゼロ極限の最大遡上高 R をチェックするためにセル法と同じ A/h (水深規格波高) の孤立波を用いて境界要素法による再計算を行った。図—6は $A/h=0.05$ の孤立波を $\beta=20$ 度の斜面上に遡上させたときの水面変位を無次元時間ステップ0.2おきに示した図である。図からわかるように遡上に伴う波高の増加、一次反射、二次反射などが認められる。その汀線運動は、Carrier・Greenspan (1958) が用いたホドグラフ変換を利用した Synolakis (1987) による弱非線形の遡上高の時間変化の予想値と矛盾しないことがわかった。

6. 定量的な比較

図—7は、 A/h に対する R/A の関係を、 $\beta=20$ 度の場合について示したものである。 Δ と $\square$ は、本論文の (a) 変形可能セル法 (摩擦係数は下から 0.1, 0.05, 0.01, 0.001) および (b) 境界要素法 (摩擦無し) による計算結果である。また、 $\bullet$ は (c) ラグランジュ法による計算 (摩擦無し)、 $\circ$ は (d) Langsholt の水槽実験、点線は (e) 水槽実験から導いた Hall & Watts の経験式 $R=KA^\alpha$ ($K=3.48, \alpha=1.13$) を表す ((c) (d) (e) は Pedersen ら (1983) 参照)。この図からわかるように、経験値から導いた (e) に比べて、計算上の遡上高は、摩擦が小さいためいずれも大きくなる。(b) と (c) の両結果は近い値を与えるが、(a) には摩擦係数の大小による R の変化傾向がある。

7. おわりに

沿岸海洋波動の数値解析では、海底地形の変化とともに汀線の動きを考慮することも必要になるが、このような問題も、セルの変形を許し積分型の保存則を用いる「変形可能セル法」で扱えることを、簡単な例で示した。

図-6 $A/h=0.05$ の孤立波の $\beta=20$ 度の斜面への遡上計算結果図-7 A/h に対する R/A の関係

このとき、境界要素法による計算も行い、定量的な比較をした。

残されている問題としては、静水圧分布からのずれによる分散効果の取り込みがある。これは、非線形性が強く、伝播距離が更に長くなったとき、孤立波を安定に伝播させるために必要になる。このためには、圧力分布を

非圧縮性条件から求める手続きを経ればよいが、Bousinesq 近似のような分散項で近似を少し進めることもできるであろう。

参 考 文 献

- 岡村数二・八鉦 功 (1986): 浅水非線形水面重力波の斜面による反射の数値計算, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 104~108.
- 日野幹雄・仲座栄三 (1988): 数値波動解析における新しい無反射境界スキームの平面二次元問題への適用, 第35回海岸工学論文集, pp. 262~266.
- 水田 洋 (1985): Lagrange-Euler 混合法による自由表面及び密度界面の数値解析, 第29回水理講演会論文集, pp. 721~726.
- 水田 洋 (1987): Lagrange-Euler 混合法による河口密度流の数値解析, 第31回水理講演会論文集, pp. 515~520.
- 水田 洋 (1989): 数値流体解析における開いた境界の基礎的な解析と考察, 第3回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 287~290.
- 水田 洋 (1990): 数値流体解析における境界条件の統一的な取扱いについて, 水工学論文集, 第34巻, pp. 641~646.
- Carrier, G. F. and H. P. Greenspan (1958): Water waves of finite amplitude on a sloping beach. J. Fluid Mech., Vol. 17, pp. 97~110.
- Orlanski, I. (1976): A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. J. Comp. Phys., Vol. 21, pp. 251~269.
- Pedersen, G. and B. Gjevik (1983): Run-up of solitary waves. J. Fluid Mech., Vol. 135, pp. 283~299.
- Synolakis, C. E. (1987): The runup of solitary waves. J. Fluid Mech., Vol. 185, pp. 523~545.