

数値波動水槽における開境界処理のための 数値消波フィルターの開発

大山 巧*・灘岡 和夫**

1. はじめに

近年、境界要素法による非線形波動場の解析法が注目されている。この方法は、波の非線形効果を厳密に考慮でき、かつ任意の非線形波が取り扱える点に最大の長所がある。しかし、この手法に対応できる開境界処理、すなわち非線形でかつ複数の周期成分を含む波動場の解析に適用できる開境界処理法に関する研究は、ほとんどない。従って、実際の解析では孤立波のような開境界処理を必要としない波動を対象にすることが多かった。

一方、差分法による非線形波動場の解析においてよく用いられてきた開境界処理法に、Sommerfeld 型の放射条件を課す、いわゆる吸収法があり（例えば Yen ら, 1981）、最近ではこれを境界要素法による解析に適用した研究もある（Brorsen ら, 1987）。しかし、この方法では、対象とする波動が単一の位相速度を持つことを前提としており、非保存波や不規則波に対しては吸収効率が大きく低下してしまうため、適用範囲が限られていた。

そこで本研究では、境界要素法による非線形波動場の解析法をより一般性のある数値波動水槽として確立するために、非線形かつ不規則な波動場にも適用可能な開境界処理法として、数値消波フィルターを開発した。本論文では、まず線形ポテンシャル理論に基づく周波数領域での解析結果から、本消波フィルターの反射率の基本特性について述べる。そして、境界要素法による非線形波動場の解析に本消波フィルターを組み込み、一定水深水路での数値実験から非線形不規則波動場への適用性を検証する。

2. 数値消波フィルターの基本的な考え方

Brorsen ら (1987) は、境界要素法による非線形波動場の解析において、Sommerfeld の放射条件 $\partial\phi/\partial t + C_0\partial\phi/\partial x = 0$ (ϕ : 速度ポテンシャルなどの流れ場の変数, C_0 : 波の位相速度) を開境界に適用している。ここで、 C_0 を線形長波の波速 $\sqrt{gh}$ (g : 重力加速度, h : 水深) と

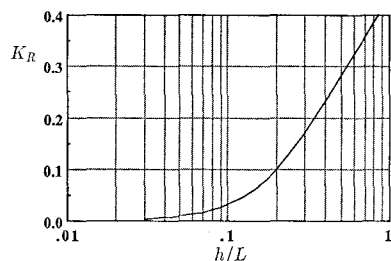


図-1 Sommerfeld 型境界からの波の反射 ($C_0 = \sqrt{gh}$)

したときの Sommerfeld 型の境界からの反射率 K_R は、線形理論のもとに以下のように与えられる。

$$K_R = (1 - C(\sigma)/C_0) / (1 + C(\sigma)/C_0) \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $C(\sigma)$ は角振動数 σ の波の波速である。図-1 は、このときの反射率 K_R の周期特性を示したもので、横軸には相対水深 h/L (L : 波長) をとっている。この図からわかるように、長波との波速のずれが大きい短周期の波ほど反射率が高く、吸収効率が悪くなる。このことから、単一の位相速度を用いた Sommerfeld 型の吸収境界は、波速の異なる複数の成分波を含んだ波動場には直接適用できないことがわかる。

Orlanski (1976) は、一般の双曲型の系を対象にした開境界処理法として、Sommerfeld の放射条件における位相速度 C_0 を時間の関数で表し、これを境界近傍の節点値から数値的に求める方法を提案している。ただし、Orlanski 型のスキームを直接水面波の問題に適用すると、単一の波速を持つ正弦波を入射させた場合でも、波の峰や谷に相当する時に C_0 の値が適切に計算できないことが知られている。この意味から、 C_0 の値を求めるためのスキームが、Chan ら (1980)、Yen ら (1981)、Kantha ら (1990) により提案されている。しかし、Sommerfeld の放射条件そのものが複数の波速成分を含む波を表現できないことから、この放射条件を用いたいずれの方法でも、一般的な（異なった波速成分を含む）不規則波に適用できないことには変わりはない。

そこで本研究では、図-2 に示すような、減衰を与えることにより入射波をエネルギー的に吸収するスポンジ

* 正会員 清水建設(株)技術研究所 環境技術研究部

** 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

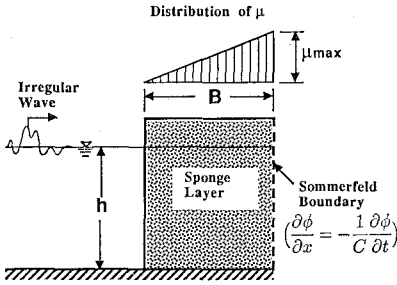


図-2 数値消波フィルターの概念

層と Sommerfeld 型境界を組み合わせた数値消波フィルターを考えた。スポンジ層は、いわば実験における消波装置に対応したもので、かなり広い周期帯域の成分波に対してでも有効であり、非線形領域まで含めた不規則波や非保存波を効率よく消波できると考えられる。ただし、成分波の波長がスポンジ層の幅に比べて大きくなると、消波効率が低下してしまうことが予想される。そこでこのような長周期成分については、波速 C が $C \approx \sqrt{gh}$ で近似できることに着目し、スポンジ層の外側境界に設定した Sommerfeld 型境界でエネルギーの一部を吸収させることにした。

井島ら (1971) は、透過性物質内の流体抵抗を評価する際、流速に比例した減衰項を与えている。この考え方は、ポテンシャル理論に基づくものであり、本研究におけるスポンジ層内の減衰の評価にもそのまま適用することができる。ただし、減衰係数 μ を層内で一定にすると、 μ の値が不連続になるスポンジ層前面から有意な大きさの反射波が発生することが予想されるため、ここでは図-2 に示されるように μ の値をスポンジ層内で線形に分布させることにした。

なお、ここで述べた数値消波フィルターは、基本的には Israeli ら (1981) により提案された一次元波動場の放射条件の考え方に近いものであるが、本研究のように境界要素法による非線形不規則波動場の解析への適用を念頭においた研究は、著者らの知る限りない。

3. 線形理論による基礎的検討

本研究では、まず線形ポテンシャル理論に基づく周波数領域の解析により、数値消波フィルターの基本性能を調べた。解析では、スポンジ層内の流体領域でグリーン公式に基づく境界積分方程式を立て、自由表面条件、底面条件を代入するとともに、スポンジ層の背後面で Sommerfeld 型の吸収条件を与える。さらに、スポンジ層前面の流体領域でのポテンシャルについては、未定係数を含む一般解で表しておく。そして、これらふたつの流体領域の境界面における流速と圧力の連続条件と、ス

ポンジ層内で立てた境界積分方程式を連立して解くことにより、スポンジ層を取り囲む境界面でのポテンシャルと一般解中の未定係数が求められる。なお、数値消波フィルターからの反射率 K_R は、一般解中の未定係数の値から求められる (大山ら, 1990)。

図-3 は、線形定常波動場での本消波フィルターの反射率の周期特性を示したもので、 μ の最大値 $\mu_{\max}$ を変化させている。この図から、 $\mu_{\max}$ が大きいほど B/L の小さい長周期側で反射率が高くなっているのがわかる。これは、スポンジ層内の流体抵抗に伴う反射が原因である。従って、 $\mu_{\max}$ を小さくして層内の流体抵抗を減少させると、スポンジ層背後に付加した Sommerfeld 型境界のエネルギー吸収効果で、長周期側の反射率が小さくなる。一方、 $\mu_{\max}$ が最も小さい $\mu_{\max} \sqrt{h/g} = 0.1$ のケースにおいて短周期側の反射率が高くなっているのは、Sommerfeld 型境界で設定した位相速度 $\sqrt{gh}$ と実際の波速との不整合による、Sommerfeld 型境界からの反射の影響である。ただし、 $\mu_{\max} \sqrt{h/g} = 0.25$ および 0.5 の場合、 $1 \leq B/L \leq 10$ の範囲の最大反射率は 2% 程度であり、減衰係数を適切な値に設定すれば、広い周期帯の入射波に対して実用上十分な消波ができることがわかる。

図-4 は、 $\mu_{\max}$ による $1 \leq B/L \leq 10$ の最大反射率 $(K_R)_{\max}$ の変化を示したものである。図中、LO が μ をスポンジ層内で線形に分布させ、スポンジ層背後に Som-

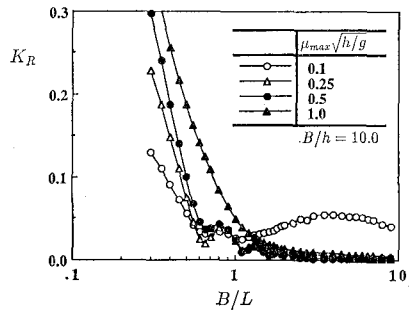
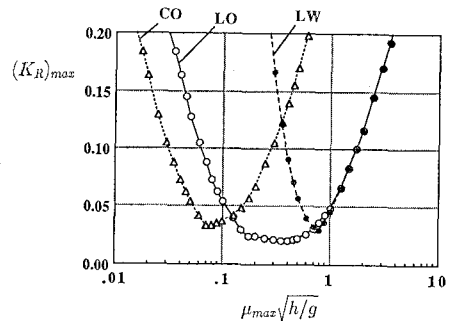


図-3 線形定常波動場での反射率の周期特性


 図-4 減衰係数による $1 \leq B/L \leq 10$ の最大反射率の変化 (線形定常波動場)

merfeld 型境界を適用した本消波フィルターの場合, CO は μ の分布を一定にした場合, LW は Sommerfeld 型境界を用いずに壁面境界を用いた場合を表している. $(K_R)_{\max}$ が最小になる $\mu_{\max}$ の値は各ケースで異なっているが, 本消波フィルターの場合には $\mu_{\max}$ の広い範囲で $(K_R)_{\max}$ が低く, その最小値は μ の分布を一定とした場合よりも 60% 程度, Sommerfeld 型境界を用いない場合よりも 40% 程度小さくなるのがわかる.

4. 非線形波動場の解析への適用

(1) 境界条件

ここでは, 大山(1986)が提案した境界要素法による 2 次元非線形波動場の解析に, 本消波フィルターを組み込むことにする. 図-5 に示すような 2 次元水路において, 造波境界 S_C で発生した波が消波フィルターに入射するものとする. 流体運動が速度ポテンシャルにより記述できるものと仮定し, 消波フィルターを含まない水路内の流体領域 Ω_1 , フィルター内の流体領域 Ω_2 , フィルター背後の解析領域外の流体領域 Ω_0 でのポテンシャルをそれぞれ ϕ_1 , ϕ_2 および ϕ_0 と表す. ϕ_1 と ϕ_2 に関する基礎方程式は 2 次元ラプラス方程式であり, また ϕ_1 に関する底面, 造波境界および自由表面での境界条件は, 以下に示すとおりである.

$$\partial\phi_1/\partial z=0 \text{ (on } S_B) \dots\dots\dots (2)$$

$$\partial\phi_1/\partial n=-\partial\phi_1/\partial x=-U \text{ (on } S_C) \dots\dots\dots (3)$$

$$\partial\phi_1/\partial n=n_z(\partial\eta/\partial t) \text{ (on } S_F) \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}(V\phi_1^2)+g\eta=0 \text{ (on } S_F) \dots\dots\dots (5)$$

ただし, n は境界面での外向き法線方向, η は静水面からの水面変動量, U は造波境界で発生する波の水平水粒子速度, n_z は外向き単位法線ベクトルの z 成分である. ここで, スポンジ層内の減衰係数 μ が水平方向に任意の分布をする場合, 層内の自由表面における力学的条件は, 以下のように表せる.

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{1}{2}(V\phi_2)^2+g\eta+\mu\phi_2-\int_{x_1}^x \phi_2|_{on S_F} \frac{\partial\mu}{\partial x} dx=0 \text{ (on } S_F) \dots\dots\dots (6)$$

式(6)において $\mu=\partial\mu/\partial x=0$ とすれば, 式(5)で与えられる通常の力学的条件式に一致する. また, ϕ_2 に関する自由表面での運動学的条件と底面条件は, ϕ_1 に関する条件式と同様である.

一方, スポンジ層前面の境界 S_1 における流速と圧力の連続性から, 以下の境界条件が得られる.

$$\partial\phi_1/\partial x=\partial\phi_2/\partial x \text{ (on } S_1) \dots\dots\dots (7)$$

$$\partial\phi_1/\partial t=\partial\phi_2/\partial t+\mu(x_1)\phi_2 \text{ (on } S_1) \dots\dots\dots (8)$$

ここで, 図-2 に示した本消波フィルターのように $\mu(x_1)=0$ の場合には, 式(8)は次式で置き換えられる.

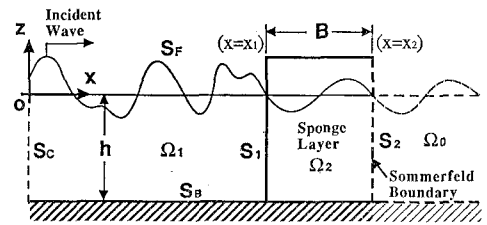


図-5 座標系と記号の定義

$$\phi_1=\phi_2 \text{ (for } \mu(x_1)=0) \text{ (on } S_1) \dots\dots\dots (9)$$

従って, このような場合にはポテンシャルが S_1 で連続になり, ϕ_1 と ϕ_2 を分けて定義する必要がないので, 以下これらを合わせて ϕ と記述する.

スポンジ層背後の境界 S_2 においても, 流速と圧力の連続性から次式が導かれる.

$$\partial\phi/\partial x=\partial\phi_0/\partial x \text{ (on } S_2) \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mu\phi-\int_{x_1}^{x_2} \phi|_{on S_F} \frac{\partial\mu}{\partial x} dx=\frac{\partial\phi_0}{\partial t} \text{ (on } S_2) \dots\dots\dots (11)$$

ここで, ϕ_0 について Sommerfeld 型の境界条件,

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{\partial\phi_0}{\partial t} \dots\dots\dots (12)$$

を S_2 で与えるものとする. 式(10)~(12) から ϕ に関する S_2 での境界条件として, 最終的に次式が導かれる.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{gh}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mu\phi-\int_{x_1}^{x_2} \phi|_{on S_F} \frac{\partial\mu}{\partial x} dx \right) \text{ (on } S_2) \dots\dots\dots (13)$$

(2) 境界積分方程式

式(9)に示したように, 速度ポテンシャル ϕ は S_1 で連続であり, かつ調和関数であることから, Ω_1 と Ω_2 を含む流体領域にグリーンの公式を適用する. そして, 自由表面 S_F , 底面 S_B , 造波境界 S_C での運動学的条件式(2)~(4)および S_2 での境界条件式(13)を代入すると以下のような積分方程式を得る.

$$\begin{aligned} \alpha^*\phi(P) &+ \int_{S_F \cup S_C \cup S_2} \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int_{S_F} n_z \frac{\partial\eta}{\partial t} G ds \\ &+ \int_{S_C} U G ds + \frac{1}{\sqrt{gh}} \int_{S_2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mu\phi \right. \\ &\left. - \int_{x_1}^{x_2} \phi|_{on S_F} \frac{\partial\mu}{\partial x} dx \right) G ds = 0 \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} G(P, Q) &= \ln(1/r) + \ln(1/r') \\ r &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} \\ r' &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (z_P + z_Q + 2h)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ただし, $P(x_P, z_P)$, $Q(x_Q, z_Q)$ は境界面上の点, α^* は境界面の形状からきまる定数(大山, 1986)である.

また, 自由表面で与えられる圧力方程式については,

重みつき残差法を適用する。前述のように、式(6)はスポンジ層外の自由表面における力学的条件式(5)を含んだ形で表されているので、式(6)の両辺に任意の重み関数 ω をかけて S_F 上で積分すると、以下の積分方程式を得る。

$$\int_{S_F} \omega \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g\eta + \mu \phi \right. \\ \left. - \int_{x_1}^x \phi|_{on S_F} \frac{\partial \mu}{\partial x} dx \right] ds = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(14)、(16)を線形要素を用いて空間的に離散化し、式(16)については Galerkin 法を適用すると、節点上の ϕ ($on S_F, S_C, S_2$)、 $\partial \phi / \partial t (on S_F, S_2)$ 、 η 、 $\partial \eta / \partial t (on S_F)$ を未知数とする離散化方程式が得られる。さらに、単位時間ステップ dt あたりの ϕ と η の増分 $\Delta \phi$ 、 $\Delta \eta$ を用いてこれらを記述し、 $(\Delta \phi)^2$ 、 $(\Delta \eta)^2$ に対応した項を微小項として無視することにより、最終的に $\Delta \phi (on S_F, S_C, S_2)$ 、 $\Delta \eta (on S_F)$ に関する連立一次方程式を得る。これら空間的離散化および逐次計算の手順は、前論文(大山, 1985; 大山, 1986)と同様なので、ここでは省略する。

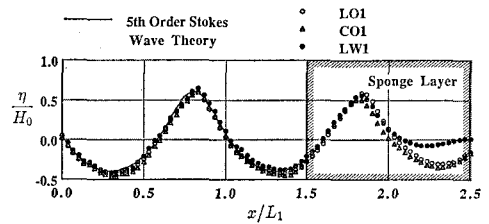
5. 非線形波動場での消波性能

まず、一端に造波境界、他端に消波フィルターを設けた一定水深水路中で非線形規則波(クノイド波、ストークス波)を発生させ、これらの伝播波形を理論解と比較することにより、本消波フィルターの性能を調べた。表-1に解析条件を示す。ただし、 T と H_0 は発生する波の周期と波高、 Δx は自由表面での節点間の水平方向長さである。表中の各ケースにおいて、LO、CO、LWの記号は図-4の場合と同じ意味であり、図-4に示した結果で $(K_R)_{max}$ がほぼ最小になるような μ_{max} を各ケースごとに設定した。また水路は、いずれのケースも幅 $B=L_1$ (L_1 : 線形理論から得られる波長)の消波フィルターを含めて $2.5 L_1$ の長さで設定し、静水状態を初期状態として波を発生した。さらに造波境界で与える U としては、 $T\sqrt{g/h}=7$ の場合ストークス波の第5次近似解(Fenton, 1985)、 $T\sqrt{g/h}=15$ の場合クノイド波の第3次近似解(Fenton, 1979)を用いた。

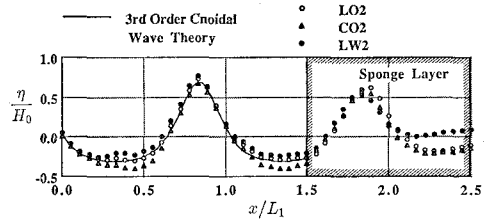
図-6(a)~(c)は、波の発生から6周期後の時間における水路内の水面形状を示したものであり、図中の実線は各波動理論の近似解を表している。まず、 $T\sqrt{g/h}=7$ のストークス波の場合には、各ケースでほとんど差が見られず、いずれも近似解との一致は良好である。一方、図-6(b)に示される $T\sqrt{g/h}=15$ 、 $H_0/h=0.2$ の場合は、LWおよびCOの水面形状に消波フィルターからの反射波の影響が現れているのがわかる。これに対して、 μ をスポンジ層内で線形に分布させ、スポンジ層背後にSommerfeld型境界を付加した本消波フィルターのケー

表-1 非線形規則波の解析条件

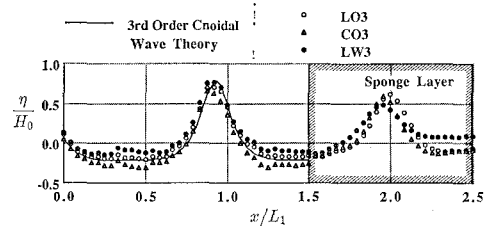
CASE	$T\sqrt{g/h}$	H_0/h	適用理論	$\Delta x/h$	$\Delta t\sqrt{g/h}$	$\mu_{max}\sqrt{h/g}$
LO1	7	0.3	ストークス波	0.20	0.16	0.25
CO1						0.08
LW1						0.80
LO2	15	0.2	クノイド波	0.81	0.63	0.25
CO2						0.08
LW2						0.80
LO3	15	0.4	クノイド波	0.61	0.44	0.25
CO3						0.08
LW3						0.80



(a) $T\sqrt{g/h}=7$, $H_0/h=0.3$, $t/T=6.0$



(b) $T\sqrt{g/h}=15$, $H_0/h=0.2$, $t/T=6.0$



(c) $T\sqrt{g/h}=15$, $H_0/h=0.4$, $t/T=6.0$

図-6 非線形規則波の空間波形に関する近似解との比較

ス(LO)では、近似解と良く一致しており、反射波の影響もほとんど見られない。さらに、波高水深比を0.4にした図-6(c)の場合においても、図-6(b)の場合と同様にLOのケースにおける消波効率は非常に良好であり、本消波フィルターが非線形波動場の解析にも実用上十分に適用できることがわかる。

次に、長さの異なる2つの水路中に、複数の周期成分を含む波を発生させ、これらの結果を比較することにより、非線形不規則波に対する本消波フィルターの消波効果を調べた。なお、結果を理論解と比較するわけではないので、複数の周期成分を含む任意の波を発生すればよいが、ここではブレットシュナイダー・光易のスペクトルに対応した不規則波の流速を造波境界で与えることにした。ただしその場合、有義波周期 $T_{1/3}$ の $1/3$ 以下の短周期成分はカットすることにし(エネルギー的には1.3%カット)、それよりも長周期側のスペクトルを等分割して得た50個の成分波(正弦波)の流速を重ね合わせた。

図-7は、 $T_{1/3}\sqrt{g/h}=10$, $H_{1/3}/h=0.2$ ($H_{1/3}$: 有義波高)の不規則波を発生させたときの空間波形の時間変化を示したものである。図中、実線は水路長が $4L_{1/3}$ の場合、○印が $2.5L_{1/3}$ の場合の結果を表している。なお、それぞれの水路の右端に幅 $B=L_{1/3}$ ($L_{1/3}$: 有義波長)の数値消波フィルターを設けているが、スポンジ層内の水面波形は図中には示していない。また、解析における Δx と Δt は、それぞれ $\Delta x/h=0.39$, $\Delta t\sqrt{g/h}=0.25$ と設定した。図-7の結果に示されるように、波の追跡時間がかなり長いにもかかわらず、両者は極めて良く一致していることから、本消波フィルターが複数の波速成分を含む非線形不規則波に対しても十分な消波効率を有していることがわかる。

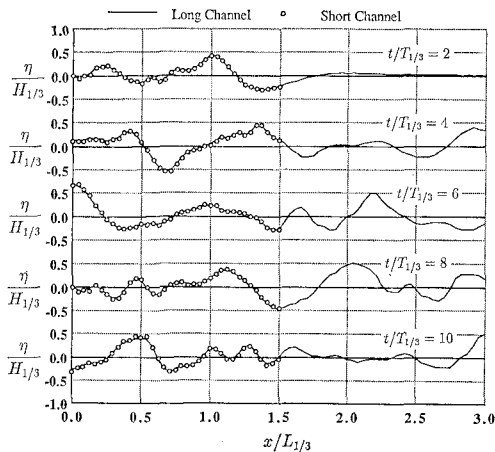


図-7 非線形不規則波の空間波形
($T_{1/3}\sqrt{g/h}=10$, $H_{1/3}/h=0.2$)

6. おわりに

任意の非線形波を対象にした一般性のある数値波動水槽を確立するための研究の一環として、スポンジ層と Sommerfeld 型の吸収境界を組み合わせた、数値消波フィルターによる開境界処理法を開発した。そして、線形定常波動場と非線形波動場での数値実験により、その基本性能を検討した。その結果、本消波フィルターは、通常対象とされる線形の規則波だけでなく、従来不可能であった非線形かつ不規則な波の消波も可能であり、またその性能も極めて良好であることから、目的とする数値波動水槽に十分適用可能な開境界処理法であることが示された。今後は、境界からの入射波が存在する場合の開境界処理法について検討を進める予定である。

参考文献

- 井島武士・江口奉彦・小林 彰 (1971): 透過性防波堤と岸壁に関する研究, 第18回海講論文集, pp. 121~130.
- 大山 巧 (1985): 境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析, 第32回海講論文集, pp. 555~559.
- 大山 巧 (1986): 数値波動水槽によるクノイド波の変形の解析, 第33回海講論文集, pp. 99~103.
- 大山 巧・灘岡和夫 (1990): 数値消波フィルターによる開境界処理法の基本性能について, 土木学会第45回年講梗概集II (投稿中).
- Brorsen, M. and Larsen, J. (1987): Source generation of nonlinear gravity waves with boundary integral equation method, Coastal Eng., Vol. 11, pp. 93~113.
- Chan, R. K. -C. and Chan, F. W. -K. (1980): Numerical solution of transient and steady free-surface flows about a ship of general hull shape, Proc. 13th Symp. Naval Hydrodynamics, pp. 257~276.
- Fenton, J. D. (1979): A high-order cnoidal wave theory, J. Fluid Mech., Vol. 94, pp. 129~161.
- Fenton, J. D. (1985): A fifth-order Stokes theory for steady waves, J. Waterway, port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 111, pp. 216~234.
- Israeli, M. and Orszag, S. A. (1981): Approximation of radiation boundary conditions, J. Comp. Phys., Vol. 41, pp. 115~135.
- Kantha, L. H., Blumberg, A. F. and Mellor, G. L. (1990): Computing phase speeds at open boundary, J. Hydraulic Eng., Vol. 116, pp. 592~597.
- Orlanski, I. (1976): A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, J. Comp. Vol. 21, pp. 251~269.
- Yen, S. M. and Hall, D. R. (1981): Implementation of open boundary conditions for nonlinear free-surface wave problems, 3rd Int. Conf. Numer. Ship Hydrodynamics, pp. 163~177.