

グリーン公式による有限振幅波の定常境界値問題解析法

吉田明德*・村上啓介**・小島治幸**・鶴本良博***

1. まえがき

非線形の波動境界値問題を、境界要素あるいは有限要素法を用い、非定常境界値問題として解析する方法がいくつか示されている(例えば、Faltinsen, 1978; Ijima・Nagata, 1980; Nakayama・Washizu, 1981; Kim・Liu・Liggett, 1983; 大山, 1985). しかし、定常問題に対して、これらの非定常解析法を用いることは、定常状態に達するまでの計算時間が著しく長くなること、計算領域における通過条件がわからないことから、計算領域を大きく取らざるを得ないこと、および計算誤差の累積等の問題があって必ずしも適当ではない。本研究は有限振幅波と構造物の相互干渉に関する定常境界値問題を、非定常解析法によらず、定常問題として簡便にかつ精度良く解析する方法として、グリーン公式と摂動法を併用した有限振幅波(ストークス波)の定常波動境界値問題の解析法を提示し、2次のオーダーまでの解析を行って、その妥当性を水槽実験によって検証したものである。

2. 理論解析

一定水深の海域にある構造物に対し、 x の正方向から有限振幅波(ストークス波)が入射する場合を考える。1次のオーダーの波(微小振幅波)の振幅を ζ_0 、波数を k 、角周波数を $\sigma(=2\pi/T: T$ は周期)で表す。また、

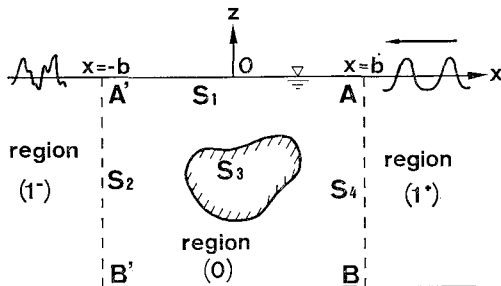


図-1 領域分割と座標系

図-1 に示すように仮想境界面($x=\pm b$)を設け、これによって囲まれる閉領域(0)の、境界線に対する外向き法線を $\mathbf{n}$ とし、流体運動の速度ポテンシャルを $\Phi(x, z, t)$ で、また、水面波形を $\zeta(x, t)$ であらわすこととする。

2.1 摂動展開

速度ポテンシャルが、自由表面において満足すべき、運動学および力学的境界条件は、水面波形 $\zeta(x, t)$ 自身が未知量であって、厳密に境界条件を適用する事が出来ない。そこで、静水面 $z=0$ のまわりのテーラー展開により、条件式を $z=0$ における Φ , $\partial\Phi/\partial t$, ……等で近似すると次式を得る。

運動学的境界条件より

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \dots = 0 \quad (1)$$

力学的境界条件より

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \zeta \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \dots = Q \quad (2)$$

ただし Q は定数である。

ここで、速度ポテンシャル Φ 、水面波形 ζ 、定数 Q が微小パラメーター $\varepsilon(=\kappa\zeta_0)$ によって、次のように級数展開出来るものとする。

$$\Phi(x, z, t) = (g/k\sigma) \{ \varepsilon\Phi^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2\Phi^{(2)}(x, z, t) + \varepsilon^3\Phi^{(3)}(x, z, t) + \dots \} \quad (3)$$

$$\zeta(x, t) = (1/k) \{ \varepsilon\eta^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2\eta^{(2)}(x, t) + \varepsilon^3\eta^{(3)}(x, t) + \dots \} \quad (4)$$

$$Q = (g/k) \{ \varepsilon Q^{(1)} + \varepsilon^2 Q^{(2)} + \varepsilon^3 Q^{(3)} + \dots \} \quad (5)$$

これらを(1), (2)式に代入して得られる、 $O(\varepsilon)$ の2式より $\eta^{(1)}$ を消去し、 $O(\varepsilon^2)$ の2式より $\eta^{(2)}$ を消去すると、 $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ に関する水面での境界条件として次式を得る。

* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木学科

** 正会員 工修 九州大学助手 工学部水工土木学科

*** 正会員 工修 高松工業高等専門学校助教授 土木工学科

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = & -\frac{1}{k\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{1}{kg} \eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} \right. \\ & + \left. g \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right\} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで ε のオーダー (p) のポテンシャル $\phi^{(p)}$ が、一般に基本周波数 σ の調和成分の和として次のように表せるものとする。

$$\phi^{(p)}(x, z, t) = R_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{(p)}(x, z) e^{in\sigma t} \right] \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) を (6) および (7) 式に代入し、 $0(\varepsilon)$ の入射波が角周波数 σ の波であることから、(6) 式では $n=1$ の場合のみが、意味を持つ解をあたえる。したがって、 $0(\varepsilon^2)$ の境界条件 (7) 式では、 $\phi^{(1)}$ と $\eta^{(1)}$ が時間的に基本周波数成分の変動量であるから、 $n=0$ と $n=2$ の場合にのみ意味のある解を与えることとなり、ポテンシャル $\phi^{(2)}(x, z, t)$ は、定常な成分と、 2σ の周波数成分を含む。同様の考察を ε の各オーダーについて行くと、式 (3) の速度ポテンシャル Φ の級数展開は、結局次のように表せる。

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) = & (g/k\sigma) R_0 [\varepsilon \phi_1^{(1)}(x, z) e^{i\sigma t} \\ & + \varepsilon^2 (\phi_0^{(2)}(x, z) + \phi_2^{(2)}(x, z) e^{i2\sigma t}) \\ & + \varepsilon^3 (\phi_1^{(3)}(x, z) e^{i\sigma t} + \phi_3^{(3)}(x, z) e^{i3\sigma t}) \\ & + \dots\dots\dots] \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

2.2 領域 (1[±]) の速度ポテンシャル

領域 (1⁺) および領域 (1⁻) における $0(\varepsilon)$ のポテンシャル $\phi^{(1)}(x, z, t)$ を、領域 (1⁺) では $\phi_+^{(1)}$ 領域 (1⁻) では $\phi_-^{(1)}$ と書きあらわす。 $\phi_+^{(1)}$ と $\phi_-^{(1)}$ は、(6) 式の水面条件および水底条件を満足する、ラプラス方程式の一般解として、次式であらわせる。

$$\phi_+^{(1)}(x, z, t) = R_0 \{ [e^{ikx} + A e^{-ikx}] e^{i\sigma t} \} Z(kz) \dots\dots\dots (10)$$

$$\phi_-^{(1)}(x, z, t) = R_0 [B e^{ikx} e^{i\sigma t}] Z(kz) \dots\dots\dots (11)$$

ただし、定数 A , B はそれぞれ $0(\varepsilon)$ の反射率、通過率を表す複素数で、 $Z(kz)$ は次式を意味する。

$$Z(kz) = \cosh k(z+h) / \cosh kh \dots\dots\dots (12)$$

式 (10), (11) を、(7) 式の水面境界条件式に代入すると、 $0(\varepsilon^2)$ のポテンシャル $\phi_+^{(2)}(x, z, t)$, $\phi_-^{(2)}(x, z, t)$ に関する水面境界条件は次式のようにあらわせる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_+^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi_+^{(2)}}{\partial t^2} = & -\frac{3\{(\sigma^2/g)^2 - k^2\}}{2k} \\ & \cdot R_0 [i \{e^{i2kx} + A^2 e^{-i2kx}\} e^{i2\sigma t}] \\ & - \frac{\{3(\sigma^2/g)^2 + k^2\}}{k} R_0 [i A e^{i2\sigma t}] \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_-^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi_-^{(2)}}{\partial t^2} = & -\frac{3\{(\sigma^2/g)^2 - k^2\}}{2k} \\ & \cdot R_0 [i B^2 e^{i2kx} e^{i2\sigma t}] \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

よって、領域 (1⁺) および領域 (1⁻) における、水面条件式 (13), (14) および水底条件を満足する、ラプラス方程式の一般解 $\phi_+^{(2)}$, $\phi_-^{(2)}$ は、 $A^{(2)}$ と $B^{(2)}$ を 2 次のオーダーの自由波に関する未知数として次式であらわせる。

$$\begin{aligned} \phi_+^{(2)}(x, z, t) = & R_0 [A^{(2)} e^{-ik^{(2)}x} e^{i2\sigma t}] Z(k^{(2)}z) \\ & + a_s R_0 [i \{e^{i2kx} + A^2 e^{-i2kx}\} e^{i2\sigma t}] Z(2kz) \\ & + b_s R_0 [i A e^{i2\sigma t}] \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_-^{(2)}(x, z, t) = & R_0 [B^{(2)} e^{ik^{(2)}x} e^{i2\sigma t}] Z(k^{(2)}z) \\ & + a_s R_0 [i B^2 e^{i2kx} e^{i2\sigma t}] \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ただし、 $k^{(2)}$ は (17) 式で決まる 2 次のオーダーの自由波の波数である。

$$(2\sigma)^2/g = k^{(2)} \tanh k^{(2)}h \dots\dots\dots (17)$$

また、 $Z(k^{(2)}z)$, $Z(2kz)$ は $Z(kz)$ の k にかえて $k^{(2)}$, $2k$ とおいたものを意味し、 a_s , b_s は次式で与えられる定数である。

$$\left. \begin{aligned} a_s = & -\frac{3\sigma^2 \cosh 2kh}{8kg \sinh^4 kh} \\ b_s = & \frac{\{3(\sigma^2/g)^2 + k^2\}}{4k(\sigma^2/g)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

2.3 閉領域 (0) の境界条件

領域 (1⁺) と領域 (1⁻) における $0(\varepsilon)$ と $0(\varepsilon^2)$ の解 (10), (11), (15), (16) 式により、仮想境界面 ($x=\pm b$) における境界条件として次式を得る。

$0(\varepsilon)$ に関して

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^{(1)} = & \{e^{ikb} + A e^{-ikb}\} Z(kz) \\ \partial \phi_1^{(1)} / \partial \nu = & ik \{e^{ikb} - A e^{-ikb}\} Z(kz) \end{aligned} \right\} (x=+b) \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^{(1)} = & B e^{-ikb} Z(kz) \\ \partial \phi_1^{(1)} / \partial \nu = & -ik B e^{-ikb} Z(kz) \end{aligned} \right\} (x=-b) \dots\dots\dots (20)$$

$0(\varepsilon^2)$ に関して

$$\left. \begin{aligned} \phi_2^{(2)} = & A^{(2)} e^{-ik^{(2)}b} Z(k^{(2)}z) \\ & + ia_s (e^{i2kb} + A^2 e^{-i2kb}) Z(2kz) + ib_s A \\ \partial \phi_2^{(2)} / \partial \nu = & -ik^{(2)} A^{(2)} e^{-ik^{(2)}b} Z(k^{(2)}z) \\ & - 2ka_s \{e^{i2kb} - A^2 e^{-i2kb}\} Z(2kz) \end{aligned} \right\} (x=+b) \dots\dots\dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_2^{(2)} = & B^{(2)} e^{-ik^{(2)}b} Z(k^{(2)}z) \\ & + ia_s B^2 e^{-i2kb} Z(2kz) \\ \partial \phi_2^{(2)} / \partial \nu = & -ik^{(2)} B^{(2)} e^{-ik^{(2)}b} Z(k^{(2)}z) \\ & + 2ka_s B^2 e^{-i2kb} Z(2kz) \end{aligned} \right\} (x=-b) \dots\dots\dots (22)$$

$$\phi_0^{(2)} = 0 \quad (x=\pm b) \dots\dots\dots (23)$$

また、水面での境界条件は式 (9) で与えられる、 $\phi^{(1)}$ (x, z, t) と $\phi_1^{(1)}(x, z)$ の関係、および $\phi^{(2)}(x, z, t)$ と

$\phi_0^{(2)}(x, z)$, $\phi_2^{(2)}(x, z)$ の関係を, (6) と (7) 式に用いると, $\phi_1^{(1)}(x, z)$, $\phi_2^{(2)}(x, z)$, $\phi_0^{(2)}(x, z)$ に関しそれぞれ次式で与えられる.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial z} - \frac{(2\sigma)^2}{g} \phi_2^{(2)} = -\frac{i}{k} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{1}{kg} \frac{\eta}{2} \left\{ -\sigma^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{\partial \phi_0^{(2)}}{\partial z} = -\frac{1}{kg} \frac{\eta}{2} \left\{ -\sigma^2 \frac{\partial \phi^*}{\partial z} + g \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

なお, 添え字を省略した ϕ , η は $0(\varepsilon)$ の $\phi_1^{(1)}$, $\eta^{(1)}$ を意味し, また, ϕ^* は ϕ の共役複素数を意味する.

2.4 グリーン公式と数値計算手順

グリーンの定理によれば, 図-1 に示すような閉領域における調和関数 $\phi(x, z)$ に関して次式が成り立つ.

$$\phi(X) = \frac{1}{\alpha} \int_D \left\{ \phi(X_b) \frac{\partial}{\partial \nu} G(r) - G(r) \frac{\partial}{\partial \nu} \phi(X_b) \right\} ds \quad \dots\dots\dots (27)$$

ただし, $G(r) = \log r + \log r^*$ で r は領域内の任意点 $X (= (x, z))$ と境界上の点 X_b との間の距離で, r^* は X と X_b の鏡像点 X_b^* 間の距離である. また α は X が境界線上にある場合は $\alpha = \pi$ を取り, 境界線を除いた領域内の点である場合は $\alpha = 2\pi$ を取る定数で, 積分は境界 ($D = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$) に沿う反時計まわりの積分である.

以後 x, z 等の変数は次の様な無次元量を意味する.

$$x/h = x, \quad z/h = z, \quad \zeta_0/h = \zeta_0, \quad \nu/h = \nu, \quad kh = k, \\ k^{(2)}h = k^{(2)}, \quad (n\sigma)^2 h/g = \Gamma^{(n)}, \quad \partial \phi / \partial (\nu/h) = \bar{\phi} \quad \dots\dots\dots$$

領域 (0) の境界 S_1, S_2, S_3, S_4 をそれぞれ N_1, N_2, N_3, N_4 個の小要素 Δs_j に分割し, 要素 Δs_j の中点の座標 (x_j, z_j) を (j) であらわす. ここで, (27) 式の積分方程式を小要素 Δs_j に関して離散化して表わし, これに同じく離散化した境界条件式を用いると, 摂動展開の次数 p と調和関数の次数 n に対して, ポテンシャル関数 $\phi_n^{(p)}$ に関する連立一次方程式を得る.

($p=1, n=1$) および ($p=2, n=2$) の場合

$$\sum_{j=1}^{N_1} \{ \bar{E}_{ij} - \Gamma^{(n)} E_{ij} \} \phi_n^{(p)}(j) \\ + [e^{-i k^{(n)} b} \sum_{j=1}^{N_2} \{ \bar{E}_{ij} - \delta_{ij} + i k^{(n)} E_{ij} \} Z(k^{(n)} z_j)] B^{(n)} \\ + \sum_{j=1}^{N_3} \{ \bar{E}_{ij} - \delta_{ij} \} \phi_n^{(p)}(j) \\ + [e^{-i k^{(n)} b} \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}_{ij} - \delta_{ij} + i k^{(n)} E_{ij} \} Z(k^{(n)} z_j)] A^{(n)} \\ = \sum_{j=1}^{N_1} E_{ij} N_n^{(p)}(j) + H_n^{(p)}(i) \quad \dots\dots\dots (28)$$

($p=2, n=0$) の場合

$$\sum_{j=1}^{N_1} \{ \bar{E}_{ij} - \delta_{ij} \} \phi^{(2)}(j) + \sum_{j=1}^{N_3} \{ \bar{E}_{ij} - \delta_{ij} \} \phi^{(2)}(j)$$

$$- \sum_{j=1}^{N_2} E_{ij} \bar{\phi}^{(2)}(j) - \sum_{j=1}^{N_4} E_{ij} \bar{\phi}^{(2)}(j) \\ = \sum_{j=1}^{N_1} E_{ij} N_0^{(2)}(j) \quad \dots\dots\dots (29)$$

式(28)と(29)中の係数 $N_n^{(p)}(j)$ は, p と n の次数に応ずる水面境界条件(24)~(26)式の右辺を意味する. また, $B^{(1)} = B$, $A^{(1)} = A$, $k^{(1)} = k$ で, E_{ij} , $\bar{E}_{ij}$ および $H(i)$ は, それぞれ次式で与えられる.

$$E_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta s_j} \{ \log r_i + \log r_i^* \} ds \\ \bar{E}_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta s_j} \frac{\partial}{\partial \nu} \{ \log r_i + \log r_i^* \} ds \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$H_1^{(1)}(i) = -e^{ikb} \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}_{ij} - \delta_{ij} - ik E_{ij} \} Z(k z_j) \\ H_2^{(2)}(i) = -ia_s e^{i2kb} \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}_{ij} - \delta_{ij} - i2k E_{ij} \} Z(2k z_j) \\ - ib_s A \sum_{j=1}^{N_1} \{ \bar{E}_{ij} - \delta_{ij} \} \\ - ia_s A^2 e^{-i2kb} \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}_{ij} - \delta_{ij} + i2k E_{ij} \} Z(2k z_j) \\ - ia_s B^2 e^{-i2kb} \sum_{j=1}^{N_2} \{ \bar{E}_{ij} - \delta_{ij} + i2k E_{ij} \} Z(2k z_j) \quad \dots\dots\dots (31)$$

まず $0(\varepsilon)$ の場合 ($p=1, n=1$) について, (28) 式を解いて $A, B, \phi(j)$ を求める (このとき, (24) 式より $N_1^{(1)}(j) = 0$ である). 水面境界条件から, 水面上の $\partial \phi(j) / \partial z$ と $\eta(j)$ を求める. ついで, $\phi(j)$, $\partial \phi(j) / \partial z$, $\eta(j)$ を(25), (26)式に用いて $0(\varepsilon^2)$ ($p=2, n=0, 2$) の場合の $N_2^{(2)}(j)$, $N_0^{(2)}(j)$ を算定し, また, A, B を(31)式に用いて $H_2^{(2)}(i)$ を算定する. これらの $N_2^{(2)}(j)$, $N_0^{(2)}(j)$, $H_2^{(2)}(i)$ を用いて, $0(\varepsilon^2)$ の場合 ($p=2, n=0, 2$) について(28), (29)を解いて $\phi_2^{(2)}(j)$, $\phi_0^{(2)}(j)$ を求める. なお, $\partial \phi / \partial x$, $\partial^2 \phi / \partial x^2 \dots\dots$ 等の微分量は中央差分で算定する.

2.5 水面波形

式(4)より $0(\varepsilon^2)$ までの水面波形は次式で与えられる.

$$\zeta(x, t) / \zeta_0 = \eta^{(1)}(x, t) + \varepsilon \eta^{(2)}(x, t) \quad \dots\dots\dots (32)$$

$\eta^{(2)}$ は運動学的境界条件式(2)より次式で算定される. 領域 (0)

$$\eta^{(2)}(x, t) = -R_0 [i2\phi_2^{(2)} e^{i2\sigma t}] + Q^{(2)} \\ - \frac{1}{4k(\sigma^2/g)} R_0 \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} e^{i2\sigma t} \\ - \frac{1}{2k} R_0 \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} e^{i2\sigma t} \right] + \frac{1}{2k} R_0 \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \phi^* \right] \\ - \frac{1}{4k(\sigma^2/g)} \left\{ \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

領域 (1^+)

$$\eta^{(2)}(x, t) = -R_0 [i2A^{(2)} e^{-i k^{(2)} x} e^{i2\sigma t}] \\ + (2a_s + c_s) R_0 [e^{i2kx} + A^2 e^{-i2kx}] e^{i2\sigma t} \\ + 2e_s R_0 [A e^{-i2kx}] - f_s [1 + |A|^2] + Q^{(2)}$$

.....(34)

領域 (1⁻)

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}(x,t) = & -R_e[i2B^{(2)}e^{ik^{(2)}x}e^{i2\sigma t}] \\ & + (2a_s + c_s) R_e[B^2e^{i2kx}e^{i2\sigma t}] \\ & - f_s |B|^2 + Q^{(2)} \end{aligned} \quad (35)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} e_s &= \frac{\{k^2 + (\sigma^2/g)\}}{4k(\sigma^2/g)}, \quad f_s = \frac{\{k^2 - (\sigma^2/g)^2\}}{4k(\sigma^2/g)} \\ c_s &= \frac{\{k^2 - 3(\sigma^2/g)^2\}}{4k(\sigma^2/g)} \end{aligned} \right\} \dots (36)$$

また, 領域 (1⁺) の平均水深を h に取ることとすると, 定数 $Q^{(2)}$ は $Q^{(2)} = f_s \{1 + |A|^2\}$ で与えられる.

3. 実験による検証

線形問題については, いくつか厳密解が得られている, 解析法の検証に用いることができるが, 非線形問題については実験によって検証せざるをえない. このため, 図-4 中に示す, 半円柱について円柱近傍の水面波形を測定して解析解と比較した.

実験は幅 0.3m, 深さ 0.5m, 長さ 28m で, 一端に波吸収機能を備えた造波装置を有する 2 次元水路を用い, 半径 27 cm の塩ビパイプを半円に切断したものを水路底面に固定して, 水深を 38.6 cm (水面から半円柱の上端までが水深の 3 割) とし, 周期 1.43 秒 ($kh=1.0$) について, 入射波高 3.2 cm ($\zeta_0/h=0.041$) と 4.5 cm ($\zeta_0/h=0.058$), 周期 1.14 秒 ($kh=1.4$) について, 入射波高 4.2 cm ($\zeta_0/h=0.054$) と 5.3 cm ($\zeta_0/h=0.069$) に取り, 半円柱の前後を, 0.4h 間隔の 64 測点で, 水面波形を 20 Hz のサンプリング間隔でデジタルデータレコーダーに

記録した. また, 各測点における時間波形のフーリエ解析を行って, 1 次, 2 次, 3 次周波数成分の振幅を算定し, 各周波数成分の空間分布を算定した. 数値計算においては, 仮想境界面を半円中心より水深の 3.7 倍離してとり, 分割要素長を水深の 1/10 に固定して計算を行った.

図-2, $kh=1.0$ で $\eta_0/h=0.041$ の場合の, また, 図-3 に $kh=1.4$ で $\zeta_0/h=0.054$ の場合の, 2 周期分の通過側の水面波形について, 実験値と理論値の比較を示している. ただし, 図の縦軸上の各測点の波形は, 時間的に同期していない. 図-4 は $kh=1.0$ で $\zeta_0/h=0.058$ の場合の半円近傍における, 2 倍周波数成分波の,

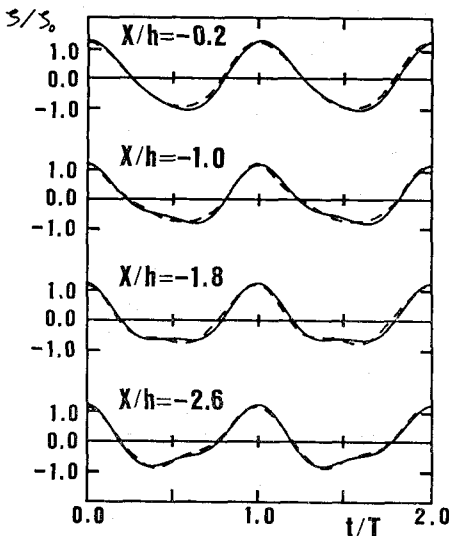


図-2 水面波形の実験値 (—) と理論値 (実線) の比較 $kh=1.0$, $\zeta_0/h=0.041$.

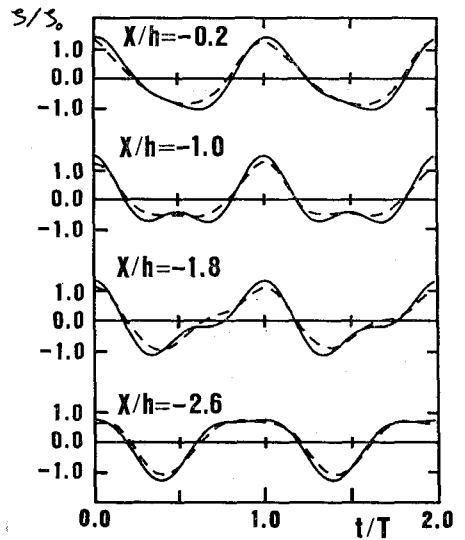


図-3 水面波形の実験値 (—) と理論値 (—) の比較 $kh=1.4$, $\zeta_0/h=0.054$

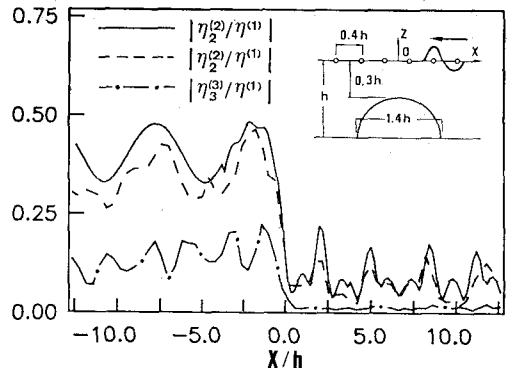


図-4 2 倍周波数成分波の基本周波数成分に対する振幅比の空間分布, 実験値 (—) と理論値 (—) の比較 $kh=1.0$, $\zeta_0/h=0.058$, (— · —) は 3 倍周波数成分波の実験値

基本周波数成分波に対する振幅比の分布について、実験値と理論値を比較したものである。ただし、図中の1点鎖線は、実験値より得られた3倍周波数成分の振幅比である。これらの実験値と理論値の比較をみると、水面波形については、理論値はかなりの程度実際の現象を表現し得ていると思われる。

4. あとがき

実験値と解析解を比較した結果、2次のオーダーまでの水面波形に関しては、十分な精度で現象を推定できることを確かめた。ただし、条件によっては2次以上の高次のオーダーが無視できない場合もあり、さらに高次のオーダーの解析を行うことも必要である。本解析法の適用はストークス波に限られ、しかも開領域における速度ポテンシャルの一般解を、あらかじめ求めておく必要があるけれども、非定常解析法を用いて定常問題を解析するのに比べて、計算容量、計算時間は極めて少なく済み、かつ誤差の累積等の問題も少ないため、有限振幅波の定常境界値問題の有効な解析法であるといえる。本文

では、入射波が単一成分波である場合をとりあつたが、多成分波の場合にも拡張は容易である。

参 考 文 献

- 大山 巧 (1985): 境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 555~559.
- Faltinsen, O. M. (1978): A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow, *J. of Ship Research*, Vol. 22, No. 3, pp. 193~202.
- Ijima, T. and S. Nagata (1980): Numerical analysis of transient finite amplitude waves by boundary integral and perturbation expansion, *Coastal Engineering in Japan*, Vol. 123, pp. 25~44.
- Kim, S. K., P. L-F. Liu and J. A. Liggett (1983): Boundary integral equation solutions for solitary wave generation, propagation and runup, *Coastal Engineering*, Vol. 7, pp. 299~317.
- Nakayama, T. and K. Washizu (1981): The boundary element method applied to the analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problem, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 1631~1646.