

狭帯域周波数スペクトルのもとでの波高・周波数・波向の結合確率分布

水 口 優*・金子紀行**・赤井鈴子***

1. はじめに

多方向不規則波浪場の研究が進む中で、波高・周波数(周期)・波向の結合確率分布に関する理論的な研究が、権ら(1988)および赤井・水口(1988)によって行われた。ともに、波浪場が線型でスペクトルの幅が狭いという仮定の元に、三者の結合確率分布を解析的に求めているが、結果の式はかなり異なる。本論文では、まず両者の関係を理論的に明らかにする。あわせて時間スケールのパラメータとしての周波数と周期の違いについても検討する。ついで、波高と周波数、波高と波向および周波数と波向の2次元周辺分布の具体的な形状について、シミュレートした線型多方向不規則波浪の波別解析結果と両者の解析解を比較検討する。

2. 無次元化した波高・周波数(周期)・波向の結合確率分布

波浪場が線型でかつスペクトルの幅が狭いという仮定の元に、権ら(1988)が最終的に導いた、無次元化した波高・周期・波向の結合確率分布は、

$$P(x, \tau, \alpha) = |M_0|^2 / 2^3 \cdot \bar{\sigma} \cdot m_1^{1.5} \times (a_{22} a_{33} a_{44} - a_{23} a_{34}^2 - a_{33} a_{24}^2 - a_{44} a_{23}^2 + 2 a_{23} a_{24} a_{34})^{-0.5} \\ \times x^2 / \tau^2 \exp \left[-\pi m_0 / (4 |M_0|^2) \cdot x^2 \right. \\ \left. \cdot \{ a_{11} + a_{44} \bar{\sigma}^2 (1 - 1/\tau)^2 + 2 a_{14} \bar{\sigma} (1 - 1/\tau) \} \right] \\ \times [1 / (2A) + B' \sqrt{\pi} / (2A^{1.5}) \exp \{ B'^2 / (4A) \} \\ \cdot \{ (1 - P_r(-B' / \sqrt{2A})) \}] \dots\dots\dots (1)$$

である。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{T}{\bar{T}} = \frac{2\pi}{(2\pi\bar{f} - \delta)} \times \frac{m_1}{m_0} \\ x &= \frac{H}{\bar{H}} = \frac{2R}{(2\pi m_0)^{1/2}} \\ A &= 1 / (2 |M_0|^2) \times (a_{22} \cos^2 \alpha + a_{33} \sin^2 \alpha + 2 a_{23} \cos \alpha \sin \alpha) \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} B' &= - (2\pi m_0)^{0.5} / (2 |M_0|^2) \cdot x \cdot \{ a_{12} \cos \alpha + a_{13} \sin \alpha + a_{24} \bar{\sigma} (1 - 1/\tau) \cos \alpha + a_{34} \bar{\sigma} (1 - 1/\tau) \sin \alpha \} \\ \bar{\sigma} &= 2\pi \cdot m_1 / m_0 \end{aligned} \right\}$$

とする。 $a_{i,j}$ (ただし、 $i, j=1, 2, 3, 4$) は、水位、水位の時間微分、水平流速の2成分の間の共分散行列の逆行列の要素である。なお、その他の共分散は、定義により0になる。

一方、同様の仮定の元に、赤井・水口(1988)が導いた波高・周波数・波向の結合確率分布を無次元化すると次式となる。

$$p(N_p, \alpha, F) = \frac{c_0 \cdot N_p^2}{(2\pi)^{3/2} \cdot \gamma \cdot \nu} \exp \left\{ -\frac{1}{2} N_p^2 \frac{1}{\nu^2} (F-1)^2 \right\} \\ \times \left[\frac{\sqrt{A}}{A} \exp \left(-\frac{1}{2A} N_p^2 \right) + \frac{B}{A^{3/2}} N_p \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{BN_p}{\sqrt{A}} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{C}{A} N_p^2 \right\} \right] \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} N_p &= \eta_p / \sqrt{m_{00}} \\ \nu &= \sqrt{m_0 m_2 / m_1^2 - 1} \\ F &= f / \bar{f} \\ f &= m_1 / m_0 \\ A &= (1 - r_{01}^2) \cos^2 \alpha + (1 - r_{10}^2) \sin^2 \alpha + 2 r_{10} r_{01} \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\gamma} \\ B &= r_{10} \cos \alpha + r_{01} \frac{\sin \alpha}{\gamma} \\ C &= \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} \\ \gamma &= \sqrt{m_{02} / m_{20}} \\ r_{01} &= m_{01} / \sqrt{m_{00} m_{02}} \\ r_{10} &= m_{10} / \sqrt{m_{00} m_{20}} \\ A &= 1 - r_{01}^2 - r_{10}^2 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

とする。(1)式、(3)式中の記号の詳しい説明はそれぞれの論文を参照されたい。

* 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科
 ** 中央大学学生 (現新都市建設公社)
 *** 正会員 工修 大成建設(株) 技術研究所

両式の違いはまず、時間スケールのパラメータとして (1) 式では、周期を、(3) 式では、周波数を用いていることである。Longuet-Higgins (1983) が導入した $T=2\pi/(2\pi\bar{f}+\gamma)$ という周波数を周期に変換する式を用いると、平均周波数 $\bar{f}$ は存在するにも関わらず、平均周期 $\bar{T}$ は無限大となる (赤井・水口, 1988)。ただし、(3) 式においても $\bar{f}^n (n \geq 2)$ は存在しない。それは、スペクトルの幅が狭いという仮定のもとに、 $f \rightarrow \infty$ まで積分するという矛盾のためである。その意味では $\bar{f}$ が存在して $\bar{T}$ が存在しないというのも程度問題であるが、また、図-1 に示す周波数スペクトルの幅の広さを示すパラメータ ν と代表周期と代表周波数の積の関係からも明かなように、 ν が大きくなるにしたがって $\bar{T} \cdot \bar{f}$ の値は 1 から遠くなる。これらのことから、スペクトルの幅が狭いときは、 T, f のどちらを用いても良いものの、スペクトルの幅が広いときには両者の差は無視できないと言えよう。ここでは、理論的に好都合な f を、無理して T に変換する必要はないと考える。

両式の本質的な違いは、結合確率分布を誘導する出発点において、(3) 式では水位の時間微分と水平流速の共分散である次の量が無視されている点である。

$$\left. \begin{aligned} m_{10}^* &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi 2\pi B(f) (f - \bar{f}) \cos \theta S(f, \theta) d\theta df \\ m_{01}^* &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi 2\pi B(f) (f - \bar{f}) \sin \theta S(f, \theta) d\theta df \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $B(f)$ は水位と水平流速との間の微小振幅理論に基づく伝達関数、 $S(f, \theta)$ は、方向スペクトルである。これらの量および水位の時間微分の自己分散 m_{00}^* は、スペクトルの幅が狭いときには他の共分散の値に比して無視できるほどに小さくなる。スペクトルの幅が狭いということは、

$$\left. \begin{aligned} m_{10}^* &\sim 2\pi B(\bar{f}) \cos \bar{\theta} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi (f - \bar{f}) S(f, \theta) d\theta df = 0 \\ m_{01}^* &\sim 2\pi B(\bar{f}) \sin \bar{\theta} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi (f - \bar{f}) S(f, \theta) d\theta df = 0 \\ m_{00}^* &\sim (2\pi)^2 \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi (f - \bar{f})^2 S(f, \theta) d\theta df \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

である。なお、 m_{00}^* もスペクトルの幅が狭いときには小さな量となるが、 $\nu \rightarrow 0$ という狭帯域の極限では m_{10}^*, m_{01}^* よりオーダー的に大きな量となる。問題は、 m_{10}^*, m_{01}^* という量を考慮することが包絡線関数を仮定できるほどにスペクトルの幅が狭い場合にも意味があるか否かである。(1) 式は、明らかに $\bar{f}$ に関して対称でなく、波向に関して積分したときに Longuet-Higgins (1975) が求めた波高と周波数の結合確率分布とは一致しない。また、周波数に関して積分したとき、波高と波向の結合確率分布はスペクトル幅パラメータ ν による形となり、磯

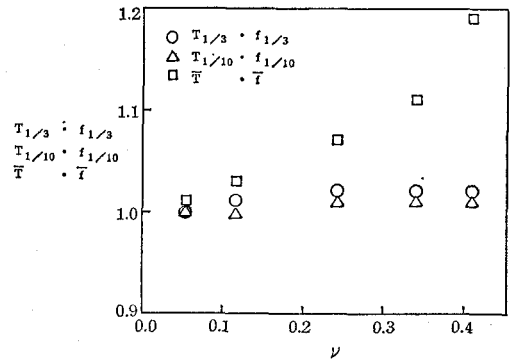


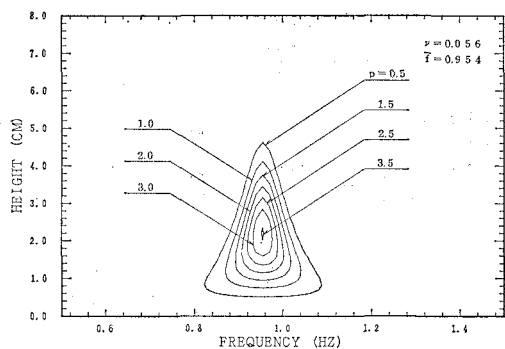
図-1 代表周波数と代表周期の関係

部 (1987) が求めた波高と波向の結合確率分布とも一致しない。これらのことから m_{10}^*, m_{01}^* の二つの量を考慮するのは包絡線関数を導入する際のスペクトルの幅が狭いという仮定と矛盾していると判断される。なお、(1) 式において、 $m_{10}^* = m_{01}^* = 0$ と置けば (3) 式に一致する。一方、(3) 式を波向について積分すれば Longuet-Higgins (1975) のものに一致することは数値的に、また周波数について積分すれば磯部 (1987) のものに一致することは解析的に、既に明らかにされている (赤井・水口, 1988)。

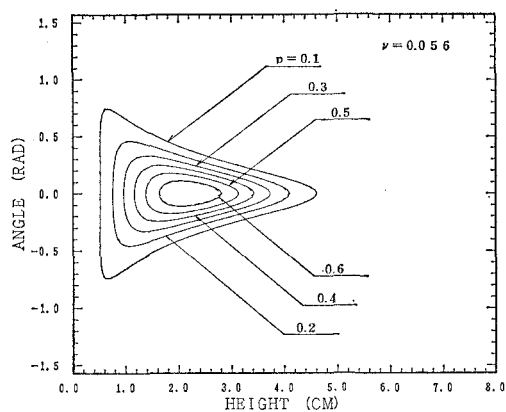
3. 2次元周辺分布形状の比較

次に、Bretschneider-光易型スペクトルにおいて、その周波数の低周波数側と高周波数側を切り、 ν の値を 0.056 ($0.95 < f/f_p < 1.05$), ただし、 f_p はピーク周波数), 0.241 ($0.7 < f/f_p < 2.0$), 0.414 ($0.1 < f/f_p < 12.0$) と変え、方向分布関数としては、 $\cos^{2s}(\theta/2)$ 型を与え、(1) 式、(3) 式から求められる 3 種類の 2 次元周辺分布の具体的な形状を計算し比較した。さらに両式の相違が最も顕著に形状に現れる $\nu = 0.414$ のケースについて、シミュレートした線型多方向不規則波浪の波別解析結果とも比較した。両式はともに、誘導の出発点において波浪場が線型でかつスペクトルの幅が狭いという仮定をしているので、少なくとも線型という仮定を満たすシミュレート波浪を比較対象に選んだ。なお、シミュレート波浪の作成条件および方法は、赤井・水口 (1988) と同じである。

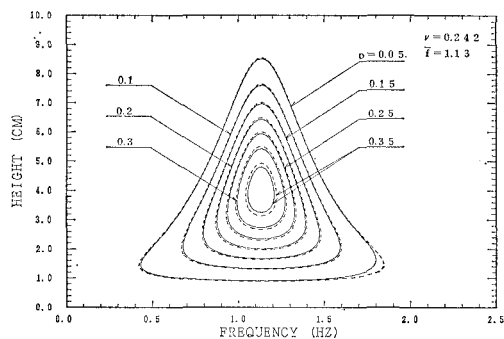
図-2 は、両式から求められる波高と周波数の二次元周辺分布形状を、図-3 は、 ν が一番大きいケースのそれらの周辺分布とシミュレートした波浪の波別解析結果とを比較したものである。同様に、図-4 は、波高と波向の二次元周辺分布形状を、図-5 は、 ν が大きいケースの周辺分布とシミュレート結果とを比較したものである。さらに、図-6 は、波向と周波数の二次元周辺分布形状を、図-7 は、 ν が大きいケースの周辺分布とシミュレート結果とを比較したものである。図中の実線は (1) 式から、点線は (3) 式から求めたものである。図-3、



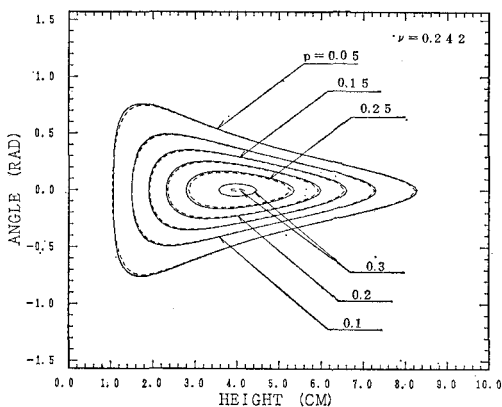
(a)



(a)



(b)

図-2 波高と周波数の結合確率分布
(解析解相互の比較)

(b)

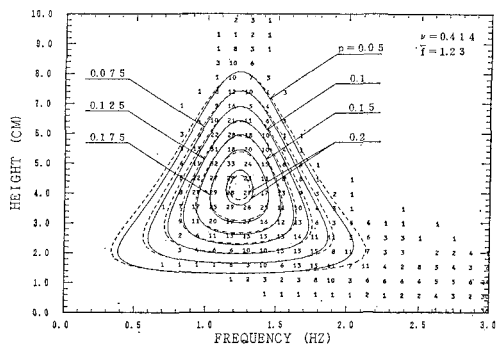
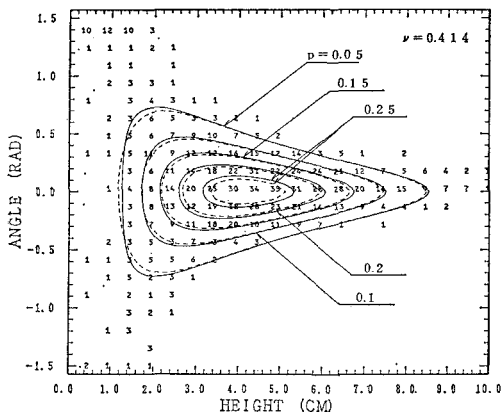
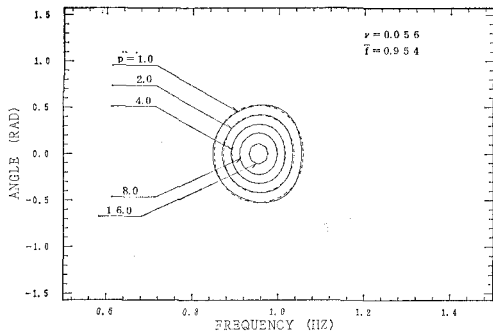
図-4 波高と波向の結合確率分布
(解析解相互の比較)図-3 波高と周波数の結合確率分布
(シミュレート結果と解析解の比較)図-5 波高と波向の結合確率分布
(シミュレート結果と解析解の比較)

図-5, 図-7中にプロットされた数字は, シミュレート波浪の確率密度を百分率で表わしたものである。

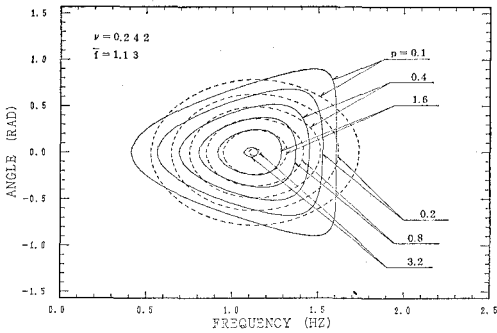
$\nu=0.056$ とスペクトルの幅が狭いケースでは, (1)式および (3) 式で表わされる三種類の二次元周辺分布形状は, 互いにはほぼ一致するものの, 周波数と波向の組合せは他の周辺分布に比して一致度が劣る (図-2(a), 4(a), 6(a))。

ν が大きくなると, 波高と周波数の分布形状においては, (3)式によるものは ν の大きさに関係なく $\bar{T}$ に関して対称形になるのに対して, (1) 式によるものは, わず

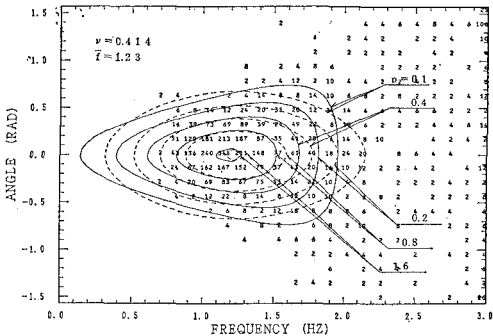
かながらも波高が小さく周波数の大きい所で確率密度が減るという非対称性を示す (図-2, 3)。この非対称性は, ν が大きいときのシミュレートした波浪の波別解析結果 (およびこれまでの現地観測の結果) である波高の



(a)



(b)

 図—6 波向と周波数の結合確率分布
(解析解同士の比較)

 図—7 波向と周波数の結合確率分布
(シミュレート結果と解析解の比較)

小さい波は、周期も短い(周波数が高い)という傾向とは逆である(図—3)。なお、いずれにしても ν が大きいケースは、シミュレート波浪においては、波高のより大きい波が現れることも含めて、両式とも一致度は劣る。権ら(1988)において、現地観測結果と(1)式による波高と周期の周辺分布がよく一致しているのは、既に述べた f から T への変換式の特性的ためである。ただし、この

変換式もスペクトルの幅が狭いという仮定とは相いれない($f=\bar{f}$ の近くしか使えない)ものである。

次に、波高と波向の分布形状においては、(3)式によるものはスペクトルの幅が狭いという制限を受けないのに対して(赤井・水口, 1988), (1)式によるものは、 ν が大きくなると平均波向近傍の波高の小さい所で確率密度が減り、平均波向から離れたところでの確率密度が増えるという傾向を示す(図—4, 5)。しかし、両式の間の違いはわずかで、どちらもシミュレート結果に合っていると言える(図—5)。

最後に、波向と周波数の分布形状において、(3)式によるものは ν の値に関係なく、 $\bar{f}$ に関して対称であるのに対して、(1)式によるものは、 ν が大きくなるにしたがって $\bar{f}$ に関して非対称で、平均波向近傍の周波数の低いところで密度が高く、平均波向近傍の周波数の高いところでの密度が低いという傾向を示す(図—6, 7)。この場合は、シミュレート結果においては、周波数の小さい波が減って、かなり高周波数のそれも方向性の広い範囲での波が増えているが、それと比較しての両式の妥当性の優劣は明かでない(図—7)。

以上、数値的に、(1)式、(3)式およびシミュレーション結果を比較検討してきたが、両式ともシミュレーション結果との比較という点ではさほど差はないということである。

4. おわりに

本論文の主要な結論は次のとおりである。

多方向不規則波浪の波別解析においてスペクトルの幅が狭いときの、波高・周波数・波向の結合確率分布の解析解は、(3)式によるものが式も簡単な上に合理的でもある。

参 考 文 献

- 赤井鈴子・水口 優 (1988): 多方向不規則波浪における波高・周波数・波向の結合確率分布, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 143-147.
- 磯部雅彦 (1987): 多方向不規則波の波別解析法に関する理論的考察, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 111-115.
- 権 正坤・石本晴義・榎木 亨・出口一郎 (1988): 波高、周期及び波向の結合確率分布, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 148-152.
- Longuet-Higgins, M. S. (1975): On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves, J. G. R., 80, 2688-2694.
- Longuet-Higgins, M. S. (1983): On the joint distribution of wave periods and amplitudes in random wave field, Proc. R. Soc. Lond., A389, 241-258.