

標準化された方向スペクトルの推定法

磯 部 雅 彦*

1. 序 論

近年、方向スペクトルの推定に関して種々の理論が提案され(たとえば、磯部, 1985, 小舟・橋本, 1985; 橋本, 1985), 高精度で安定した推定値が得られるようになってきた。現地観測によって得られた方向スペクトルの利用目的は種々考えられるが、周波数スペクトルと同様に、多くの観測データから現地波浪の方向スペクトルの標準型を定め、それを設計等に用いるようにすることも非常に重要な用途である。その際、光易型方向関数に見られるように、数個のパラメタによって方向スペクトルの標準形を定め、そのパラメタの値について実測結果を蓄積していくのが有力なアプローチとなる。この点で、これまでの推定理論とは異なり、標準化された方向スペクトルに含まれるパラメタの値を合理的に推定するための理論を導く必要がある。

本研究においては、不規則波浪の時系列データのフーリエ係数が正規分布することに基づいて、任意の方向スペクトルの標準形に含まれるパラメタの値を、最尤法によって推定するための式を導く。そして、その結果を光易型方向関数に適用し、さらに現地観測結果に対する計算例を示す。一般的な方向スペクトルの推定と異なっており、ここでの計算結果はパラメタの値によって表されるものであり、波浪台帳のようなものに記載することも可能であるため、今後のデータの蓄積に役立つと期待される。

2. 理 論

(1) フーリエ係数の確率密度

波高計や流速計などを用い、測定地点の違いも含めて M 種類の時系列データ $\xi^{(m)}(\mathbf{x}_m, t)$ ($m=1 \sim M$, $\mathbf{x}_m$: 測定地点の座標, t : 時間) が得られているものとする。これをフーリエ級数表示し、

$$\xi^{(m)}(\mathbf{x}_m, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_{ci}^{(m)} \cos 2\pi f_i t + A_{si}^{(m)} \sin 2\pi f_i t) \quad \cdots (1)$$

と書けば、フーリエ係数 $A_{ci}^{(m)}$ および $A_{si}^{(m)}$ は平均値が

0 の正規分布となる。これ以降は周波数が f_i である第 i 成分のみに着目することにして、添字 i を省略し、 $A_c^{(m)}$ および $A_s^{(m)}$ と書く。さらにこれらをベクトル表示して、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_c \\ \mathbf{A}_s \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

と表記すれば、 $\mathbf{A}$ に対する共分散マトリックス $\mathbf{E} \Delta f$ は

$$\mathbf{E} \Delta f = [\langle \mathbf{A} \mathbf{A}^t \rangle] = \begin{bmatrix} C & Q \\ -Q & C \end{bmatrix} \Delta f \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

となる(磯部・古市, 1986)。ここに、 Δf は $\mathbf{A}$ が代表する周波数間隔、 $\langle \rangle$ は期待値を表し、 C および Q は、クロスパワースペクトル $\Phi_{mn} = C_{mn} - iQ_{mn}$ が、方向スペクトル $S(f, \theta)$ と

$$\Phi_{mn}(f) = \int_0^{2\pi} H_m(f, \theta) \bar{H}_n(f, \theta) \exp[-ik(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)] \times S(f, \theta) d\theta \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

なる関係にあることから求められる。ここに、 θ は波向、 k は波数ベクトル、 H_m は第 m 番目の測定量の水面変動からの伝達関数であり、 $\bar{}$ は共役複素数を表す。

式(3)のように共分散マトリックスがわかれば、正規分布となる $\mathbf{A}$ の結合確率密度関数 $p(\mathbf{A})$ は、

$$p(\mathbf{A}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \Delta f)^{2M} \sqrt{|\mathbf{E}|}} \exp \left[-\frac{1}{2\Delta f} \mathbf{A}^t \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} \right] \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

と書ける(Rice, 1944)。ここに、 $|\mathbf{E}|$ および $\mathbf{E}^{-1}$ は行列 $\mathbf{E}$ の行列式および逆行列を表す。

ここで、複素数を用い、

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{A}_c - i\mathbf{A}_s \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

とおくと、式(5)の右辺は $\boldsymbol{\zeta}$ によって表され、

$$p(\mathbf{A}) = \frac{1}{(2\pi \Delta f)^M |\Phi|} \exp \left[-\frac{1}{2\Delta f} \boldsymbol{\zeta}^t \Phi^{-1} \boldsymbol{\zeta} \right] \quad \cdots (7)$$

となり、マトリックスが M 次元で済む。ここに、

$$\Phi \Delta f = [\langle \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\zeta}^t \rangle / 2] = (C - iQ) \Delta f \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

であり、 $|\mathbf{E}| = |\Phi|^2$ なる関係が用いられている。

(2) 尤度の定義とその最大値

もし、方向スペクトルが与えられたものとする、式(7)の Φ は既知となり、フーリエ係数 $\mathbf{A}$ の結合確率密度関数が決まる。 $\mathbf{A}$ は測定データのフーリエ解析によって求められるものであり、得られた $\mathbf{A}$ が生ずる確率密

度がいくつであつたかが式(7)によってわかる。

長時間のデータをいくつか分割したり、あるいは近接した周波数範囲を考えると、複数の A の組み合わせ $A^{[j]}$ ($j=1\sim J$) が得られるが、これらが同時に起こることの確率密度関数はそれぞれの積として表される。その $(1/J)$ 乗をとると、

$$L(A^{[j]}; \Phi) = \{p(A^{[1]}) \times p(A^{[2]}) \times \dots \times p(A^{[J]})\}^{1/J} \\ = \frac{1}{(2\pi \Delta f)^M |\Phi|} \exp \left[- \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \Phi_{mn}^{-1} \hat{\Phi}_{nm} \right] \quad (9)$$

である。ここに、

$$\hat{\Phi}_{nm} = \frac{1}{2J\Delta f} \sum_{j=1}^J \zeta_n^{[j]} \zeta_m^{[j]} \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。 $\hat{\Phi}_{nm}$ はペリオドグラムに矩形フィルターをかけたものに他ならず、スペクトル解析においてパワースペクトルまたはクロススペクトルに対応するものである。

式(9)による値は、与えられた Φ に対して、 $A^{[j]}$ ($j=1\sim J$) が同時に起こることの“起こりやすさ”を示すものであり、尤度に他ならない。実際には、 $A^{[j]}$ は測定データから与えられるが、 Φ は未知である。そこで、起こりやすさが最大になるように Φ を決定しようというのが最尤法の考え方である。

L の最大値を与える Φ を求めるためには、式(9)を Φ のそれぞれの成分 Φ_{kl} ($k, l=1\sim M$) で偏微分したものを0とすればよい。行列に関する定理より、 Φ の余因子行列を ϕ とすれば、

$$|\Phi| = \sum_{k'=1}^M \phi_{ik'} \Phi_{k'l}, \quad \Phi_{mn}^{-1} = \frac{\phi_{mn}}{|\Phi|} \quad \dots\dots (11), (12)$$

であるから、

$$\frac{\partial |\Phi|}{\partial \Phi_{kl}} = \phi_{lk} = |\Phi| \Phi_{lk}^{-1} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial \Phi_{mn}^{-1}}{\partial \Phi_{kl}} = -\Phi_{ln}^{-1} \Phi_{km}^{-1} \quad \dots\dots\dots (14)$$

を得る。これを用いれば、式(9)の偏微分は、

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{kl}} = L \times \left\{ -\Phi_{lk}^{-1} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \Phi_{ln}^{-1} \hat{\Phi}_{nm} \Phi_{mk}^{-1} \right\} \quad (15)$$

となる。これが0となるためには、 $\{ \} = 0$ であり、これより、

$$\Phi_{nm} = \hat{\Phi}_{nm} \quad \dots\dots\dots (16)$$

を得る。また、このとき

$$L_{\max} = e^{-M/\{(2\pi \Delta f)^M |\Phi|\}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。式(16)は、クロス・パワースペクトル Φ_{nm} を、ペリオドグラムにフィルターをかけたもの $\hat{\Phi}_{nm}$ と一致させるべきことを示している。

(3) 最尤法による方向スペクトルパラメタの推定

(2) では、 Φ_{kl} ($k, l=1\sim M$) のそれぞれが独立に変化するものとして、尤度の最大値を求めた。しかし、光易型方向関数を用いる場合のように、方向スペクトルを数個のパラメタで記述される標準的なものに限定してし

まうと、 Φ の各成分は独立に変化しなくなる。すなわち、方向スペクトルの標準形に含まれる I 個のパラメタを一般的に λ_i ($i=1\sim I$) と書くと、方向スペクトルとクロスパワースペクトルの関係式(4)を通じて、 Φ_{nm} は λ_i の関数となり、 $\Phi_{nm}(\lambda_i)$ と書ける。そこで、 λ_i の値を最尤法によって決定するためには、式(9)を λ_i で微分して0とおけばよい。

式(9)を λ_i で微分するために、合成関数の微分公式を用いることにすれば、

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \frac{\partial L}{\partial \Phi_{kl}} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \lambda_i} \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。これに式(15)を代入し、 $L \neq 0$ を考慮すれば、この値が0となるためには、

$$\sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\Phi_{lk}^{-1} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \Phi_{ln}^{-1} \hat{\Phi}_{nm} \Phi_{mk}^{-1} \right\} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

を得る。これが $i=1\sim I$ に対して成り立つように、 λ_i ($i=1\sim I$) を決定すれば、 λ_i の最尤推定値が得られ、方向スペクトルが推定される。

λ_i が決定されると、それに対する尤度 $\hat{L}_{\max}$ が計算される。標準形方向スペクトルに限定せずに、クロス・パワースペクトルを独立に変化させた場合の最大尤度 $L_{\max}$ は式(17)で与えられているので、これらの比 $\hat{L}_{\max}/L_{\max}$ を求めることにより、標準形方向スペクトルの適合度を知ることができるのが、この方法の特徴である。

ここで用いた最尤法の考え方は、橋本(1987)でも用いられているものである。しかし、ここではフーリエ係数が互いに相関を持って正規分布することに基づいているのに対し、橋本はクロス・パワースペクトルが独立に正規分布すると仮定している。前者は中心極限定理に基づく理論的根拠が与えられるものであり、特にほぼ同一地点における水面変動のデータが含まれているような場合に、それらの相関が考慮されるなどの合理性がある。

実際の数値計算では、ニュートン法を用いて式(19)の解を求めればよい。式(19)の左辺を

$$f_i(\lambda_i) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\Phi_{lk}^{-1} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \Phi_{ln}^{-1} \hat{\Phi}_{nm} \Phi_{mk}^{-1} \right\} \\ \times \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \lambda_i} \quad \dots\dots\dots (20)$$

とおけば、

$$\frac{\partial f_i}{\partial \lambda_i} = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\Phi_{lk}^{-1} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \Phi_{ln}^{-1} \hat{\Phi}_{nm} \Phi_{mk}^{-1} \right\} \\ \times \frac{\partial^2 \Phi_{kl}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_i} + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \left[-\Phi_{lk}^{-1} \Phi_{ln}^{-1} \right. \\ \left. + \left\{ \Phi_{lk}^{-1}, \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \Phi_{ln}^{-1} \hat{\Phi}_{nm} \Phi_{mk}^{-1} \right\} \right. \\ \left. + \Phi_{lk}^{-1} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \Phi_{ln}^{-1} \hat{\Phi}_{nm} \Phi_{mk}^{-1} \right\} \left. \right]$$

$$\times \frac{\partial \Phi_{k'l'}}{\partial \lambda_{i'}} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \lambda_i} \dots (21)$$

である。これより、 j 回目の繰返し計算での値 $\lambda_i^{(j)}$ から $(j+1)$ 回目の値 $\lambda_i^{(j+1)}$ を求めるには、

$$\lambda_i^{(j+1)} = \lambda_i^{(j)} - \frac{\sum_{i'=1}^I \left[\frac{\partial f_i}{\partial \lambda_{i'}} \right]^{-1} f_{i'}}{\lambda_i^{(j)}} \dots (22)$$

とし、収束するまで計算を行う。

(4) 光易形方向関数への適用

光易型方向関数を用いた方向スペクトルは

$$S(f, \theta) = P(f) \frac{2^{2s+1} \Gamma^2(s+1)}{\pi \Gamma(2s+1)} \cos \left[\frac{\theta - \theta_0}{2} \right]^{2s} \quad (23)$$

と表される。ここに、 $P(f)$ は周波数スペクトルであり、 Γ はガンマ関数を表す。ある周波数 f に対して、方向スペクトル $S(f, \theta)$ を推定する場合、未知の値は P, θ_0, s の3つであり、これらがそれぞれ λ_1, λ_2 および λ_3 となる。

ここでは、同一地点において水面変動 η 、水面2成分水粒子速度 u および v を測定した場合を例にとって、提案した方法の具体的な適用法を述べる。 $\xi^{(1)} = \eta$, $\xi^{(2)} = u$, $\xi^{(3)} = v$ とおけば、クロスパワースペクトルは、

$$\Phi_{11} = P(1 + \epsilon) \dots (24)$$

$$\Phi_{12} = PH_u m_1 \cos \theta_0 \dots (25)$$

$$\Phi_{13} = PH_u m_1 \sin \theta_0 \dots (26)$$

$$\Phi_{22} = PH_u^2 (1/2 + m_2 \cos 2\theta_0) (1 + \epsilon) \dots (27)$$

$$\Phi_{33} = PH_u^2 (1/2 - m_2 \cos 2\theta_0) (1 + \epsilon) \dots (28)$$

$$\Phi_{23} = PH_u^2 m_2 \sin 2\theta_0 \dots (29)$$

となる。ここに、

$$m_1 = s/(s+1) \dots (30)$$

$$m_2 = s(s-1)/\{2(s+1)(s+2)\} \dots (31)$$

である。 H_u は水面変動から波の進行方向の水平水粒子速度への伝達関数であり、微小振幅波理論からも得られるが、測定誤差などの影響を除くためここではパワースペクトル間の関係式

$$H_u = \sqrt{\{P_u(f) + P_v(f)\}/P_\eta(f)} \dots (32)$$

によって求める。式(24)、(27)および(28)はパワースペクトルの表示式であり、これらにはノイズ成分が混入していることを想定して $(1+\epsilon)$ 倍してある。ノイズ成分の仮定はこれだけでない。たとえばパワーが ϵP で一様分布するような方向スペクトル成分によるものであると仮定し、 $(1+\epsilon)$ 倍するかわりに、 η のパワースペクトルに ϵP 、 u と v のパワースペクトルに $\epsilon PH_u^2/2$ を加えた表示式とする可能性もある。いずれがよいかは、適合度 $\hat{L}_{\max}/L_{\max}$ の大きさによって判定すべきものである。いずれにしても、4番目のパラメタ λ_4 として ϵ をとり、これも変化させて最尤推定を行う。

式(24)~(29)において、 λ_i ($\lambda_1 = P, \lambda_2 = \theta_0, \lambda_3 = s, \lambda_4 = \epsilon$) に関する2階までの微分を求めることは容易である。

これらを式(20)および(21)に代入すれば、式(22)の右辺が求まるから、 λ_i の補正値が決定される。そこで、 λ_i ($i = 1 \sim 4$) の初期値をそれぞれ、 η のパワースペクトル、平均波向、long-crestedness パラメタ γ から逆算される s 、および0として、繰返し計算を行うことにした。

実際に数値計算を行ったところ、厳密なニュートン法のアプローチでは発散する場合が見られた。そこで、ニュートン法によって補正された λ_i の新しい値に対する尤度が、古い値よりも小さくなった場合には、補正量を半分にして計算をしないおとした。また、10回の繰返し計算によって収束しない場合には、その後は式(21)の第1項である Φ の2階微分項を無視した。これらの修正を行ったところ、すべてのケースで計算は収束した。

3. 適用例

(1) 現地観測

解析に用いたデータは3回の異なる現地観測によって、超音波波高計および電磁流速計(水圧計内蔵)を用いて得られたものである。第1回および第2回は1987年10月1~2日および1988年8月29~30日に茨城県大洗で行われ、約17分のデータが連続的に95回および75回記録された。第3回は1989年1月11~18日に新潟県大潟で行われ、約17分のデータが1時間ごとに134回記録された。表-1に観測ごとの地点別平均波浪特性を示す。

表-1 地点別の平均波浪特性

観測名	地点番号	h (m)	$H_{1/3}$ (m)	$T_{1/3}$ (s)	θ_m	γ
OA87	0	12.5	0.63	6.3	174	0.61
	1	13.2	1.09	7.4	165	0.43
OA88	2	12.1	—	—	—	—
	3	10.9	1.04	7.5	175	0.40
	4	7.3	1.02	7.6	-179	0.33
OG89	1*	25.0	1.67	6.8	-77	0.44
	2	15.3	1.31	6.5	-51	0.42
	3	11.3	1.19	6.2	-50	0.40

h : 水深, $H_{1/3}$: 有義波高, $T_{1/3}$: 有義波周期,

θ_m : 平均波向(東向を基準として北回正)

γ : long-crestedness パラメタ

* OG89-1の有効観測回数: 66回

(2) 方向スペクトルの推定結果

本手法の適用に際し、まずノイズ成分の仮定の妥当性について検討した。図-1は、データOA88-1に対してノイズ成分の仮定を3通りに変えて行った計算結果について、全観測回数の平均値をプロットしたものである。上段から順に、周波数スペクトル $P(f)$ 、ピーク波向 θ_0 、光易のパラメタ s 、および適合度 $\hat{L}_{\max}/L_{\max}$ に対する

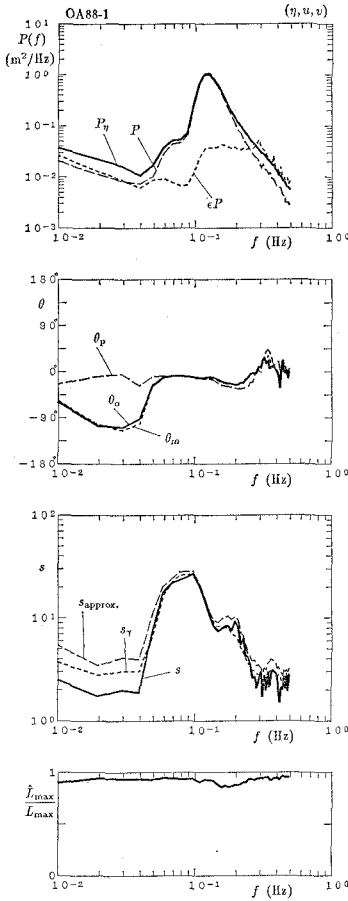


図-1 方向スペクトルの推定値に対するノイズ成分の仮定の影響

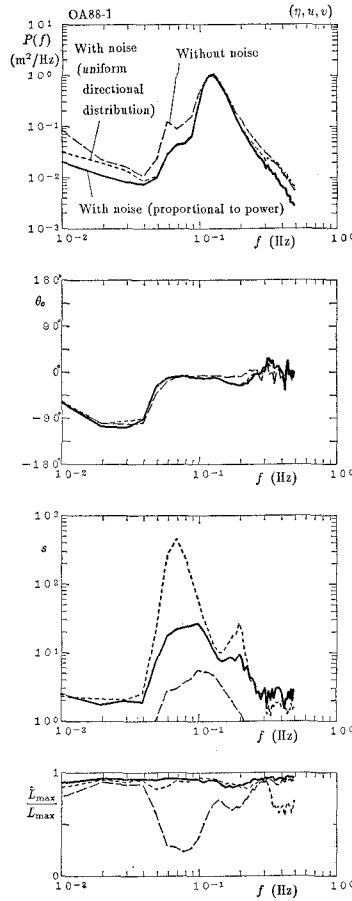


図-2 方向スペクトルの推定結果(1)

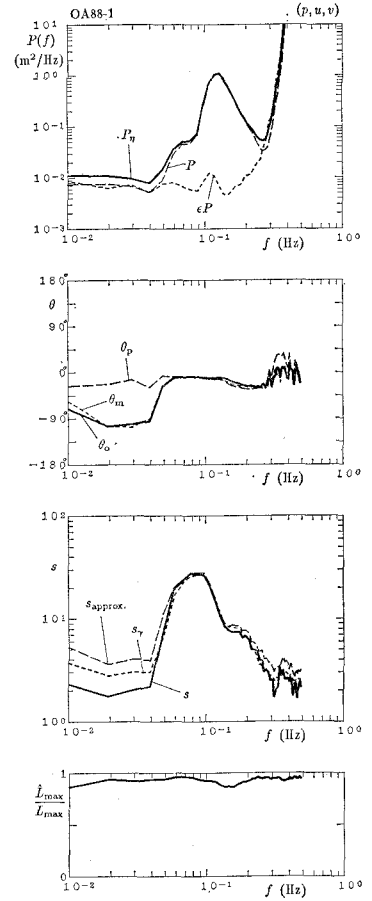


図-3 方向スペクトルの推定結果(2)

図である。実線は式(24), (27) および (28) のごとくパワースペクトルに比例したノイズを仮定した結果、点線はノイズを一様分布の方向スペクトル成分と仮定した結果、および破線はノイズを考慮しなかった結果を示す。ノイズを考慮しないと適合度が悪い。ノイズを考慮した2種類の適合度はほぼ同じで、やや実線の値が大きい。両者による s の推定値には大きな差があるが、水深の減少によって s が徐々に増加するのが実線であったので、ここでは実線を与える仮定、すなわち式(24), (28) および (29) が妥当であると判断した。

図-2~5 において、第1段目の図中、 P は周波数スペクトルの推定値、 εP はノイズ成分の推定値、および P_η は水面変動のパワースペクトルを示す。第2段目の図中、 θ_0 はピーク波向の推定値、 θ_m は平均波向、 θ_p は主波向である。第3段目の図中、 s は光易パラメタの推定値、 s_η は周波数ごとに定義された long-crestedness パラメタ γ

$$\gamma^2 = \frac{\hat{\phi}_{20} + \hat{\phi}_{02} - \sqrt{(\hat{\phi}_{20} - \hat{\phi}_{02})^2 + 4\hat{\phi}_{11}^2}}{\hat{\phi}_{20} + \hat{\phi}_{02} + \sqrt{(\hat{\phi}_{20} - \hat{\phi}_{02})^2 + 4\hat{\phi}_{11}^2}} \quad \dots\dots\dots (33)$$

と関係式

$$\gamma^2 = (2s+1)/(s^2+s+1) \quad \dots\dots\dots (34)$$

から求めた s の値、 $s_{\text{approx.}}$ は理論的考察と数値シミュレーションにより求めた近似式によるものである。これは、

$$(1 - \gamma^2/\gamma'^2) = \alpha \{ \sin^2 2\theta_m / (4 - 2 \sin^2 2\theta_m) \} (1 - \gamma'^2/\gamma^2) \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\alpha = 0.859 - 0.174\gamma^2 - 0.104 \sin^2 2\theta_m \quad \dots\dots\dots (36)$$

によって γ の補正値を求め、その値を式(34)の γ に用いて s を計算するものである。ここに、 γ' は

$$s/(s+1) = \sqrt{(\hat{\phi}_{10}^2 + \hat{\phi}_{01}^2) / \{\hat{\phi}_{00}(\hat{\phi}_{20} + \hat{\phi}_{02})\}} \quad \dots\dots\dots (37)$$

の関係式によって仮の s を定め、さらに式(34)によって γ を計算した値を示す。

図-3 は水面変動のかわりに水圧変動を用いた場合の結果を示すが、微小振幅波理論による伝達関数によって

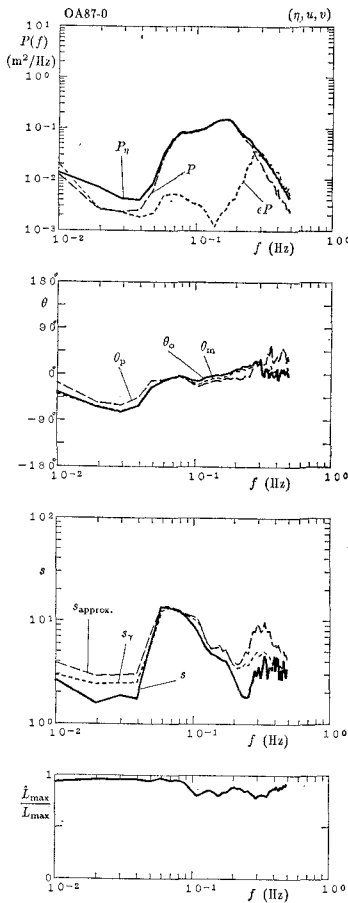


図-4 方向スペクトルの推定結果(3)

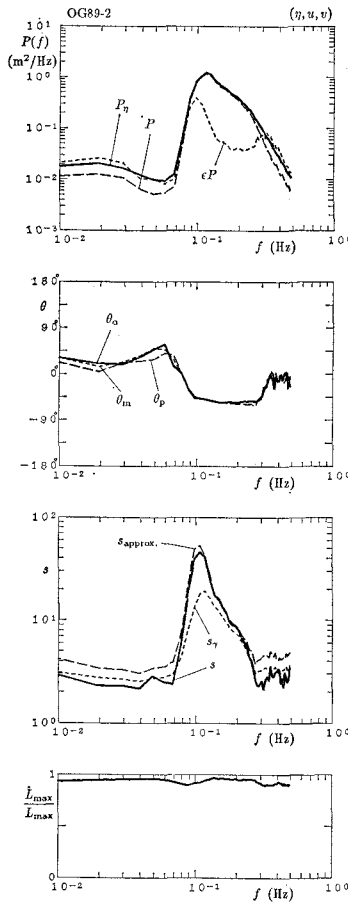


図-5 方向スペクトルの推定結果(4)

周波数スペクトルを補正すれば、高周波数側を除いて水面変動を用いた図-2 とよく一致する。

図-4 および 5 は、データ OA87-0 および OG89-2 に対する結果である。これらより、周波数スペクトルの推定値 P は水面変動のワースペクトル P_η 、ピーク波向 θ_0 は平均波向 θ_m 、光易パラメタ s は近似値 s_{approx} にほぼ一致するため、近似的にはこれらで代用してよいと言える。この代用により計算は簡略化され、大量なデータの処理が容易になる。

周波数スペクトルの特性のうち、高周波数側は-4乗則に近いようである。また、 s のピークは周波数スペクトルのピークよりやや低周波数側にあり、周波数との関数関係についても Mitsuyasu ら (1975) による提案式と

は必ずしも一致しない。この点については、さらにデータの蓄積を行って議論する必要がある。

4. 結 論

数個のパラメタによって記述される標準型方向スペクトルが与えられたとき、そのパラメタの値を最尤法に基づいて推定する一般的な方法を述べた。特に、水面変動と水平2成分水粒子速度を測定する3成分アレイを用いて、光易型方向スペクトルのパラメタを推定する問題に適用した。また、パラメタの近似値を簡便に計算する方法を導いた。波浪の方向スペクトル特性、特に光易パラメタの周波数変化については、今後のデータの蓄積が必要である。また、推定におけるノイズ成分の適切な仮定についても、今後再検討する必要がある。

なお、この研究には文部省科学研究費(総合(A), 研究代表者、京都大学防災研究所、土屋義人所長)による援助を得たことをここに記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1985): 方向スペクトルの推定理論, 海岸環境工学, 補章 A, 堀川清司(編), pp. 506~524.
- 磯部雅彦・古市耕輔 (1986): 不規則波に対する統計量の変動に関する理論的考察, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 159~163.
- 小舟浩治・橋本典明 (1985): 最大エントロピー原理(MEP)を用いた方向スペクトルの推定, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 159~163.
- 橋本典明 (1987): ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 126~130.
- Mitsuyasu, H. et al. (1975): Observation of the directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy, J. Phys. Oceanogr., Vol. 5, pp. 750~760.
- Rice, S. O. (1944): Mathematical analysis of random noise, Bell. Syst. Tech. J., Vol. 23, pp. 282~332.