

波向の定義に着目した多方向不規則波浪の波別解析法の検討

中西 浩和*・磯部 雅彦**・渡辺 晃***

1. 序 論

多方向不規則波浪を記述する方法としては、方向スペクトルを用いるものと、波向の分布に着目した波別解析によるものと大別できる。前者に関しては応用も含めて様々な研究が行われてきている。一方、後者に関してはスペクトル解析における平均波向と同様に個々波の波向を定義した際の、波高と波向などの結合確率分布(磯部, 1987), あるいは周期を含んだ分布(赤井・水口, 1988; 樫ら, 1988)が理論的に導かれている。これは波峰通過時の水平水粒子速度の方向を波向と定義するもので、砕波条件などへの応用が期待できる。この他に個々波の波向として主波向的な定義も考えられる。つまり、水面変動とは無関係に、水平流速が最大となる方向を波向とするものであり、漂砂移動や海中構造物に作用する波力の問題へと応用されよう。しかし、現在のところ、こちらの主波向的な定義を用いた議論は行われておらず、理論の応用を考える前に波向の定義に関連した検討を行う必要がある。

そこで、本研究においては主波向的な定義を用いて個々波の波高と波向、最大流速と波向、波高と周期と波向、等の結合確率分布を新たに導く。また現地観測を行い、得られた結果の妥当性について検証し、さらに波向の定義の違いによる結合確率分布の特性の違いについて考察を加える。なお、本研究では、波浪の周波数スペクトルが狭帯であると仮定し、包絡線関数を用いた誘導を行う。また、非線形性については考慮していない。

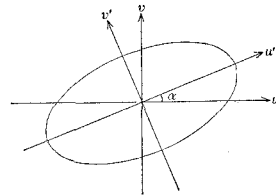
2. 理論式の誘導

(1) 波向の定義と変数の変換

まず、水平2成分水粒子速度を用いて、個々波の波向を定義する。水平2成分水粒子速度 (u, v) はそれぞれの包絡線関数 u_c, u_s, v_c, v_s を用いて、

$$u = u_c \cos \bar{\omega} t + u_s \sin \bar{\omega} t \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$v = v_c \cos \bar{\omega} t + v_s \sin \bar{\omega} t \quad \dots\dots\dots (2)$$



図—1 水平水粒子速度と波向の定義

と表される。ここに、 $\bar{\omega}$ は平均角周波数、 t は時間である。狭帯域スペクトルの仮定から u_c, u_s, v_c, v_s は非常に緩やかに変化するので、一周の間ではほぼ一定であると考えてよく、その結果 (u, v) は橢円軌道を描くことになる。ここで、座標軸が図—1のように橢円の長・短軸方向と一致するように α だけ回転させ、この新しい座標系における水平粒子速度を (u', v') とすると

$$u' = u \cos \alpha + v \sin \alpha \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$v' = -u \sin \alpha + v \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。これらに式(1)および(2)を代入し、橢円の長軸、短軸方向の振幅をそれぞれ $\hat{u}', \hat{v}'$ とすると

$$u' = \hat{u}' \cos(\bar{\omega} t - \delta_1) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$v' = \hat{v}' \sin(\bar{\omega} t - \delta_2) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\hat{u}' = \sqrt{(u_c \cos \alpha + v_c \sin \alpha)^2 + (u_s \cos \alpha + v_s \sin \alpha)^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\hat{v}' = \sqrt{(-u_c \sin \alpha + v_c \cos \alpha)^2 + (-u_s \sin \alpha + v_s \cos \alpha)^2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\delta_1 = \tan^{-1} \frac{u_s \cos \alpha + v_s \sin \alpha}{u_c \cos \alpha + v_c \sin \alpha} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\delta_2 = \tan^{-1} \frac{u_c \sin \alpha - v_c \cos \alpha}{-u_s \sin \alpha + v_s \cos \alpha} \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここに δ_1, δ_2 は位相角で、新しい座標軸が橢円の長・短軸と一致するためには、 $\delta_1 = \delta_2 (= \delta')$ であることから波向角 α は次のように決定される。

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2(u_c v_c + u_s v_s)}{(u_c^2 + u_s^2) - (v_c^2 + v_s^2)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

また橢円の長・短軸方向の振幅 $u_{\max}, v_{\max}$ は

$$u_{\max} = \sqrt{(u_c \cos \alpha + v_c \sin \alpha)^2 + (u_s \cos \alpha + v_s \sin \alpha)^2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

* 正会員 工修 中部電力株式会社

** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

$$v_{\max} = \sqrt{(u_o \sin \alpha - v_o \cos \alpha)^2 + (u_s \sin \alpha - v_s \cos \alpha)^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

であり、以上から4つの包絡線関数 u_o , u_s , v_o , v_s は振幅 $u_{\max}$, $v_{\max}$, 波向 α および位相角 δ' を用いて

$$u_o = u_{\max} \cos \alpha \cos \delta' + v_{\max} \sin \alpha \sin \delta' \quad \dots\dots (14)$$

$$u_s = u_{\max} \cos \alpha \sin \delta' - v_{\max} \sin \alpha \cos \delta' \quad \dots\dots (15)$$

$$v_o = u_{\max} \sin \alpha \cos \delta' - v_{\max} \cos \alpha \sin \delta' \quad \dots\dots (16)$$

$$v_s = u_{\max} \sin \alpha \sin \delta' + v_{\max} \cos \alpha \cos \delta' \quad \dots\dots (17)$$

と表される。

(2) 水平流速と波向の結合分布

ここでの主波向的な波向の定義には水面変動を必要としない。水平2成分水粒子速度の4つの包絡線関数の結合確率密度関数は、 x 軸を主波向の方向にとれば、次式で与えられる。

$$p(u_o, v_o, u_s, v_s) = \frac{1}{(2\pi)^2 m_{02} m_{20}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u_o^2 + v_o^2}{m_{20}} + \frac{u_s^2 + v_s^2}{m_{02}} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$m_{20} = \langle u^2 \rangle, \quad m_{02} = \langle v^2 \rangle \quad \dots\dots\dots (19), (20)$$

である。式(14)~(17)のように変数を変換し、さらに

$$U_{\max} = u_{\max} / \sqrt{m_{20}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$V_{\max} = v_{\max} / \sqrt{m_{02}} \quad \dots\dots\dots (22)$$

と無次元化を行えば、振幅 $U_{\max}$, $V_{\max}$ と波向 α の結合確率密度は

$$p(U_{\max}, V_{\max}, \alpha) = \frac{U_{\max}^2 - \gamma^2 V_{\max}^2}{2\pi\gamma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \left(\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} \right) U_{\max}^2 + (\gamma^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) V_{\max}^2 \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。ただし、 γ は long-crestedness パラメター

$$\gamma = \sqrt{m_{02}/m_{20}} \quad \dots\dots\dots (24)$$

である。 $0 \leq V_{\max} \leq U_{\max}/\gamma$ であることに注意して、式(23)を $V_{\max}$ について $0 \sim U_{\max}/\gamma$ で積分すると最終的に最大流速と波向の結合確率密度関数は

$$p(U_{\max}, \alpha) = \frac{1}{2\pi\gamma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} \right) U_{\max}^2 \right\} \times \left[\frac{\gamma}{\gamma^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} U_{\max} \times \exp \left(-\frac{\gamma^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2\gamma^2} U_{\max}^2 \right) + \sqrt{\frac{2}{\gamma^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} \times \left(U_{\max}^2 - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \right) \times \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\gamma^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2\gamma^2}} U_{\max} \right) \right] \quad \dots\dots (25)$$

で与えられ、分布を決定するのに必要なパラメターは γ のみになる。ただし erf は誤差関数で

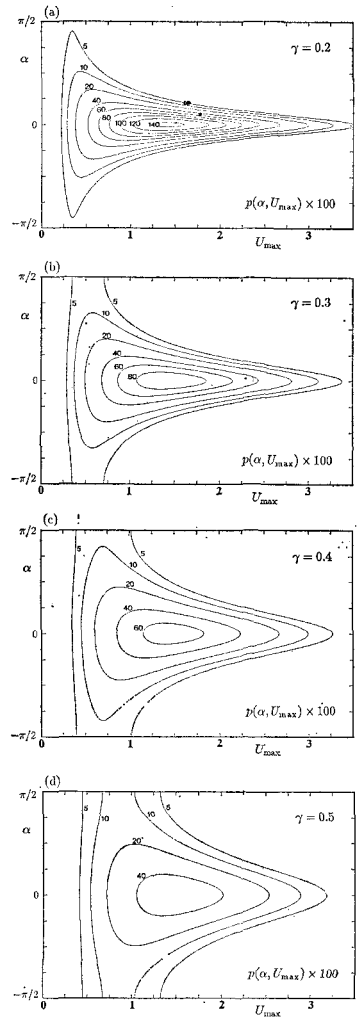


図-2 流速振幅と波向の結合確率密度

$$\operatorname{erf} x = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \dots\dots\dots (26)$$

と定義する。波向 α は $-\pi/2 \sim \pi/2$ の範囲でしか得られないので、積分値を1にするために式(25)の右辺を2倍する必要がある。図-2に種々の γ を与えたときの $p(U_{\max}, \alpha)$ のコンターを示す。

(3) 波高と波向の結合分布

波高と波向を含む結合確率を得るためには水面変動と水平2成分水粒子速度の6種の包絡線関数 ζ_o , ζ_s , u_o , u_s , v_o , v_s の結合確率密度が必要となるが、これは主波向を x 軸にとると

$$p(\zeta_o, u_o, v_o, \zeta_s, u_s, v_s) = \frac{1}{(2\pi)^3 m_{00} m_{02} m_{20} \Delta} \times \exp \left[-\frac{1}{2\Delta} \left\{ \frac{\zeta_o^2 + \zeta_s^2}{m_{00}} + (1 - \gamma_{01}^2) \frac{u_o^2 + u_s^2}{m_{20}} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + (1-r_{10}^2) \frac{v_c^2 + v_s^2}{m_{02}} - 2r_{10} \frac{\zeta_c u_c + \zeta_s u_s}{\sqrt{m_{00} m_{20}}} \\
 & - 2r_{01} \frac{\zeta_c v_c + \zeta_s v_s}{\sqrt{m_{00} m_{02}}} + 2r_{10} r_{01} \frac{u_c v_c + u_s v_s}{\sqrt{m_{20} m_{02}}} \Big\} \Big] \quad \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned}$$

で与えられる。ここに、

$$D = 1 - r_{10}^2 - r_{10}^2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$r_{10} = m_{10} / \sqrt{m_{00} m_{20}}, \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$r_{01} = m_{01} / \sqrt{m_{00} m_{02}}, \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$m_{00} = \langle \zeta^2 \rangle \quad \dots\dots\dots (31)$$

である。波向 α を分布に取り入れるために式(14)~(17)によって u_c, u_s, v_c, v_s を $u_{\max}, v_{\max}, \alpha, \delta'$ に変換し、水面変動に関しては ζ_c, ζ_s を極座標表示し、振幅 ζ_p と位相 δ に変換する。

$$\zeta_p = \sqrt{\zeta_c^2 + \zeta_s^2} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$\delta = \tan^{-1}(\zeta_c / \zeta_s) \quad \dots\dots\dots (33)$$

その結果、6個の包絡線関数 $\zeta_c, \zeta_s, u_c, u_s, v_c, v_s$ を $u_{\max}, v_{\max}, \alpha, \delta', \zeta_p, \delta$ に変換したことになるが、このときヤコビアン $|J|$ は

$$|J| = (u_{\max}^2 - v_{\max}^2) \zeta_p \quad \dots\dots\dots (34)$$

である。したがって、波向 α を含む結合確率密度関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 & p(\zeta_p, \delta, u_{\max}, v_{\max}, \alpha, \delta') \\
 & = \frac{\zeta_p (u_{\max}^2 - v_{\max}^2)}{(2\pi)^3 m_{00} m_{02} m_{20} D} \\
 & \times \exp \left[-\frac{1}{2D} \left\{ \frac{\zeta_p^2}{m_{00}} \right. \right. \\
 & + \frac{1-r_{01}^2}{m_{20}} (u_{\max}^2 \cos^2 \alpha + v_{\max}^2 \sin^2 \alpha) \\
 & + \frac{1-r_{10}^2}{m_{02}} (u_{\max}^2 \sin^2 \alpha + v_{\max}^2 \cos^2 \alpha) \\
 & + \frac{2r_{10}r_{01}}{\sqrt{m_{02}m_{20}}} (u_{\max}^2 - v_{\max}^2) \cos \alpha \sin \alpha \\
 & - \frac{2r_{10}}{\sqrt{m_{00}m_{20}}} \zeta_p [u_{\max} \cos \alpha \cos(\delta - \delta')] \\
 & - v_{\max} \sin \alpha \sin(\delta - \delta')] \\
 & - \frac{2r_{01}}{\sqrt{m_{00}m_{02}}} \zeta_p [u_{\max} \sin \alpha \cos(\delta - \delta')] \\
 & \left. \left. + v_{\max} \cos \alpha \sin(\delta - \delta') \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (35)
 \end{aligned}$$

変数を

$$Z_p = \zeta_p / \sqrt{m_{00}} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$U_{\max} = u_{\max} / \sqrt{m_{20}} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$V_{\max} = v_{\max} / \sqrt{m_{02}} \quad \dots\dots\dots (38)$$

と無次元化し、さらに水面変動と流速の位相差を λ とおくと式(35)は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 & p(Z_p, U_{\max}, V_{\max}, \alpha, \lambda) \\
 & = \frac{Z_p (U_{\max}^2 - V_{\max}^2)}{(2\pi)^2 D \gamma} \\
 & \times \exp \left[-\frac{1}{2D} \left\{ Z_p^2 \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (1-r_{01}^2) (U_{\max}^2 \cos^2 \alpha + \gamma^2 V_{\max}^2 \sin^2 \alpha) \\
 & + \frac{1-r_{10}^2}{\gamma^2} (U_{\max}^2 \sin^2 \alpha + \gamma^2 V_{\max}^2 \cos^2 \alpha) \\
 & + \frac{2r_{10}r_{01}}{\gamma} (U_{\max}^2 - \gamma^2 V_{\max}^2) \cos \alpha \sin \alpha \\
 & - 2r_{10} Z_p (U_{\max} \cos \alpha \cos \lambda - \gamma V_{\max} \sin \alpha \sin \lambda) \\
 & - \frac{2r_{01}}{\gamma} Z_p (U_{\max} \sin \alpha \cos \lambda + \gamma V_{\max} \cos \alpha \sin \lambda) \Big\} \Big] \quad \dots\dots\dots (39)
 \end{aligned}$$

この式を $U_{\max}$ について $0 \sim \infty$, $V_{\max}$ について $0 \sim U_{\max}/\gamma$, λ について $-\pi \sim \pi$ で積分すれば、波高(振幅)と波向の結合分布が得られることになるが、 $V_{\max}$ についてのみ解析的に積分が実行でき、その結果は

$$\begin{aligned}
 & p(Z_p, U_{\max}, \alpha, \lambda) \\
 & = \frac{Z_p}{(2\pi)^2 D \gamma} \exp \left(-\frac{Z_p^2}{2D} \right) \\
 & \times \exp(-CU_{\max}^2 - DZ_p U_{\max} \cos \lambda) \\
 & \times \left[\frac{\gamma^2}{4A^2} \left\{ BZ_p \sin \lambda + \left(\frac{2A}{\gamma} U_{\max} - BZ_p \sin \lambda \right) \right. \right. \\
 & \times \exp \left(-\frac{A}{\gamma^2} U_{\max}^2 - \frac{B}{\gamma} Z_p U_{\max} \sin \lambda \right) \Big\} \\
 & + \frac{1}{4A^2 \sqrt{A}} \{ 4A^2 U_{\max}^2 - \gamma^2 (2A + B^2 Z_p^2 \sin^2 \lambda) \} \\
 & \times \exp \left(\frac{B^2}{4A} Z_p^2 \sin^2 \lambda \right) \\
 & \times \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{A}}{\gamma} U_{\max} + \frac{B}{2\sqrt{A}} Z_p \sin \lambda \right) \right. \\
 & \left. \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{B}{2\sqrt{A}} Z_p \sin \lambda \right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (40)
 \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$A = \frac{(1-r_{01}^2)\gamma^2 \sin^2 \alpha - 2r_{10}r_{01}\gamma \cos \alpha \sin \alpha}{(1-r_{10}^2)\cos^2 \alpha} \quad (41)$$

$$B = \frac{r_{10}\gamma \sin \alpha - r_{01} \cos \alpha}{D} \quad \dots\dots\dots (42)$$

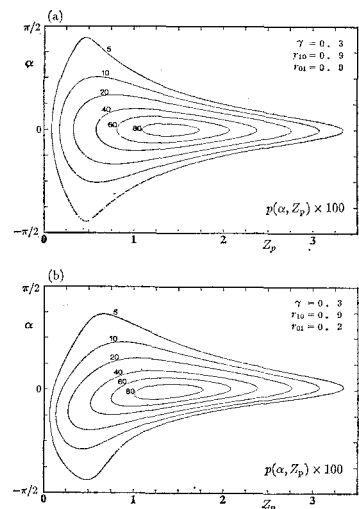
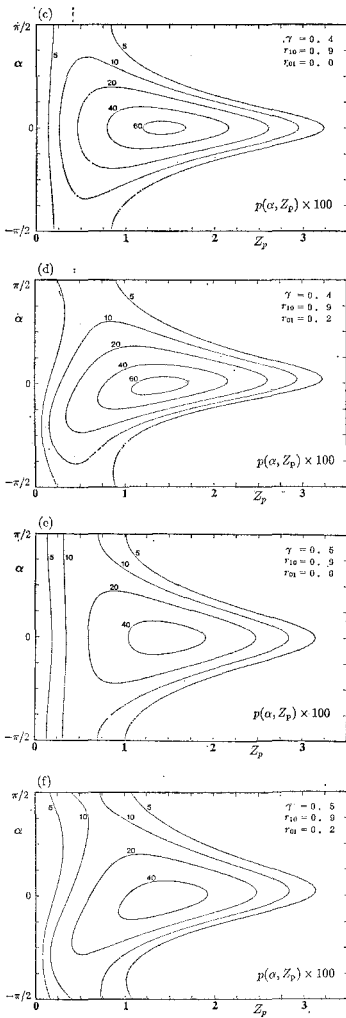
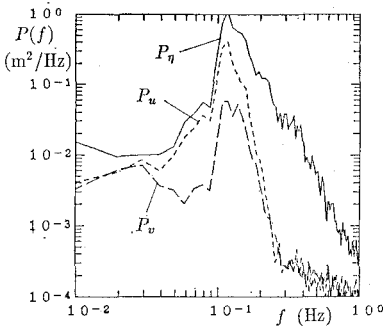


図-3 振幅と波向の結合確率密度(続く)



図—3 振幅と波向の結合確率密度



図—4 パワースペクトルの一例

$$C = \frac{[(1-r_{01}^2)\gamma^2 \cos^2 \alpha + 2r_{10}r_{01}\gamma \cos \alpha \sin \alpha] + (1-r_{10}^2)\sin^2 \alpha}{2d\gamma^2} \quad (43)$$

$$D = -\frac{r_{10}\gamma \cos \alpha + r_{01}\sin \alpha}{d\gamma} \quad (44)$$

であり、これより先は数値積分を行う。図—3に r_{10}, r_{01}, γ を与えたときの $p(Z_p, \alpha)$ のコンターを示す。

なお、周期を含む分布についても同様にして導くことができるが(中西, 1989), さらに複雑な形となる。

3. 現地観測結果との比較

(1) 現地観測

現地観測は茨城県大洗港付近において 1988 年 8 月 29 ~ 30 日に行われた。測定には自記式の水中発射式超音波波高計 3 台と電磁流速計 3 台を同期させて使用し、約 24 時間分の 3 地点における水面変動と 2 成分水平流速を得た。図—4 にパワースペクトルの一例を示し、また表—1 には各測点における波浪の統計量を示す。

表—1 波浪の統計諸量

観測点番号	No. 1	No. 3	No. 4	備 考
観測時間帯	11:20~8:05	10:46~7:31	10:46~7:31	
有効観測回数	73	73	73	
h (m)	13.16	10.88	7.26	平均水深
ζ_{rms} (cm)	27.0 [0.21]	26.6 [0.13]	26.5 [0.06]	水面変動 rms 値
$\bar{u}$ (cm/s)	-1.2 (6.3)	-5.5 (3.5)	-1.0 (4.5)	平均流速(西向)
$\bar{v}$ (cm/s)	5.9 (5.2)	1.0 (3.4)	-0.8 (6.0)	" (南向)
H_{max} (cm)	170 [0.234]	167 [0.163]	165 [0.107]	最大波高
$H_{1/10}$ (cm)	131 [0.219]	128 [0.138]	128 [0.076]	1/10 最大波高
$H_{1/3}$ (cm)	105 [0.217]	102 [0.135]	102 [0.066]	有義波高
$\bar{H}$ (cm)	66 [0.222]	64 [0.139]	63 [0.078]	平均波高
T_{max} (s)	7.1 [0.228]	7.5 [0.146]	7.7 [0.090]	最大波周期
$T_{1/10}$ (s)	7.2 [0.205]	7.5 [0.120]	7.7 [0.034]	1/10 最大波周期
$T_{1/3}$ (s)	7.1 [0.205]	7.4 [0.119]	7.6 [0.026]	有義波周期
$\bar{T}$ (s)	5.7 [0.213]	5.9 [0.130]	6.0 [0.066]	平均周期
f_p (Hz)	0.120 [0.212]	0.122 [0.134]	0.124 [0.137]	ピーク周波数
$\sqrt{\beta_1}$	0.08 (0.064)	0.10 (0.059)	0.21 (0.058)	歪度
β_2	2.86 (0.603)	2.93 (0.377)	3.04 (0.216)	尖度
θ_m (deg)	-14.6 (5.1)	-5.2 (4.0)	1.0 (3.5)	平均波向
θ_p (deg)	-15.3 (5.5)	-6.3 (4.0)	0.7 (3.5)	主波向
r'	0.74 (0.15)	0.76 (0.09)	0.84 (0.02)	方向集中度
r	0.41 (0.09)	0.40 (0.07)	0.33 (0.03)	long-crestedness パラメタ
θ_x (deg)	26.0 (5.8)	25.6 (4.1)	20.4 (2.0)	平均分散角
$H_{1/3}/\zeta_{rms}$	3.71 (0.75)	3.80 (0.44)	3.85 (0.05)	
$H_{max}/H_{1/3}$	1.57 (0.34)	1.61 (0.25)	1.62 (0.14)	
$H_{1/10}/H_{1/3}$	1.20 (0.25)	1.23 (0.15)	1.24 (0.04)	
$\bar{H}/H_{1/3}$	0.60 (0.12)	0.62 (0.07)	0.62 (0.02)	
$T_{max}/T_{1/3}$	0.95 (0.216)	0.99 (0.146)	1.00 (0.088)	
$T_{1/10}/T_{1/3}$	0.97 (0.198)	1.00 (0.119)	1.01 (0.031)	
$T/T_{1/3}$	0.77 (0.163)	0.78 (0.100)	0.79 (0.046)	
$f_p T_{1/3}$	0.89 (0.185)	0.91 (0.119)	0.94 (0.130)	

ただし, [] 内は変動係数であり, () 内は標準偏差である。

(2) 現地観測結果との比較

図—5 は無次元最大流速 U_{max} と波向 α の結合確率密度について、等密度線で示した理論値と数字で示した実測値とを比較した例である。確率密度のピーク付近で理論値が若干過大評価となつてはいるものの両者はほぼ一致する。図—6 は無次元波高 $H/\bar{H}$ ($\bar{H}$: 平均波高) と本研究で定義した波向 α の結合確率密度について比較を行

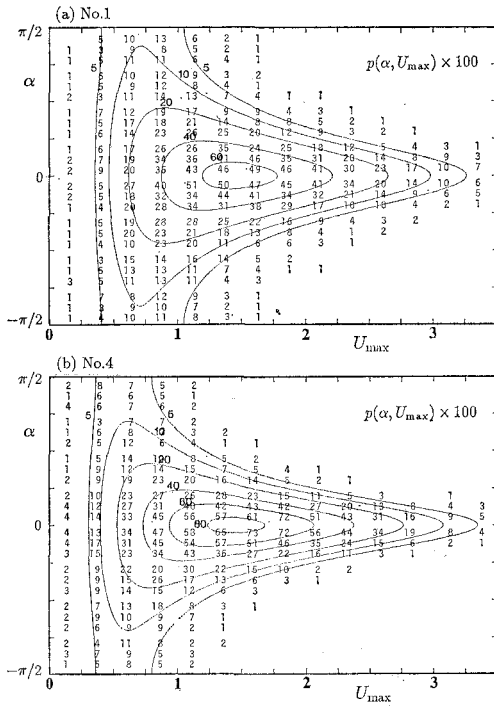
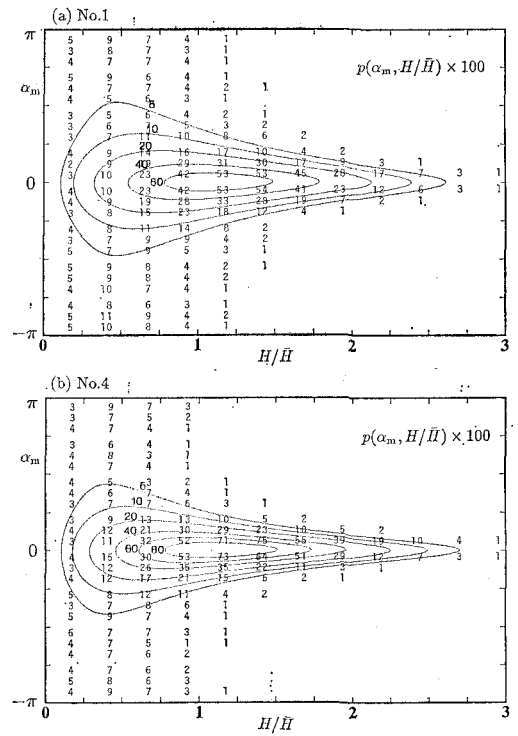
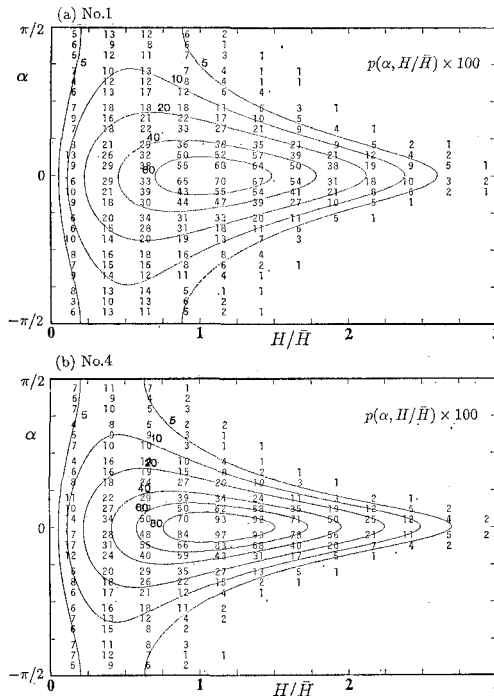


図-5 流速振幅と波向の結合確率密度 (No. 1・4)

図-7 波高と波向 α_m の結合確率密度 (No. 1・4)図-6 波高と波向 α の結合確率密度 (No. 1・4)

高側で実測値が一樣分布に近くなるのに対し、理論ではこの点を表現できない。

4. 結 論

多方向不規則波浪の波別解析法に関して、水平流速が最大となる方向を個々波の波向と定義して、波高と波向等の結合確率密度関数を理論的に導き、現地観測結果と比較した。その結果、理論値と実測値の良好な一致を見た。また、従来の波向の定義を用いた場合との比較を行い、波向の定義により確率密度に有意な差が生じることがわかった。このことは今後多方向不規則波浪の波別解析理論の応用に際してそれぞれの問題に適した波向の定義を選択する必要があることを示唆している。

なお、この研究には五洋建設㈱より研究費の援助を得たことをここに記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- 赤井鈴子・水口 優 (1988): 多方向不規則波浪における波高・周波数・波向の結合確率分布, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 143~147.
- 磯部雅彦 (1987): 多方向不規則波浪の波別解析法に関する理論的考察, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 111~115.
- 権 正伸・石本晴義・橋本 亨・出口一郎 (1988): 波高, 周期及び波向の結合確率分布について, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 148~152.
- 中西浩和 (1989): 多方向不規則波浪場における波別解析法に関する研究, 東京大学修士論文, 62p.

った一例であるが、理論値と実測値の一致はさらに良好である。また、図-7 は従来の平均波向的な個々波の波向 α_m と無次元波高の結合確率密度を比較したものであるが、この場合は大波高側での一致はよいが、特に小波