ポテンシャル接続法の選点解法

吉田明徳*・小島治幸**・鶴本良博***

1. まえがき

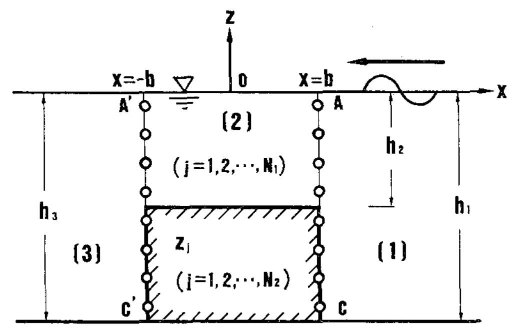
ポテンシャル接続法（領域分割法）は，波浪の境界値問題の一つの有力な解析手法であり，井島(1971)によって詳細な解説がなされている．またこれまで，海岸構造物の防波機能や，浮遊構造物の動揺などの解析に数多く用いられてきている(例えば，Ursell・Dean・Yu, 1959；井島・田渕・湯村, 1971；Black・Mei・Bray, 1971；合田・鈴木・笹田, 1976；Mcluver, 1986；Wu・Liu, 1988)．

ポテンシャル接続法の適用は，流体域が矩形状に分割出来る場合に限られるけれども，有限要素法や境界要素法に比べて，精度の良い厳密解が得られること，一旦速度ポテンシャルが求まればその微分・積分量は数値微分・積分によることなく理論的に得られること，数値計算に要する計算機の記憶容量と計算時間が小さくて済むこと等多くの利点がある．しかしながら，直交関数で展開した速度ポテンシャルの，未定係数に関する連立一次方程式を導く際に，直交関数に関する積分演算を行うため，一般に理論式の展開とその表示は，機械的ではあるが，複雑かつ煩雑であり，そのためか，適用は著者らの知る限り線形問題に限られている．

本研究は，ポテンシャル接続法を摂動法と併用して，有限振幅波に関する，波動境界値問題に適用することを目的に，第一段階として，理論展開と計算プログラムが煩雑な従来の解法に変えて，積分演算を行うことなく未定係数が決定できる，きわめて簡単な解析法(選点解法)を試みて，その妥当性と解の精度の検討を行ったものである．

2. ポテンシャル接続法

ポテンシャル接続法の概略を，図―1 に示すような不透過の潜堤に，x 軸の正の方向より角周波数 σ 振幅 ζ の微小振幅波が入射する場合を例に説明する．図―1 中の AC，および $A'C'$ で示す仮想の境界面（$x=\pm b$）によって，流体域を (1)，(2)，(3) の 3 領域に分割し，各領域の水深を h_i，速度ポテンシャルを $(g\zeta/\sigma)\phi_i(x,z)\exp(i\sigma t)$，($i=1,2,3$) と表すことにすると，$\phi_i$ は一般に次式のように無限級数で表される．



図―1　領域分割と境界上の計算点

$$\phi_i(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}X_i^{(n)}(x)Z_i^{(n)}(z)\quad(i=1,2,3)\cdots\cdots(1)$$

上式で $X_i^{(n)}(x)$ は未定係数 A_n, B_n, C_n, D_n を含む次のような関数である．

$$\left.\begin{aligned}X_1^{(n)}(x)&=\begin{cases}A_0\exp(-k_1^{(0)}x)+\exp(k_1^{(0)}x) & (n=0)\\ A_n\exp(-k_1^{(n)}x) & (n=1,2,\cdots)\end{cases}\\ X_2^{(n)}(x)&=C_n\exp(k_2^{(n)}x)+D_n\exp(-k_2^{(n)}x)\\ X_3^{(n)}(x)&=B_n\exp(k_3^{(n)}x)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

また，$Z_i^{(n)}(z)$ は $(-h_i\leqq z\leqq 0)$ で直交性を有する次のような関数である．

$$Z_i^{(n)}(z)=\cos k_i^{(n)}(z+h_i)/\cos k_i^{(n)}h_i\quad(i=1,2,3)\quad(n=0,1,2,\cdots)\cdots\cdots(3)$$

ここで，$k_i^{(n)}$ は $(n=0)$ の場合には虚数，$(n=1,2,\cdots)$ の場合は実数と規定して次の分散方程式より与えられる．

$$\sigma^2h_i/g=-k_i^{(n)}h_i\tan k_i^{(n)}h_i\quad(i=1,2,3)\cdots\cdots(4)$$

(1) 式で表される速度ポテンシャルは，水面と水底の境界条件を満足する，ラプラス方程式の一般解であって，未定係数は隣合う領域の境界面における速度ポテンシャル（圧力）とその法線微分（流速）の連続条件より決められることになる．この，境界面 AC $(x=b)$ と

* 正会員　工博　九州大学助教授　工学部水工土木学科
** 正会員　工修　九州大学助手　工学部水工土木学科
*** 正会員　工修　高松工業高等専門学校助教授　土木工学科

$A'C'(x=-b)$ における連続条件は次式で表せる．（ただし，簡単のため $h_1=h_3=h$ とする）

$$\phi_i=\phi_2\ \ (-h_2\leqq z\leqq 0)\ \ (i=1,3)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\partial\phi_i/\partial x=\begin{cases}\partial\phi_2/\partial x\,(-h_2\leqq z\leqq 0)\\ 0\qquad\quad(-h\leqq z\leqq -h_2)\end{cases}\ (i=1,3)\cdots\cdots(6)$$

2.1 従来の方法

境界 AC において上式に (1) 式を代入し，まず (5) 式において，$Z_2^{(n)}(z)$ が $(-h_2\leqq z\leqq 0)$ の間で直交性を有することを利用する．すなわち，(5) 式の両辺に $Z_2^{(n)}(z)$ をかけて $a=-h_2$ から $z=0$ まで積分し

$$\int_{-h_2}^{0}Z_2^{(n)}(z)Z_2^{(m)}(z)\,dz=\begin{cases}\alpha_n\ (n=m)\\ 0\ \ \ (n\neq m)\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

の関係を用いると，定数 $X_2^{(n)}(b)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ と $X_1^{(m)}(b)$ $(m=0,1,2\cdots)$ の関係，すなわち未定係数 A_m, C_n, D_n の関係を規定する，無限個の一次関係式が得られる．

$$\alpha_nX_2^{(n)}(b)=\sum_{m=0}^{\infty}X_1^{(m)}(b)\int_{-h_2}^{0}Z_1^{(m)}(z)Z_2^{(n)}(z)\,dz$$
$$(n=0,1,2,\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

同様に (6) 式の両辺に $Z_1^{(n)}(z)$ をかけ，$Z_1^{(n)}(z)$ が $(-h\leqq z\leqq 0)$ の間で直交性を有することを利用すると，(8) 式と同様，未定係数 A_n, C_m, D_m に関する無限個の一次関係式を得る．

$$\beta_n\overline{X_1}^{(n)}(b)=\sum_{m=0}^{\infty}\overline{X_2}^{(m)}(b)\int_{-h}^{0}Z_2^{(m)}(z)Z_1^{(n)}(z)\,dz$$
$$(n=0,1,2,\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

ただし，(9) 式中の $\overline{X}^{(n)}(x)$ は $\partial X^{(n)}/\partial x$ を意味し，$\overline{X_1}^{(n)}(b)$ は未定係数 A_n，また $\overline{X_2}^{(m)}(b)$ は未定係数 C_m と D_m からなる定数で，β_n は (7) 式と同様次式で与えられる．

$$\int_{-h}^{0}Z_1^{(m)}(z)Z_1^{(n)}(z)\,dz=\begin{cases}\beta_n\ (n=m)\\ 0\ \ \ (n\neq m)\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

よって，(1) 式で表される速度ポテンシャルにおいて級数項の打ち切り項数を ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 に関してそれぞれ n^*, m^*, n^* とすると，(8) と (9) 式は未定係数 A_n, C_m, D_m に関する，(n^*+m^*+2) 個の一次関係式を与えることになる．同様に，もう一方の境界面に $A'C'$ おいても，これと独立に，未定係数 B_n, C_m, D_m に関する (n^*+m^*+2) 個の関係式が得られるから，これらを連立し解くことにより未定係数が決まることになる．これが，従来ポテンシャル接続法と呼ばれる解析法の概略である．波浪中で動揺する浮体等の場合には，(8)，(9)式に加えて浮体の運動方程式が条件式として加わるが，基本的な解析の手順は何等変わらない．

2.2 連続条件の自乗誤差

上述の，$Z_i^{(n)}(z)$ の直交性を利用する解法は，境界面における (5) と (6) 式の連続条件を直接規定しているのではなく，隣合うポテンシャルの自乗誤差が最小となるように，未定係数を決定しようとする事にほかならない．いま，境界面 AC における左右の領域のポテンシャルの自乗誤差を ε^2 とすると，ε^2 は次式で与えられる．

$$\varepsilon^2=\int_{-h_2}^{0}\{\phi_1(b,z)-\sum_{n=0}^{\infty}X_2^{(n)}(b)Z_2^{(n)}(z)\}^2dz\cdots\cdots(11)$$

このとき，この自乗誤差を最小とする係数 $X_2^{(n)}(b)$ の条件は次式で表される．

$$\frac{\partial\,\varepsilon^2}{\partial X_2^{(n)}(b)}=-2\int_{-h_2}^{0}\{\phi_1(b,z)-\sum_{m=0}^{\infty}X_2^{(m)}(b)Z_2^{(m)}(z)\}Z_2^{(n)}(z)\,dz=0$$
$$(n=0,1,2,\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

式(7)の関係を用いて(12)式を書き改めると次式を得る．

$$\alpha_nX_2^{(n)}(b)=\int_{-h_2}^{0}\phi_1(b,z)Z_2^{(n)}(z)\,dz\ \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

ϕ_1 に (1) 式を代入すると，(13) 式は結局 (8) 式と一致する．同様に，速度ポテンシャルの法線微分に関しても，境界面における左右の領域の自乗誤差を最小にする係数 $\overline{X_1}^{(n)}(b)$ の条件より，結局 (9) 式を得る．すなわち，従来のポテンシャル接続法は，隣合う領域の速度ポテンシャル（およびその法線微分）の自乗誤差が，境界面上で全体として最小となる（平均収束する）ように未定係数を決定しようとするもので，境界面上の任意点において両者が一致する（点収束する）こと，つまり (5) と (6) 式が成り立つことを直接規定しているものではない．

2.3 選点解法

境界面における自乗誤差が最小となるように未定係数を決めるかわりに，境界面上に異なる z の値の計算点（選点）を取り，その計算点上で (5) 式と (6) 式が成り立つ（点収束する）事を規定することによっても，未定係数に関する一次関係式を得ることが出来る．すなわち**図—1** に示すように境界面上に N_1, N_2 個の点 z_j $(j=1,2,\cdots N_1)$，$(j=1,2,\cdots N_2)$ を取り，各点において (5) と (6) 式の連続条件が成り立つこととすると，(5)，(6) 式よりそれぞれ次式を得る．

$$\sum_{n=0}^{\infty}X_i^{(n)}(b)\,Z_i^{(n)}(z_j)=\sum_{m=0}^{\infty}X_2^{(m)}(b)\,Z_2^{(m)}(z_j)$$
$$(j=1,\cdot\cdot,N_1)\ (i=1,3)\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$\sum_{K=0}^{\infty}\overline{X_i}^{(n)}(b)Z_i^{(n)}(z_j)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\overline{X_2}^{(m)}(b)Z_2^{(m)}(z_j)\\ \qquad\qquad(j=1,\cdot\cdot,N_1)\\ 0\qquad\quad\ \ (j=1,\cdot\cdot,N_2)\end{cases}$$
$$(i=1,3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

式 (14) は N_1 個の各 z_j の値について成り立ち，(15) 式は (N_1+N_2) 個の各 z_j の値について成り立つから，境界 AC において，両式は未定係数 A_n, C_m, D_m に関する，$(2N_1+N_2)$個の一次関係式を与えることになる．同様に，もう一方の境界 $A'C'$ においても，これと独立

に，未定係数 B_n, C_m, D_m に関する，$(2N_1+N_2)$ 個の一次関係式が得られる．従って，級数の打ち切り項数 n^*, m^* と計算点 N_1, N_2 を，$(n^*+m^*+2\leqq 2N_1+N_2)$ の関係が満足されるように取り，これらを連立して解くことによって，未定係数を決めることが出来る（ただし，$n^*+m^*+2<2N_1+N_2$ の場合には，未知係数の数にくらべて，条件式が過剰となるため，最小自乗解を求めることになる）．この方法によれば，直交関数に関する煩雑な積分を行う必要はなく，各領域において，水深方向の境界面における，運動学的および力学的境界条件を満足する，速度ポテンシャルの級数展開（一般解）が得られれば，それを(5),(6)式の連続条件式に用い，水深方向の変数の値を変えて得られる．未定係数に関する一次関係式を，連立して解けばよいだけである．

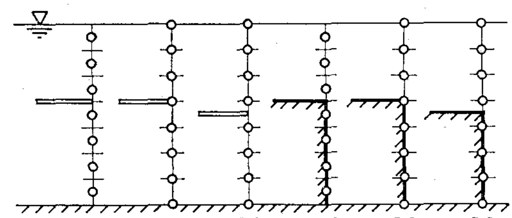
3. 選点解法の検証

選点解法の妥当性と解の精度を調べるため，不透過潜堤と没水水平版について，従来の方法と選点解法による解析を行って，選点解法の妥当性と解の精度を検証した．なお，没水の水平版の場合には水平版下部の領域(4)の速度ポテンシャルが新たに加わるが，これは水平版底面と水底面の間で直交性を有するフーリエ級数で展開される（井島，1970；伊藤・千葉，1972）．

選点解法を適用するに当たっては，(1) 計算点の取り方と境界条件の与え方（矩形潜堤の隅角点や水平版端点上の計算点の有無，またそこでの境界条件の与え方など），(2) 速度ポテンシャルの級数項の打切り項数の取り方（矩形潜堤を例に取ると，$n^*+m^*+2\leqq 2N_1+N_2$ の条件のもとでの，n^* と m^* の取り方）がいくつか考えられる．ただし，検討の結果，いづれの場合であっても，計算点は水面から水底面までを通して，等間隔に取るのが最も精度がよく，不等間隔に配置すると著しく精度が落ちることがわかった．そこで，計算点の間隔は等間隔とし，まず，各領域の境界面上の計算点の数と，その領域のポテンシャルの級数項の項数を同じに取って，図―2 に示す計算点配置について検討した．

3.1 選点解法における計算点と解の精度

図―2 中の $A-1$ と $B-1$ の計算点配置は，境界線を等間隔の要素に分割し，要素の中点を計算点に取った場合にあたる．これについては，既に，従来の方法と比較して，選点解法の妥当性と解の精度について明かにした（吉田・鶴本・小島，1989）．$A-3$ と $B-3$ は，境界の端点（水面と水底面）に計算点を取るが，潜堤の隅角点と水平版端点には計算点を取らない場合で，$A-2$ と $B-2$ は，さらに隅角点と水平版の端点にも計算点 (P) を取った場合である．点 (P) での条件は，水平版の場合は $(\partial\phi_i/\partial x=0,\ i=1,3)$ で，また，矩形潜堤の場合には，



図―2 選点解法における計算点の配置

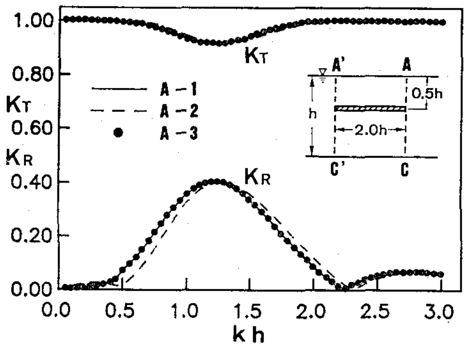
$\{\phi_i=\phi_2,\ \partial\phi_i/\partial x=(\partial\phi_2/\partial x)/2, (i=1,3)\}$ で与えた．

没水の水平版と矩形潜堤について $N_1=10$, $N_2=10$ に取った場合の計算結果を，反射率 $K_R(=|A_0|)$ と通過率 $K_T(=|B_0|)$ について，図―3 (a), (b) に示している．水平版の場合，$A-1$ と $A-3$ ではほぼ同じ値をとるが，$A-2$ の計算点配置の解は，わずかに異なった値をとる．一方，矩形潜堤の場合には図―3 (b) に見られるように，いずれの計算点配置も同じ反射率・通過率を与えた．また，$A-1$ と $A-3$ および $B-1$, $B-2$, $B-3$ の解は，従来の方法による解と，有効数字で2～3桁は完全に一致している．

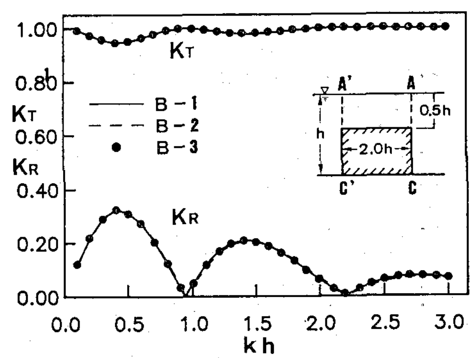
速度ポテンシャルの未定係数を，従来の方法と選点解法とについて比較した結果，第 n 項の係数値について，n の値が小さい所では，解法による差はそれほど大きくなく，n の値が大きいほど，解法による差が大きくなること，また，いずれの計算点配置の場合でも，選点解法の方が従来の方法に較べ収束が速いことがわかった．

反射率，通過率は未定係数の初項で与えられ，また波力の算定には，n の大きな所の係数値の寄与分は比較的小さいため，線形問題においてこれらを算定する場合には，n が大きいところでの係数値の差は問題とならないが，ポテンシャルの微分量である流速の算定値には，その差が大きく影響することになる．いずれがより厳密な解であるかは，境界面における連続条件 (5), (6) 式の満足の程度によっても，判断することができると考えられる．

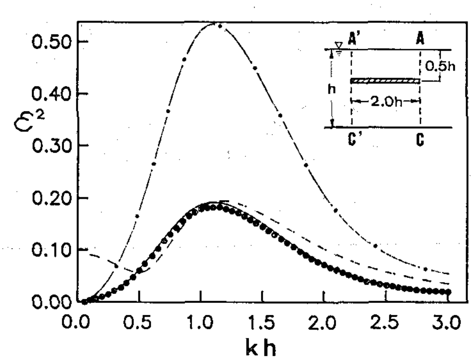
このため，境界面 AC と $A'C'$ における，隣合う領域の速度ポテンシャルの法線微分値（流速）を，境界面に沿って 0.05 h ごとに算定して，(11) 式の自乗誤差を求めた結果を図―4(a), (b) に示している．ただし，図―4 中の ε^2 は，自乗誤差の絶対値を，進行波の関数 $\phi(x,z)=Z^{(n)}(z)\exp(kx)$ の法線微分 $\partial\phi/\partial x$ の自乗を，$(-h\leqq z\leqq 0)$ 間で積分した $[kh\tanh(kh)\{1+2kh/\sinh(2kh)\}/2]$ で基準化した値である．ただし，k は入射波の波数で $ik=k^{(0)}$ 図中の1点鎖線は，従来の方法による解の自乗誤差で，実線と破線および点線が，それぞれ $A-1$, $A-2$, $A-3$ および $B-1$, $B-2$, $B-3$ の計算点配置についての，選点解法による解の自乗誤差で



図—3(a) 計算点配置による反射率・通過率の差異

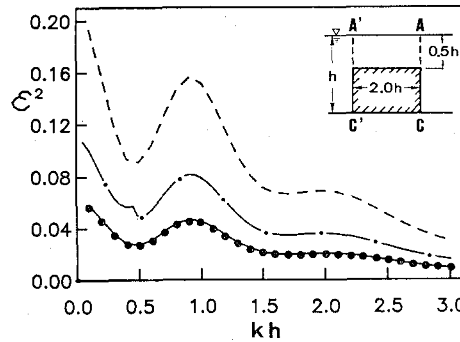


図—3(b) 計算点配置による反射率・通過率の差異



図—4(a) A' C' 面における連続条件の自乗誤差 $(\partial\phi/\partial x)$
従来の方法 (——・——)，A-1(——)，A-2(— — — —)，A-3 (・・・・)

ある．これらの結果を見ると，矩形潜堤の $B-2$ の場合を除けば，従来の方法より選点解法の方が自乗誤差が常に小さい．すなわち，直交性を利用し，隣合う領域の速度ポテンシャル（およびその法線微分）の，境界面における自乗誤差が，最小となるように未定係数を決定しようとする従来の方法に比べ，境界面の計算点上でのみ両者が一致することを条件に，未定係数を決める選点解法の方が，自乗誤差も小さく，精度のよい解が得られるこ



図—4(b) AC 面における連続条件の自乗誤差 $(\partial\phi/\partial x)$
従来の方法(——・——)，B-1 (——)，B-2 (— — — —)，B-3 (・・・・)

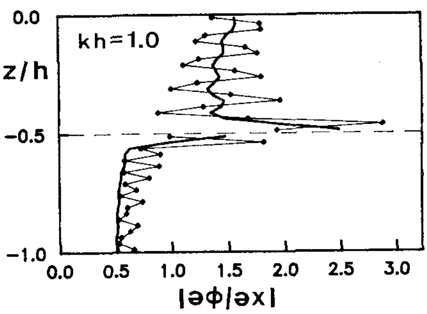
とを示している．図—5 (a)，(b) は，水平版について，従来の方法と選点解法 ($A-2$) の場合の，境界面における法線微分値（流速）の分布を，隣合う領域の速度ポテンシャルよりそれぞれ算定し，両者の連続性の程度を比較したものである．これからも，選点解法による方が，従来の方法に比べて，連続条件が精度良く満足されていることがわかる．

3.2 級数項の打ち切り項数と最小自乗解

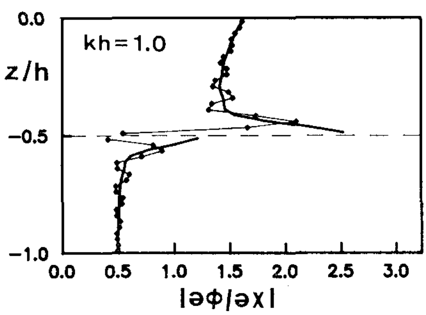
未定係数の数よりも，計算点の数が多いと，条件式が過剰となり，この場合は最小自乗解を求めることになる．$A-2$ の場合について，計算点を $N_1=N_2=14$ と (P) 点の計29点（AC と $A'C'$ 境界面の条件式の総数 $2\{2(N_1+N_2)+1\}=113$）に取り，ポテンシャルの打ち切り項数を，領域 (2)，(4) では，$m^*+1=10$ に，領域 (1)，(3) では，$n^*+1=21$ にとって（未定係数の総数 $2\{2(m^*+1)+(n^*+1)\}=82$），最小自乗解を求めてみた．その結果，自乗誤差はほぼ0に近くなるが，境界面上で流速が大きく振動し，級数項の収束も悪くなる．また，反射率・通過率には，特定の波長で特異点が生じた．これらのことから，計算点の数は未定係数の数と条件式の数が一致するように取る方が，精度のよい解が得られる．

未定係数の数と条件式の数を同じに規定した場合にも，各領域におけるポテンシャルの級数項の打ち切り項数は，一意には定まらない．そこで，計算点の数を固定し，各領域のポテンシャルの打切り項数の配分をいくつか変えて検討した結果各領域の級数項の項数を境界面上の計算点の数と，同じに取った場合が最も自乗誤差が小さく精度の良い解が得られることがわかった．

なお，以上の計算において，級数の打ち切り項数（計算点の数）は比較的大きく取ったが，反射率，通過率，流体力等の線形量の算定に関しては，それほど大きく取る必要はなく，水深の1/10程度の計算点間隔で決まる計



(a) 従来の方法



(b) 選点解法（A-2）

図—5 水平版における境界面 AC 上の $|\partial\phi/\partial x|$ の分布，（—— $|\partial\phi_2/\partial x|$，——·—— $|\partial\phi_1/\partial x|$）

算点の数に応じた級数項を取れば十分である（吉田・鶴本・小島，1989）.

4. あとがき

境界面における連続条件の自乗誤差が，全体として最小になることを条件に，未定係数を決める従来の方法に較べ，選点上のみで連続条件が成り立つことを条件に，未定係数を決める選点解法の方が，精度のよい解が得られることがわかった.

選点解法によれば，直交関数に関する積分等の，数式の展開は必要なく，理論式と計算プログラムはきわめて簡潔かつ明瞭である．このため，比較的複雑な構造物の解析や，摂動法を併用して，有限振幅波に関する波浪境界値問題の解析に用いること等も容易となる.

最後に，九州大学名誉教授井島武士先生より，計算点配置について貴重な助言を頂いた．ここに記して感謝申し上げる.

参考文献

井島武士（1971）：最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用，1971年度水工学に関する夏期研究会講義集

井島武士・田淵幹修・湯村やす（1972）：有限水深の波による矩形断面物体の運動と波の変形，土木学会論文報告集，第202号，pp. 33～48.

伊藤喜行・千葉　繁（1972）：浮防波堤の水理に関する近似理論と応用，港湾技術研究所報告，第11巻，第2号，pp. 137～166.

合田良実・鈴木康正・笹田　正（1976）：波浪中の直立円柱浮体に働く流体力とその運動，港湾技術研究所報告，第15巻，第2号，pp. 167～210.

吉田明徳・鶴本良博・小島治幸（1989）：波浪境界値問題におけるポテンシャル接続法の選点解法について，九州大学工学集報，第62巻，第3号，pp. 169～177.

Ursell, F., R. G. Dean and Y. S. Yu (1959): Forced small-amplitude water waves: a comparison of theory and experiment, J. Fluid Mech., Vol. 7, pp. 33～52.

Black, J. L., C. C. Mei and M. C. G. Bray (1971): Radiation and scattering of waterwaves by rigid bodies, J. Fluid Mech., Vol. 46, part 1, pp. 151～164.

Mcluver, P. (1986): Wave forces on adjacent floating bridges, Applied Ocean Research, Vol. 8, No. 2, pp. 67～75.

Wu., J. and P. L.-F. Liu (1988): Interaction of obliquely incident water waves with two vertical obstacles, Applied Ocean Research, Vol. 10, No. 2, pp. 66～72.