

浅海における不規則波浪の隣合う波高の結合確率分布について

篠田 成郎* ・ 安田 孝志**・ 川口 智也***
石原 貴司****・ 土屋 義人*****

1. 緒 言

波浪の不規則性に依存する現象を扱う上で、波の時系列としての性質を無視することはできない。特に、波による構造物の rocking 現象、越波および碎波などの問題において波の時系列は大きな影響を与える。このため、波の時系列に関わる種々の問題を検討する場合には、その特性を的確に評価することが必須となる。このような時系列特性の評価において、隣合う波高（振幅）の結合確率分布は最も重要でかつ基本的な統計量であり、従来より提案されてきている種々の波群統計量もこの結合分布と密接に関わっている。

これまで、木村 (1980, 1987) や Longuet-Higgins (1984) をはじめとする多くの研究者により、時系列特性を考慮した波浪の統計理論が提案されてきている。これらの研究では、Rice により導かれた 2 次元 Rayleigh 分布を前後の波高の結合分布として不規則波理論が展開されている。しかしながら、この 2 次元 Rayleigh 分布は線形でかつ周波数帯域幅の極めて狭い不規則波を対象としたものであるため、非線形性が卓越する浅海から極浅海にかけての波浪に対する適用には理論的な制約が存在する。また、現地波浪における前後の波高の標本結合分布のピーク位置および広がり具合が 2 次元 Rayleigh 分布と大きく異なる場合も少なくなく、実用的にその適用性には問題があると言わざるを得ない。

一方、著者らは、浅海における波浪の基準モードをソリトンとする立場から、不規則ソリトン列の振幅の連なりに自己回帰性が存在し、これを自己回帰過程として扱うことが可能であることを明らかにしてきた (篠田ら, 1988)。自己回帰過程は、Markov 過程とは異なり、連続する時系列データ (確率変数) を陽に接続して表すことができるため、これらの結合確率特性の評価を簡単に行えることが期待される。そこで本研究では、ソリトンの振幅の時系列に対して自己回帰過程を適用することに

より、前後の振幅の結合確率分布を理論的に導くとともに、これを用いて振幅の連特性までも評価可能となることを示す。また、波浪の現地観測記録を用いてこの理論分布の適用性を検証し、これが浅海における不規則波浪に関する時系列特性の新しい評価方法となり得ることを明らかにする。

2. ソリトン列の振幅に関する自己回帰過程

深海だけでなく非線形性の卓越する浅海における個々の波の波高（振幅）の連なりにも顕著な時系列特性が存在することは周知の事実である。ここでは、現地波浪の不規則ソリトン列において存在する振幅の自己回帰性に着目し、前後の振幅の結合確率密度関数を導く際に必要となる理論的基礎を与える。なお、以下では、確率過程論の常に習い、‘自己回帰’を‘AR’と略して表記することにする。

(1) n 次自己回帰過程の定義

まず、時間軸上におけるソリトンの振幅 A の連なりに対して次式で定義される n 次の AR 過程を適用する。

$$X_j + \sum_{m=1}^n \Phi_m X_{j-m} = Y_j, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

$$X_j = A_j - \mu_A, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

ここに、 Φ_m は AR 母数であり、 $n=1$ のとき、前後の振幅相互の相関係数 r と次式の関係有する。

$$\Phi_1 = -r \quad (3)$$

また、 Y は X とは独立で系列相関を持たない確率変数であり、以下では、これを AR 誤差項と呼ぶことにする。さらに、 μ_A および N は、それぞれソリトンの振幅の平均およびソリトン数を表す。

(2) AR 誤差項の統計的性質

式 (1) から明らかなように、 n 次 AR 過程において、振幅 A の周辺分布としての母集団分布は確率変数 Y の確率分布に支配されると考えられる。そこで、振幅分布と AR 誤差項 Y の分布との関係を明らかにしてみる。

まず、式 (1) および (2) において用いられる確率変数を便宜的に次のように表すことにする。

$$A_{n+1} \equiv A_j, \dots, A_1 \equiv A_{j-n}, Y \equiv Y_j \quad (4)$$

ソリトンの振幅が前から順に $A_1, \dots, A_{n+1}$ と連なる場

* 正会員 工修 岐阜大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 (株)日水コン

**** 正会員 岐阜大学大学院 工学研究科

***** 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

合、それらの結合確率密度関数 $f_A(A_1, \dots, A_{n+1})$ を次式のように表示することができる。

$$f_A(A_1, \dots, A_{n+1}) = \sum_{k_1} \dots \sum_{k_{n+1}} p(k_1, \dots, k_{n+1}) \prod_{m=1}^{n+1} \delta(A_m - \alpha_{k_m}) \quad (5)$$

ここに、 δ は Dirac のデルタ関数および α_{k_m} はソリトンの振幅の結合分布に対応した確率関数 $p(k_1, \dots, k_{n+1})$ における k_m 番目の階級値を表す。

ところで、式 (1) および (2) より、AR 誤差項 Y は

$$Y = \sum_{m=1}^{n+1} \phi_{n-m+1}(A_m - \mu_A), \quad \phi_0 = 1 \quad (6)$$

と表示できるので、式 (5) の結合確率密度関数を用いれば、その特性関数 $\phi_Y(\omega)$ は次のように表される。

$$\phi_Y(\omega) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{iY\omega} f_A(A_1, \dots, A_{n+1}) dA_1 \dots dA_{n+1} \quad (7)$$

上式を Fourier 変換すれば、次式のように AR 誤差項 Y の確率密度関数 $f_Y(Y)$ が得られる。

$$f_Y(Y) = \sum_{k_1} \dots \sum_{k_{n+1}} p(k_1, \dots, k_{n+1}) \cdot \delta\left(Y - \sum_{m=1}^{n+1} \phi_{n-m+1} \beta_{k_m}\right), \quad \left. \begin{array}{l} \beta_{k_m} = \alpha_{k_m} - \mu_A \end{array} \right\} \quad (8)$$

これに対して、振幅 A と AR 誤差項 Y の分布形が互いに相似の関係にあるとの仮定の下で、 $n=1$ のとき、 Y の確率密度関数 $f_Y(Y)$ は次式で与えられる (篠田ら, 1988)。

$$f_Y(Y) = \sum_k p(k) \delta(Y - \sqrt{1-\gamma^2} \beta_k) \quad (9)$$

ここに、

$$p(k) = \sum_{k_1} \dots \sum_{k_{n+1}} p(k_1, \dots, k_{n+1}) \quad (10)$$

である。式 (1) より、 $|\phi_m| \ll 1$ のときには、確率変数 X と Y の分布が一致することに加え、現実の波浪において、 $m > 1$ に対する $|\phi_m|$ はほとんどゼロであるため (篠田ら, 1988)、式 (9) は式 (8) の近似と見なすことができ

る。そこで以下では、式 (8) および (9) をそれぞれ AR 誤差項の厳密分布および近似分布として扱うことにする。

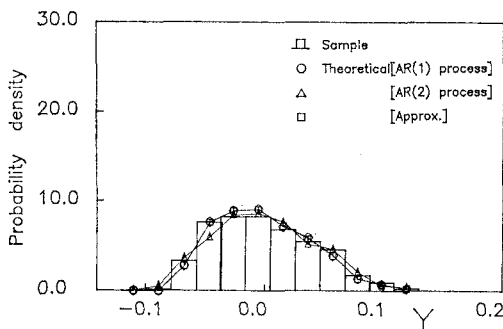
図-1 は、うねり性の現地波浪の観測記録から得られる AR 誤差項の標本分布と式 (8) および (9) で表される理論分布とを比較したものの例である。なお、データ番号として 'CR' および 'TP' と付いているものは、それぞれ Costa Rica 国の Cardera 港 (1981 年 5 月) およびアメリカ合衆国西海岸の Torrey Pines Beach (1978 年 11 月) において観測されたうねり性のデータ (篠田ら, 1988) を表す。図-1(a) は、前後の振幅相互の相関が低い場合に相当し、(b) は高い場合である。ただし、理論分布において必要となる振幅分布 p には標本分布を用いており、式 (8) については、AR 次数 n を 1 および 2 として与えた。これより、AR 次数の相違による厳密分布の違いは極めて微小であり、実用的には AR 次数を 1 次としても何ら問題のないものと判断できる。また、AR 誤差項 Y の標本分布は、厳密分布のみならず近似分布にもよく一致している。このことは、AR 誤差項の分布の表示に際して、式 (8) のように振幅の結合分布を用いる必要はなく、その周辺分布 $p(k)$ だけから十分な精度でこれを表示することが可能であることを示す結果と考えられる。

3. 自己回帰過程に基づく振幅の結合確率密度関数

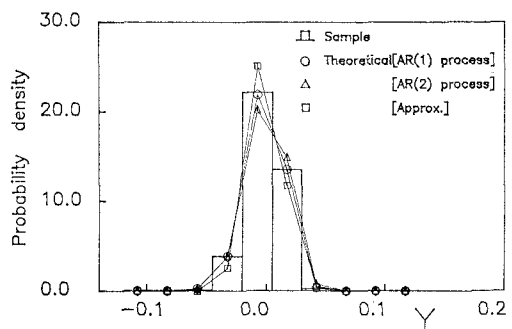
ここでは、前述の検討結果に基づき、ソリトンの振幅 A の連なりが 1 次 AR 過程として表示されることを前提として、その周辺分布から隣接するソリトンの振幅相互の結合確率密度関数を導く。また、波浪の現地観測記録を用いて、ソリトンの振幅の結合分布および連特性の両面からその適用性を検討する。

(1) 結合確率密度関数の導出

まず、式 (1) における AR 次数 n に 1 を代入し、式



(a) TP 10, P 10 ($\gamma=0.025$)



(b) TP 20, P 4 ($\gamma=0.693$)

図-1 AR 誤差項 Y の分布

(2) を適用することにより, ソリトンの振幅に関する直接的な AR 表現が, 式 (4) の表記法を用いて, 次のように表される.

$$A_2 = -\phi_1 A_1 + (1 + \phi_1) \mu_A + Y \quad \dots\dots\dots (11)$$

ところで, 条件付確率の定義より, 前後の振幅 A_1 と A_2 に関する結合確率密度関数 $f_A(A_1, A_2)$ は, 条件付確率密度関数 $f_A(A_2|A_1)$ と振幅に関する周辺確率密度関数 $f_A(A)$ を用いて次式で与えられる.

$$f_A(A_1, A_2) = f_A(A_2|A_1) f_A(A_1) \quad \dots\dots\dots (12)$$

上式における条件付確率密度関数 $f_A(A_2|A_1)$ は, 前のソリトンの振幅 A_1 が生起したときの後ろのソリトンの振幅 A_2 に関する確率密度関数を与えるものである. すなわち, 式 (11) の右辺において, 確率変数として扱われるのは Y だけとなるため, $f_A(A_2|A_1)$ は AR 誤差項 Y の確率密度関数を用いて次のように表される.

$$f_A(A_2|A_1) = f_Y\{A_2 - \gamma A_1 - (1 - \gamma) \mu_A\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし, 上式の導出において, 式 (3) を適用した. ついで, 式 (13) に式 (9) で与えられる AR 誤差項の近似分布を適用すれば, 次の条件付確率密度関数が得られる.

$$f_A(A_2|A_1) = \sum_k p(k) \delta\{A_2 - \gamma A_1 - (1 - \gamma) \mu_A - \sqrt{1 - \gamma^2} (\alpha_k - \mu_A)\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

一方, 式 (12) における $f_A(A_1)$ は振幅の周辺分布であるから, 式 (5) および (10) より次式で与えられる.

$$f_A(A_1) = \sum_k p(k) \delta(A_1 - \alpha_k) \quad \dots\dots\dots (15)$$

式 (14) および (15) を式 (12) に適用すると, 1 次 AR 過程における前後のソリトンの振幅 A_1 と A_2 の結合確率密度関数は次のように表されることになる.

$$f_A(A_1, A_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} p(k_1) p(k_2) \delta(A_1 - \alpha_{k_1}) \cdot \delta\{A_2 - \gamma A_1 - (1 - \gamma) \mu_A - \sqrt{1 - \gamma^2} (\alpha_{k_2} - \mu_A)\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

これより, 不規則ソリトン列の振幅の連なりに AR 性が存在する場合には, 前後の振幅の結合分布を振幅の周辺分布および振幅相互の相関係数だけから理論的に表すことが可能になることがわかる. また, 振幅の連長およびトータルランの分布は振幅の結合確率密度関数から求められる遷移確率を用いて計算されるため (木村, 1980), 連特性も振幅の周辺分布と相関係数だけから決定できることになる.

(2) 振幅に関する理論結合分布の適用性

図-2 は, 上述の現地観測記録より得られるソリトンの振幅の標本結合分布と式 (16) から推定される理論結合分布とを比較したものである. ただし, ここでは, 理論

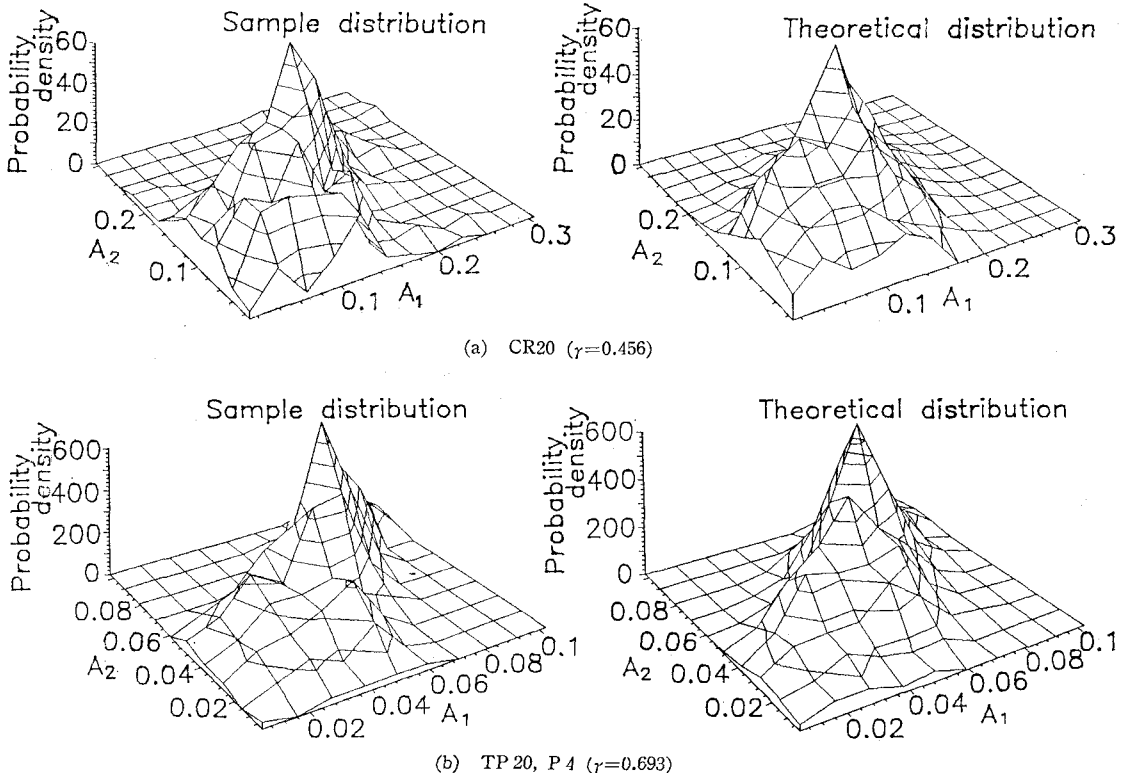


図-2 前後の振幅の結合分布に関する標本分布と理論分布との比較

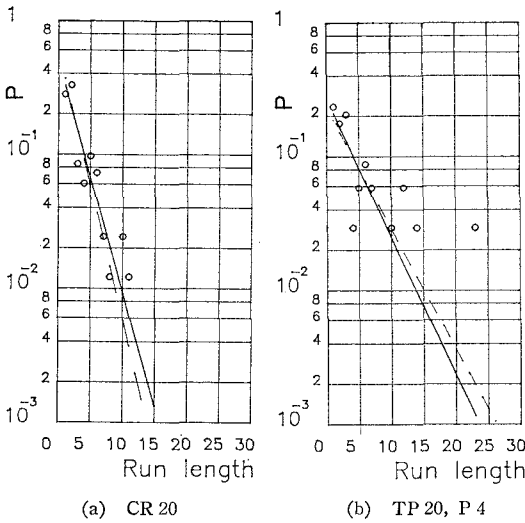


図-3 ソリトンの振幅に関する連長の分布

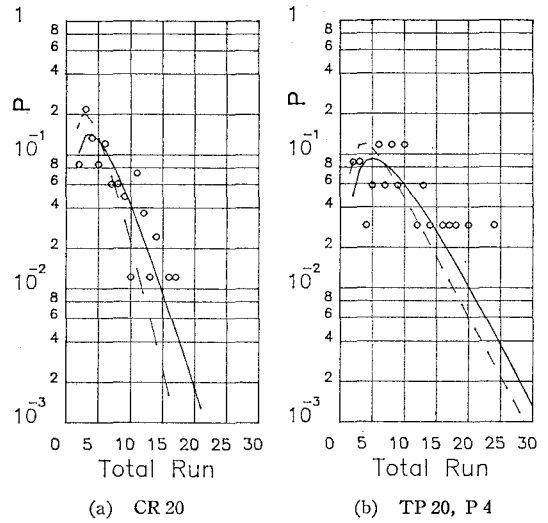


図-4 ソリトンの振幅に関するトータルランの分布

分布の計算に必要な振幅の周辺分布 $p(k)$ および振幅相互の相関係数 r には、観測記録から求められた標本統計量を使用した。これより、確率密度の小さな部分において若干の相違は見られるものの、そのピーク位置や高さおよび分布形の広がり具合については極めて良好な一致を示しており、式(16)は十分満足できる適用性を有しているものと判断できる。

図-3 は、ソリトンの振幅の平均を基準としたときの振幅に関する連長の分布を示したものであり、図中の丸印は観測記録から得られる標本分布を表す。また、実線および破線は、それぞれ前後の振幅の標本結合分布および式(16)の理論結合分布より求められる連長の分布を示している。また、図-4 は、図-3 と同様に、振幅に関するトータルランの分布を示したものである。これらの図より、式(16)に基づいて得られる分布は標本分布とほぼ一致していることがわかる。このため、振幅の連なりに関する連特性は、その周辺分布と相関係数だけから評価される統計的性質であると考えられる。すなわち、前後の振幅相互の相関係数は、不規則波浪の時系列特性の評価において、より有意な統計量であると判断できる。

4. 水位分布による振幅分布の表示

上述のように、式(16)を用いて前後の振幅の結合分布を推定する場合には、その周辺分布と相関係数が必要となる。一様水深場においてソリトンの振幅の周辺分布は時空間的に不変であるため、水深が一定で多ソリトンの漸近解表示が可能となる理想的な不規則ソリトン列を対象とした場合には、モード遷移の過程が未知であっても振幅の周辺分布を決定することは可能と考えられる。すなわち、このような理想的なソリトン状態においては、

ソリトンのみの連なりの結果として水位変動が現出していると理解できるため、水位分布と振幅分布とは1対1に対応することになる。そこでここでは、水位変動の標本分布から振幅の周辺分布を推定する方法について述べる。

まず、波峰が重なり合っておらず、隣接波の影響を無視できる漸近状態での水位変動 η をソリトン列の波谷面 η_0 を基準にした変動 ζ として扱うことにする。

$$\zeta = \eta + \eta_0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

このとき、水位変動 ζ の確率分布関数 $F_\zeta(\zeta)$ は次式で表される(土屋ら, 1988)。

$$F_\zeta(\zeta) = 1 - (4/\mu_T) \sum_{k=k_\zeta} p(k) s_k(\zeta) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$s_k(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{3\alpha_k c_k}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \zeta/\alpha_k}}{\sqrt{\zeta/\alpha_k}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$c_k = 1 + \alpha_k/2 - (3/2)\eta_0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

であり、 k_ζ は $\zeta/\alpha_k < 1$ を満足する最小の階級番号である。また、 μ_T はソリトン間隔の平均を表す。

ついで、式(18)の逆問題を解くことにより、振幅分布 $p_k = p(k)$ は、水位変動 ζ の標本分布 F_m を用いて次のように表される。

$$p = (\mu_T/4) S^{-1} F \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに、

$$p = [p_k], \quad S = [S_{mk}], \quad F = [F_m] \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$S_{mk} = \begin{cases} s_k(\zeta_m) - s_{k+1}(\zeta_m); & m < k \\ s_k(\zeta_m) & ; \quad m = k \\ 0 & ; \quad m > k \end{cases} \quad \dots\dots\dots (23)$$

であり、 ζ_m は標本分布 F_m の m 番目の階級の下限値を表す。式(23)からも明らかなように、行列 S は下側三角

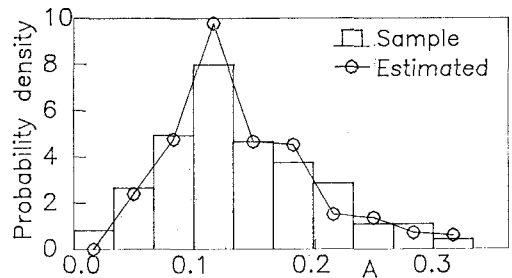
行列であるので、結局、求めたい振幅分布の確率ベクトル $\mathbf{p}$ の m 番目の成分 p_m は、 m の大きな順に、次式から順次計算されることになる。

$$p_m = \left\{ (\mu_T/4) F_m - \sum_{k=m+1}^{\infty} S_{mk} p_k \right\} / S_{mm} \dots\dots (24)$$

図一5 は、現地波浪におけるソリトンの振幅の標本分布と式(24)に基づき水位変動の標本分布から推定された振幅分布とを比較したものの一例である。これより、分布形のピーク位置における確率密度の大きさに若干の相違は見られるものの、全体的には、水位分布から推定された振幅分布は標本分布とほぼ一致していることがわかる。このほかのケースについてもほぼ同様な結果が得られたが、Ursell 数が 10 以下となるような非線形性の弱い波浪については、振幅の微小な部分における確率密度の推定精度が低下する傾向も見られた。しかしながら、ソリトンモード法の適用限界が Ursell 数 >10 である(土屋ら, 1986) ことを考慮すれば、Ursell 数が 10 以下の波浪に対する適用性が保証されなくなるのも当然の結果と考えられる。このため、ここで対象とする非線形性の顕著なうねり性の波浪に対しては、式(24)に基づく方法により振幅分布を推定することはある程度まで可能であると判断することにする。ただし、Ursell 数 >10 の全ての波浪に対してこのような推定方法が有効となる保証もなく、今後、その適用限界を明らかにしていくことが必要と思われる。

5. 結 語

以上、ソリトンの振幅の時系列に自己回帰過程を適用することにより、従来の不規則波理論におけるスペクトル概念を用いることなく、振幅の周辺分布と振幅相互の相関係数だけから前後の振幅の結合確率密度関数を理論



図一5 振幅の標本分布と水位分布から推定される振幅分布との比較

的に導いた。また、現地波浪の観測記録を用いてその適用性を検討し、前後の振幅の結合分布および振幅の連特性を精度よく評価可能となることを明らかにした。ただし、この結合分布の決定の際に必要な振幅の周辺分布および相関係数といった統計量の推定方法には若干の問題が存在しており、今後の検討課題として残される。

参 考 文 献

- 木村 晃 (1987): 不規則波浪の隣合う波高の相関性について, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 136-140.
- 篠田成郎・安田孝志・川口智也・石原貴司・土屋義人 (1988): 浅海における不規則波浪の時系列モデルについて, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 103-107.
- 土屋義人・安田孝志・篠田成郎 (1984): ソリトンモードに基づく不規則波浪の統計量の保存性, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 178-182.
- 土屋義人・安田孝志・篠田成郎 (1986): 波浪ソリトン群とその統計理論, 京大防災研年報, 第29号 B-2, pp. 691-716.
- Kimura, A. (1980): Statistical properties of random wave groups, Proc. 17th ICCE, pp. 2955-2973.
- Longuet-Higgins, M. S. (1984): Statistical properties of wave groups in a random sea state, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Vol. A312, pp. 219-250.