

飛砂の移動限界の理論

土屋義人*・三島豊秋**・土田 充***

1. 緒 言

海岸侵食の原因の1つとして風による砂の流送現象、すなわち飛砂があり、一方、飛砂と類似した現象として水による砂の流送現象、すなわち流砂がある。これら2つの流送現象は、一樣流中における砂の輸送という点においては力学的に同じ現象であるにもかかわらず、その相互関係には不明確な点が多い。これまでに理論的および実験的に定式化された多くの飛砂および流砂量則は、移動限界として定められた砂の移動の初期条件である限界掃流力を基準に成立っており、この意味で飛砂および流砂の移動限界の相違を明らかにすることは、両者の相互関係を明らかにし、一樣流中における砂の流送現象として両者を統一する最も根本的な課題であると言える。

飛砂の移動限界に関する最近の理論的研究としては、Wibergら(1987)の研究が上げられる。一方、流砂のそれに関しては岩垣(1956)の理論的研究がある。飛砂と流砂の相違は砂粒と流体の密度比の相違であると考えられるが、これらの研究は、床面上の球状の単一砂粒に働く流体力と摩擦力との静的な力の釣合い条件に基づいているため、両者の移動限界の相違を説明することができない。しかしながら、これまでの移動限界に関する実験結果は明らかに両者の移動限界に相違があることを示しており(土屋ら, 1970)、密度比の影響を含む移動限界の表示をするためには動的な力学条件から移動限界を導く必要がある。

本研究では、流体中における極座標変換された砂粒の運動方程式に基づいて移動限界時における砂粒の運動をrocking motionとして定式化し、その運動方程式を線形近似することにより移動限界時の砂粒の運動の近似解を求める。ついで、その近似解の不安定条件に基づいて砂粒 Reynolds 数の十分大きな領域における密度比の影響を含む飛砂の移動限界の表示を導き、飛砂のみならず、流砂の移動限界の統一的表示を試みる。

2. 移動限界の理論

2.1 運動方程式

土屋ら(1984)が波動場における移動限界時の砂粒の運動をrocking motionとして仮定したように、一樣流中においても同様の仮定をする。

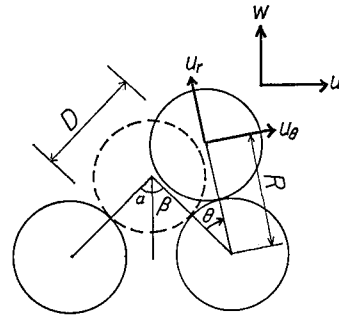


図-1 座 標 系

図-1に示すような球状砂粒で構成

される粗面上における1個の球状砂粒を考える。流体中における極座標変換された砂粒の運動方程式に基づくrocking motionとしての砂粒の運動方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{1}{M} \left\{ \frac{3}{4} C_D |V_r| - \frac{C_M}{R} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \right\} \dot{\theta} \\ - \frac{3}{4} \frac{C_D |V_r|}{MR} \\ (u_\theta - \gamma u_r) - \frac{1}{MR} \left(C_M \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{Du_\theta}{Dt} \right. \\ \left. + \frac{1}{R} u_\theta u_r \right) - \frac{\sin(\theta + \varphi)}{MR \tau^* \tan \varphi} = 0 \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} t &= u^* t' / D, \quad M = \sigma / \rho + C_M + 2\xi (\sigma / \rho + 1/2) / 5, \\ u_\theta &= \{u \cos(\theta - \varphi) + w \sin(\theta - \varphi)\} / u^*, \\ u_r &= \{w \sin(\theta - \varphi) + u \cos(\theta - \varphi)\} / u^*, \\ |V_r|^2 &= \sqrt{u_r^2 + (u_\theta - R\dot{\theta})^2}, \quad R = R' / D \\ \varphi &= \begin{cases} -\alpha; & \theta < 0 \\ \beta; & \theta > 0, \end{cases} \quad \tau^* = \frac{u^{*2}}{(\sigma / \rho - 1) g D \tan \varphi}, \\ &\dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

であり、 σ および ρ は砂粒および流体の密度、 D は砂粒の直径、 R' は砂粒の回転半径、 C_D および C_M は抗力および仮想質量力係数、 u および w は x および z 方向の流速、 u^* は摩擦速度、 ξ は砂粒の滑動(=0)および回転(=1)に関係する係数、 g は重力の加速度である。こ

* 正 会 員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 学生会員 工修 京都大学大学院 工学研究所

*** 正 会 員 工修 清水建設(株) 技術研究所

のとき、揚力係数は、

$$C_L = \gamma C_D$$

を用いた。また、抗力係数は池田ら(1988)が用いた Mole-rus らの形式

$$C_D = \frac{24}{R_e^* |\mathbf{V}_r|} (1 + K_1 \sqrt{R_e^* |\mathbf{V}_r|} + K_2 R_e^* |\mathbf{V}_r|) \quad \cdots (4)$$

を用いる。ここに、 R_e^* は砂粒 Reynolds 数 ($= Du^*/L$) であり、 K_1 , K_2 および γ はそれぞれ 0.152, 0.0151 および 0.85 である。

Rocking motion を扱う場合には回転軸が変わる点での接続条件を必要とする。その条件としてはエネルギーもしくは角運動量の保存則などが用いられるが、完全な rocking motion においては後者が成立つと推察される。ここでは、移動限界時の砂粒の運動は完全な rocking motion であると仮定し、回転軸が変わるときの角運動量の保存則より導かれる次式を用いる。

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \zeta \theta_1 \quad (\theta=0) \\ \zeta &= \{D\zeta + 5R'\cos(\alpha+\beta)\} / (D\zeta + 5R') \quad \cdots \cdots (5) \end{aligned}$$

ここに、 θ_0 および θ_1 はそれぞれの回転軸における回転角である。

2.2 砂粒の運動の近似解

一様流中における移動限界に密度比の影響が現れる原因は、砂粒の乱れに対する応答特性の相違および乱れによって起こる流体力の変化の相違などであると推察される。乱れによって起こる流体力の変化を考慮するためには、式(1)で表される移動方程式の非線形性、特に、移動限界に最も重要な流体力である抗力の非線形性などを考慮しなければならない。しかしながら、式(1)の運動方程式は rocking motion として定式化されているため、回転軸が変わる点の存在という強い非線形性を伴っており、流体力の非線形性まで考慮することは困難である。そこでここでは、砂粒の乱れに対する応答の違いにのみ着目して解析する。

式(1)で表される運動方程式において、一様流を仮定し、流速を平均流速成分と乱れの変動速度成分に分離して次式のように表す。

$$u/u^* = \bar{u} + u', \quad w/w^* = w' \quad \cdots \cdots (6)$$

乱れの勾配の影響は無視して、

$$|u'|, |w'|, |R\dot{\theta}| \ll \bar{u}, \quad |\theta| \ll |\varphi| \quad \cdots \cdots (7)$$

を仮定する。

$$C_D \approx C_D(u),$$

$$|\mathbf{V}_r| \approx |\mathbf{V}_r| + \frac{\partial |\mathbf{V}_r|}{\partial u_r} u_r' + \frac{\partial |\mathbf{V}_r|}{\partial u_\theta} (u_\theta' - R\dot{\theta}) + \cdots$$

$$\sin(\theta - \varphi) \approx -\sin \varphi + \theta \cos \varphi + \cdots$$

$$\cos(\theta - \varphi) \approx \cos \varphi + \theta \sin \varphi + \cdots \cdots (8)$$

などを用いて式(1)を θ , u' および w' に関して線形近似すると、式(1)は次式のように書換えられる。

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{M} a_1 \ddot{\theta} - \frac{\cos \varphi}{MR} a_2 \theta = \frac{\cos \varphi}{MR} \{a_3 + f(t)\} \quad \cdots \cdots (9)$$

ここに、

$$a_1 = \frac{3}{4} C_D \bar{u}^2 \frac{2 + \gamma \tan \varphi + \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} - C_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \sin \varphi,$$

$$a_2 = \frac{3}{4} C_D \bar{u}^2 (\tan \varphi - \gamma) + \frac{1}{\tau^* \tan \varphi},$$

$$a_3 = \frac{3}{4} C_D \bar{u}^2 (1 + \gamma \tan \varphi) \varphi - \frac{1}{\tau^*},$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} \hat{u} e^{ixt} dx,$$

$$\hat{f} = \frac{3}{4} C_D \bar{u} \{2 - \gamma \lambda + (\lambda + 2) \tan \varphi\}$$

$$+ \lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + i_X (C_M + 1) (1 + \tan \varphi), \quad \cdots \cdots (10)$$

ここに、 λ は x および z 方向の乱れの変動速度成分の相関係数であり、また、このときそれぞれの乱れの変動速度成分は x 方向の乱れの変動速度成分の Fourier 逆変換 $\hat{u}$ を用いて次式のように表わす。

$$u' = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u} e^{ixt} dx,$$

$$w' = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w} e^{ixt} dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u} e^{ixt} dx, \quad \cdots \cdots (11)$$

一様流中における砂粒は x 方向に強い流体力を受けているのに加え、式(5)で表された接続条件によって回転軸が変わるたびに大きく運動が減衰するため、一様流中においては $\theta > 0$ における運動が卓越すると考えられる。すなわち、次式を仮定することができる。

$$\theta|_{\varphi < 0} \ll \theta|_{\varphi > 0}, \quad \varphi = \beta \quad \cdots \cdots (12)$$

また、式(10)における流体力はすべて $z = \theta$ の点での値を代表値として用いる。このとき、式(10)は定数係数の非同次線形微分方程式となり、式(10)の解は次式のように導びかれる。

$$\begin{aligned} \theta &= e^{-b_1(t-t_0)} \cosh b_2(t-t_0) \\ &\times \{C_1 \tanh b_2(t-t_0) + C_2\} \\ &- \frac{a_3}{a_2} - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} \hat{u} e^{ixt} dx \quad \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

ここに、

$$b_1 = a_1/2M, \quad b_2 = \sqrt{a_1^2 + 4Ma_2 \cos \beta / R} / 2M$$

$$\hat{f} = \frac{\cos \beta}{MR} \cdot \frac{\hat{f}}{x^2 + a_2 \cos \beta / MR - ia_1 x / M} \quad \cdots \cdots (14)$$

であり、 C_1 および C_2 は初期条件に関係する係数、 t_0 は初期条件を与える時間である。

式(13)の初期条件は、条件(5)により $\theta = 0$ の点で大きく角速度が減少し、同時に式(12)の仮定が成立つことから、

$$\theta = \dot{\theta} = 0 \quad (t = t_0) \quad \cdots \cdots (15)$$

で与えることができる。このとき、式(13)の係数 C_1 お

よび C_2 は次式のようになる。

$$C_1 = \frac{1}{b_1} \left(b_1 C_2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} ix \hat{\eta} \hat{u} e^{ix t_0} dx \right)$$
$$C_2 = -\frac{a_3}{a_2} + \int_{-\infty}^{\infty} ix \hat{\eta} \hat{u} e^{ix t_0} dx \dots\dots\dots (16)$$

2.3 砂粒の移動条件

移動限界時の砂粒の運動を考えた場合、砂粒の移動条件は砂粒の運動の不安定条件によって表されると考えられる。しかしながら、式(13)で表される砂粒の運動を表す解は、式(7)からもわかるように通常の Shields 数の値のところでは不安定解しか存在しない。これは、移動限界時の砂粒が安定であるためには隣接する粗度の影響が重要であり、式(13)はその影響を直接含んでいないためである。そこで、砂粒の移動条件を以下のように考える。

式(13)で表される解は $t \rightarrow \infty$ において必ず発散し、

$$\theta \rightarrow \frac{1}{2} (C_1 + C_2) e^{(b_2 - b_1)(t - t_0)} \dots\dots\dots (17)$$

となるので、 $C_1 + C_2$ の正負によって解の発散方向が決定される。負の無限大に発散するような解は、隣接する粗度に阻害されるため、隣接した粗度に接する所で運動が止められる砂粒の運動に対応する。したがって、砂粒の移動限界の条件は次式で与えられる。

$$C_1 + C_2 \geq 0 \dots\dots\dots (18)$$

乱れの影響を無視した場合の砂粒の移動限界の条件を式(18)より求めると、次式のようになる。

$$\tau_{c0}^* = 4/3 C_D \bar{u}^2 (1 + \gamma \tan \beta) \dots\dots\dots (19)$$

ついで、乱れを考慮したときの移動限界を

$$\tau_c^* = \tau_{c0}^* + \tau_{c1}^* \dots\dots\dots (20)$$

と置き、さらに、定数 ε を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta} \hat{u} e^{ix t_0} dx = -\varepsilon \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} ES dx}$$

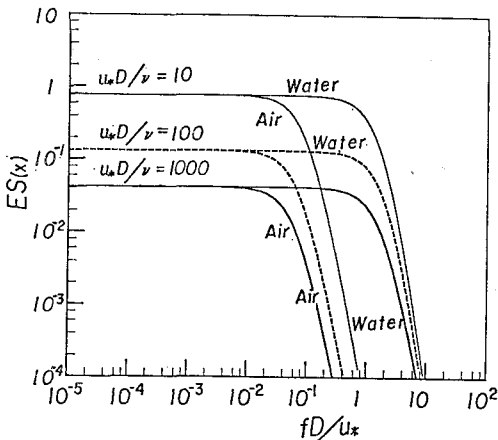


図-2 空気および水中での式(23)におけるESの比較 ($\sigma/\rho = 2.65$ および 2200)

$$\int_{-\infty}^{\infty} ix \hat{\eta} \hat{u} e^{ix t_0} dx = -\varepsilon \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 ES dx} \dots\dots\dots (21)$$

とする。式(16)より τ_{c1}^* を求めると次式のようになる。

$$\tau_{c1}^* \approx \varepsilon K \tau_{c0}^{*2} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、

$$K = a_2 \left(\sqrt{\theta'^2} + \frac{b_1}{b_1 + b_2} \sqrt{\theta'^2} \right),$$
$$\sqrt{\theta'^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} ES dx}, \quad \sqrt{\theta'^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 ES dx},$$
$$E = \left(\frac{\cos \beta}{MR} \right)^2 \frac{G}{(x^2 + a_2 \cos \beta / MR)^2 + a_1^2 x^2 / M^2}$$
$$G = \left[\frac{3}{4} C_D \bar{u} \{ 2 - \gamma \lambda + (\lambda + 2) \tan \beta + \lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \}^2 \right. \\ \left. + x^2 (C_M + 1)^2 (1 + \tan \beta)^2 \right] \dots\dots\dots (23)$$

であり、 S は乱れのパワースペクトル密度関数である。またこのとき、 ε は実験定数と考え実験結果との対応から決定し、 K に含まれる Shields 数は τ_{c0}^* で与えられる。したがって、式(20)および(22)より乱れを考慮した場合の移動限界は次式で与えられる。

$$\tau_c^* = \tau_{c0}^* (1 + \varepsilon K \tau_{c0}^*) \dots\dots\dots (24)$$

3. 移動限界の表示

3.1 移動限界に及ぼす乱れの影響

移動限界に及ぼす密度比の影響は、砂粒と乱れの応答特性の相違と考えられ、ここでは式(23)における $\sqrt{\theta'^2}$ および $\sqrt{\theta'^2}$ に及ぼす密度比の影響によって表される。

図-2 および 3 に無次元周波数に対する式(22)におけるパワースペクトル密度関数 ES および $x^2 ES$ の変化を示す(Tsuchiya・Banno, 1989)。このとき、ここでは粘性底層の影響が無視できるような砂粒 Reynolds 数の十分大きな領域を対象とすることにし、平均流速およびその速度勾配は次式で与えた。

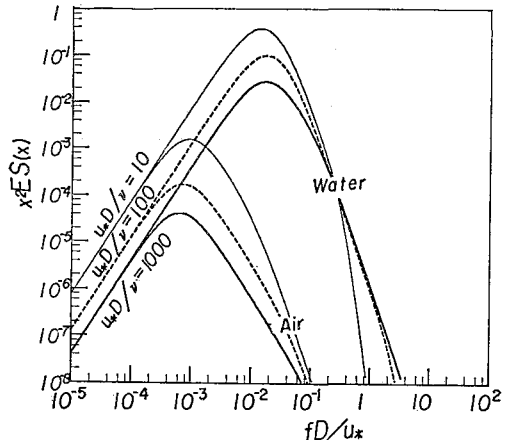
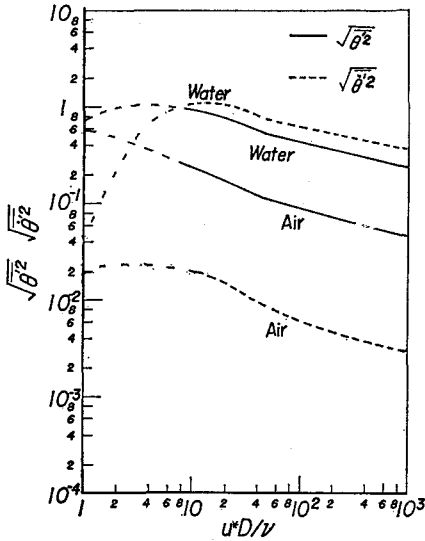


図-3 空気および水中での式(23)における $x^2 ES$ の比較 ($\sigma/\rho = 2.65$ および 2200)



図—4 空気および水中での $\sqrt{\theta'^2}$ および $\sqrt{\theta'^2}$ の比較 ($\sigma/\rho=2.65$ および 2200)

$$\bar{u}=A_r, \quad \partial \bar{u} / \partial z=1 / \kappa \quad (z=D) \quad \cdots \cdots (25)$$

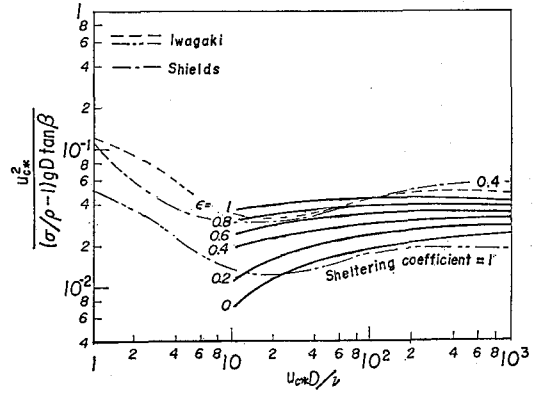
ここに、 κ は Karman 定数であり、 A_r および κ は 8.5 および 0.4 である。また、乱れのパワースペクトル密度関数は Nakagawa ら (1975) によって与えられた密度関数を用い、 C_M 、 ξ および λ はそれぞれ 0.5、1 および -1 で与えた。これらの図に示されているパワースペクトル密度関数は移動限界時の砂粒の運動そのものを表しているわけではないが、空気中および水中におけるこれらの相違は移動限界時の運動に影響を与え、これによって飛砂および流砂の移動限界に相違が表れると考えられる。

図—4 に式 (23) における $\sqrt{\theta'^2}$ および $\sqrt{\theta'^2}$ の Re^* に対する変化を示す。この図において特に特徴的なことは、 Re^* が 10 以上の領域における $\sqrt{\theta'^2}$ の空気中および水中の相違が Re^* に対する変化量に比べてかなり大きなことである。 $\sqrt{\theta'^2}$ は乱れが及ぼす砂粒の速度への影響に対応していると考えられるが、砂粒の速度に及ぼす密度比の影響は、 Re^* が 10 以上の領域においてはかなり支配的であると推察される。

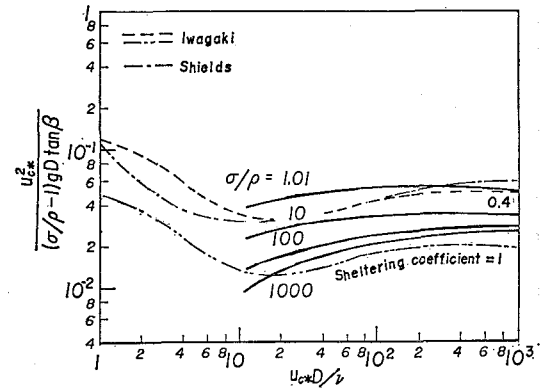
3.2 移動限界の表示

移動限界時における砂粒を動力学的に扱くと、前節で示したように砂粒の受ける乱れの効果は密度比の相違によってかなり異なり、この相違によって移動限界に密度比の影響が表れる。式 (24) によって密度比の影響を含む移動限界は表されるが、式 (24) には乱れの標準偏差に対応すると考えられる未知量を含んでいる。

図—5 に ε の相違による式 (24) で表される移動限界の相違を $\sigma/\rho=2.65$ の場合に対して示す。式 (24) の移動



図—5 砂粒の移動限界のに対する変化 ($\sigma/\rho=2.65$)



図—6 砂粒の移動限界の密度比による変化 ($\varepsilon=1$)

限界は粘性底層の影響を考慮していないため、低砂粒 Reynolds 数のところでの移動限界を示すことはできないが、 ε が 0 から 1 へと増加するに従って岩垣の遮蔽係数 1 の理論曲線から速へい係数 0.4 の理論曲線へ近づいていく。岩垣の遮蔽係数 0.4 の理論曲線は流砂の移動限界に対して導かれた曲線であり、実験結果に良く対応していることが知られていることから、ここでは $\varepsilon=1$ とする。

図—6 に $\varepsilon=1$ としたときの σ/ρ の変化に対する式 (24) で表される移動限界の変化を示す。 σ/ρ が 1000 のところでは岩垣の遮蔽係数 1 の理論曲線に近く、 σ/ρ が小さくなるに従って全体的に限界 Shields 数が大きくなっていき、移動限界に σ/ρ の影響が表れているのがわかる。

図—7 には、式 (24) によって表される移動限界と岩垣 (1956) による流砂に対する実験結果および土屋ら (1970) による飛砂に対する実験結果とを比較したものを示す。図中の太い破線は式 (24) において σ/ρ を 2.65 とした曲線を、また、太い実線は σ/ρ を 2200 とした曲線を表

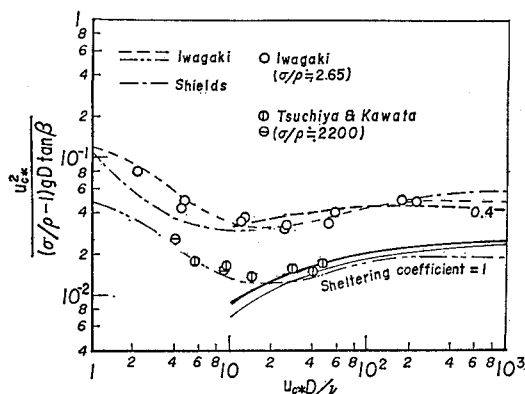


図-7 砂粒の移動限界の飛砂および流砂に対する比較

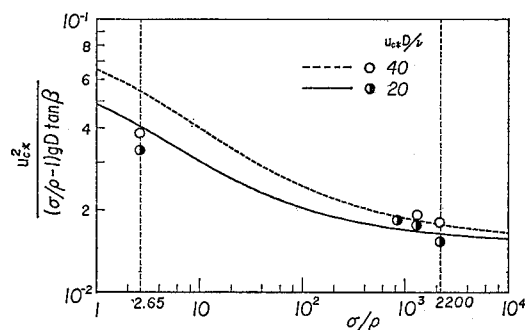


図-8 限界 Shields 数の密度比による変化

す。全体的に式(24)の理論曲線は、飛砂および流砂に対する実験結果をよく説明しているが、飛砂の移動限界に関しては Re^* が20程度以下から実験よりかなり小さくなる。これは粘性底層を考慮していないためであると考えられ、今後検討する必要がある。

図-8 は、 Re^* が20および40のときの σ/ρ の変化に対する限界 Shields 数の変化を示したものである。図

中に比較のため若干の実験結果を付記した。 σ/ρ が2.65の流砂の実験結果に対しては、式(24)で表される限界 Shields 数は少し大きな値を示しているが、 σ/ρ が1000から2200辺りの飛砂の実験結果に対して良く一致している。

4. 結 語

Rocking motion として定式化された移動限界時の砂粒の運動方程式に基づいて、移動限界時の砂粒の運動の近似解を求め、その不安定条件より密度比の効果を含む飛砂の移動限界を導いた。導かれた移動限界は、粘性底層の影響を考慮していないため低砂粒 Reynolds 数の場合には適用できないが、砂粒 Reynolds 数が20以上のところでは飛砂のみならず流砂の移動限界に対しても理論曲線で説明することができた。

今後は、粘性底層の影響を考慮することにより、低砂粒 Reynolds 数まで移動限界を拡張する必要がある。

参 考 文 献

- 池田駿介・山坂昌成・木内国彦・高橋宏樹 (1988): 鉛直振動を受ける流体中の沈降速度, 土木学会論文集, 第383号/II-9, pp. 57~66.
- 岩垣雄一 (1956): 限界掃流力に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第41号, pp. 1~21.
- 土屋義人・河田恵昭 (1970): 飛砂における砂粒の運動機構 (I), 京大防災研究所年報, 第13号 B, pp. 1~16.
- 土屋義人・上田康裕・大下哲則 (1984): 漂砂の移動限界の理論, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 272~276.
- Nakagawa, H., I. Nezu, H. Ueda (1975): Turbulence of open channel flow over smooth and rough beds, Proc. of JSCE, No. 241, pp. 155~168.
- Tsuchiya, Y. and M. Banno: The dynamical response of sand grains to turbulence, (to be submitted).
- Wiberg, P. L. and J. D. Smith (1987): Calculation of the critical shear stress for motion of uniform and heterogeneous sediments, Water Resour. Res., Vol. 23, No. 8, pp. 1471~1480.