

深海から浅海に1次元的に進むうねりの波動方程式について

安田孝志*・田中光宏**・伊藤一教***

1. 緒 言

Zakharov 方程式は3次の共鳴干渉項を含み、一様水深場でのうねりの伝播過程を記述できるが、計算労力上の問題のために、対象を一方向に進むうねりに限っても実際にその波形変化を記述することは容易ではない。著者ら(1988)は、Zakharov 方程式の実用的計算法の開発ではなく、KdV 方程式を大水深域に拡張したモデル方程式を提案し、これによって現地波浪の波群の力学的取扱いが可能となることを示した。しかしながら、この方程式は流体力学の基礎方程式から数学的に導かれたものではなく、その性質および精度は余り明らかにされておらず、その解明が課題として残されていた。

本研究では、風域を脱して深海から浅海に1次元的に伝播するうねりであっても、その伝播過程を長時間にわたって実際に記述するには2次の非線形干渉の評価が実用上の限度であるとの観点から、モデル方程式の性質を2次のモード方程式および KdV 方程式との比較において明らかにする一方、定常周期波解および水理実験結果との比較によってその精度と適用領域を明らかにしたい。

2. モデル方程式の性質

(1) モデル方程式とモード方程式の関係

モデル方程式は KdV 方程式の線形分散項を、厳密な分散関係を生ずるような演算子で置き換えたものとして導入された。ここでは若干その視点を変えることによって、水面波動現象に対する様々な近似方程式の中の一つとしてのモデル方程式のより明確な位置づけを試みる。

Zakharov 以来、水の波の運動は、全エネルギーをハミルトニアンとし、

$$b(k, t) = 1/\sqrt{2\omega(k)} \bar{\eta}(k, t) + i\sqrt{\omega(k)/2} \bar{\phi}^s(k, t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

を正準変数とするハミルトン形式で表現できることが知られている。ここに、 $\eta(k, t)$ および $\phi(k, t)$ はそれぞれ

水面変動および自由表面での速度ポテンシャルのフーリエ変換であり、 ω は線形重力波に対する角振動数 $\omega(k) = \sqrt{k \tanh k}$ である。なお、ここでは簡単のために $g = h = 1$ となるように規格化してある。ハミルトニアンに対する陽な表現は通常 $b(k, t) \ll 1$ の仮定のもとでの展開形で求められ、 $b(k, t)$ について $(n+1)$ 乗まで残した場合には、対応する正準方程式は n 次の非線形項を含むような $b(k, t)$ に対する発展方程式を与える。ここでは、これを「 n 次のモード方程式」と呼ぶことにする。

いま、最低次の非線形性のみを考慮した(すなわち、2次の)モード方程式を導けば、それは形式的に以下のように表現される。

$$\begin{aligned} \frac{db(k, t)}{dt} + i\omega(k)b(k, t) &+ i \iint V^{(1)}(k, k_1, k_2) b(k_1) b(k_2) \\ &\cdot \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \\ &+ i \iint V^{(2)}(k, k_1, k_2) b^*(k_1) b(k_2) \\ &\cdot \delta(k + k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \\ &+ i \iint V^{(3)}(k, k_1, k_2) b^*(k_1) b^*(k_2) \\ &\cdot \delta(k + k_1 + k_2) dk_1 dk_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

(係数 V の具体的な表式については Stiassnie and Shemer, 1984 を参照) モデル方程式は、この2次のモード方程式に対して二つの近似:

- i) 非線形相互作用の結合係数 V に対しては長波近似 ($kh \ll 1$) を適用する,
- ii) KdV 方程式の導出におけると同様に各要素波は x の正方向にしか伝播しないとす、

を適用したことに相当している。ii) の近似の下では $b(k, t) = 0$ ($k < 0$) が要求され、これによって式(2)は $\eta(k, t)$ に対する発展方程式に変形される。近似 i) により簡単化された V を用いることにより、式(2)は最終的に次式に帰着される。

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\eta}(k, t)}{dt} + i\omega(k)\bar{\eta}(k, t) &+ \frac{3ik}{4} \iint \bar{\eta}(k_1) \bar{\eta}(k_2) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \\ &= 0 \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

* 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科
 ** 岐阜大学助手 工学部共通講座
 *** 学生会員 岐阜大学大学院工学研究科

ここで非線形項の畳み込み積分は実空間における $\eta\eta_x$ に対応しており、従って上式はモデル方程式のスペクトル空間における表現となっている。i) の近似をさらに進めて、非線形項のみならず線形項にも長波近似を適用して上式第二項の $\omega(k)$ を $k(1-k^2/6)$ で置き換えたものが KdV 方程式であることは言うまでもない。このように、モデル方程式および KdV 方程式は2次のモード方程式に一連の近似を施したものであり、その分だけ適用上の制約は免れないが、これによってモード方程式が持たなかった実用上の優れた性質、すなわち前報(安田ら, 1988)に於て述べた発展形式の変換が容易、摂動項の付加が容易、および計算時間の短縮などが付与されることになる点は強調されるべきであろう。

(2) モデル方程式の変調不安定

上述のように導出されたモデル方程式を基礎方程式として、弱非線形準単色波列の発展を支配する非線形 Schrödinger 方程式 (NLS 方程式) を導出することができ、それは次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} i \left\{ \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial a}{\partial x} \right\} + p \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} &= q |a|^2 a \\ p &= \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \\ q &= \frac{9}{4} \left\{ \frac{k^2}{2\omega(k) - \omega(2k)} + \frac{k}{d\omega/dk - 1} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

ここで $a(x, t)$ は波列の複素振幅であり、 $\eta(x, t)$ とは $\eta(x, t) = a(x, t) e^{i(kx - \omega t)} + O(a^2) + c.c. \dots\dots (5)$ なる関係にある。

よく知られているように $pq < 0$ の場合には、与えられた波列は、Benjamin・Feir の指摘したメカニズムにより長周期の攪乱に対して不安定になる。重力波の分散関係の場合、 p は常に負であるために q の符号が安定性を決定する。図-1 は $1 < kh < 2$ に対する q の値を示している。ここで実線はモデル方程式から導出された上記 NLS 方程式の q を、また破線は Hasimoto・Ono (1972) により、重力波に対する基礎方程式系から直接導出された NLS 方程式の q をそれぞれ表している。ここで大変興味深いことは、モデル方程式も厳密な方程式系と同様に、比較的水深の大きい領域のみに限定された不安定性を持ち、しかもその臨界水深の値も $kh=1.146$ であり、正確な値 $kh=1.363$ と比較し得る様な値をとることである。同様の解析を KdV 方程式について行くと pq の符号は常に正となり、KdV 方程式ではあらゆる水深にわたって変調不安定を再現することができないことがわかる。もちろん、(1)で述べたように、モデル方程式は、もともと2次の非線形項のみを取り入れたモード方程式から導出された式であり、従って上述の変調不安定の議論においても、実際には寄与すると思われる4波共鳴相互作用を部分的に考慮しているに過ぎない。その意味で

は、4波共鳴相互作用が支配的な現象の記述には注意が必要となるが、非線形性が比較的弱い波であれば、変調不安定を伴う伝播記述であってもその記述は可能と考えられる。

3. モデル方程式の精度

モデル方程式はモード方程式と KdV 方程式の中間的な性質を持つと考えられるが、ここでは、モデル方程式の流体力学的精度について検討を試みる。

(1) 定常周期波解での比較

流体力学の基礎方程式からほぼ厳密に導かれる定常周期波解に着目し、これとモデル方程式の数値解を比較すると同時に、仮定 ii) の下でのモード方程式および KdV 方程式の数値解とも比較を試みる。このため、位相速度を含めた精度指標として誤差 E_1 を次式のように定義する。

$$E_1(t) = \int_{-\pi/k}^{\pi/k} [\eta(x, t) - Y(x - ct)]^2 dx \bigg/ \int_{-\pi/k}^{\pi/k} Y^2 dx \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 Y および c は定常周期波解による波形および位相速度をそれぞれ示し、 η は各方程式の数値解による波形である。各時刻の数値解は、定常周期波を初期波として与え、各方程式によって時間発展させたものであり、計算は周期 T の1.5倍まで行なった。このときの数値計算上の誤差はほぼ無視できる状態であり、初期波として与えられた定常周期波解は流体力学的にほぼ厳密であることを考えれば、 E_1 は各方程式の流体力学的精度を

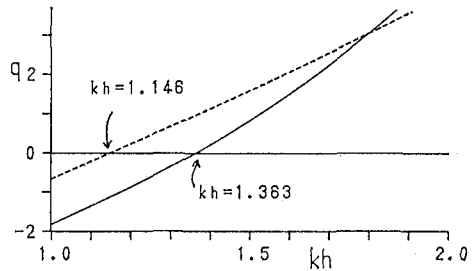


図-1 NLS 方程式の係数と kh の関係 (実線は Hasimoto & Ono および破線はモデル方程式によるものをそれぞれ示す)

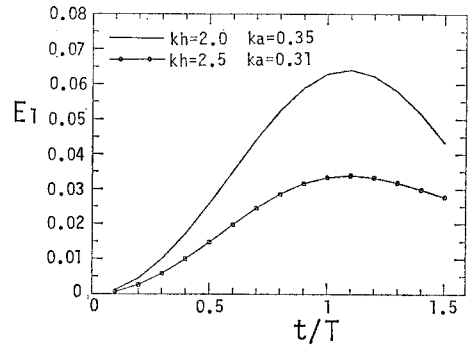
表-1 各方程式の誤差 E_1 と波の条件 (kh および H/h) との関係

H/h	kh	0.4	0.3	0.2	0.1	0.5	0.7	1.0	1.5	2.0
		2.6×10^{-2} 5.5×10^{-1} 2.3×10^{-2}	7.2×10^{-2} 3.8×10^{-1} 4.6×10^{-2}	5.1×10^{-1} 2.7×10^{-1} 3.7×10^{-2}						
		1.5×10^{-2} 1.5×10^{-1} 5.9×10^{-4}	3.6×10^{-2} 1.1×10^{-1} 2.1×10^{-4}	3.3×10^{-2} 7.9×10^{-2} 1.1×10^{-1}	***** 5.9×10^{-2} 8.5×10^{-2}					
		8.7×10^{-3} 3.1×10^{-2} 7.3×10^{-5}	2.1×10^{-2} 3.1×10^{-2} 5.2×10^{-5}	2.3×10^{-1} 2.6×10^{-2} 2.7×10^{-4}	***** 2.4×10^{-2} 1.7×10^{-2}	***** 2.3×10^{-2} 5.8×10^{-2}				
		4.5×10^{-3} 3.9×10^{-3} 3.7×10^{-6}	1.4×10^{-2} 5.4×10^{-3} 5.7×10^{-6}	1.9×10^{-1} 5.6×10^{-3} 4.7×10^{-5}	***** 5.8×10^{-3} 2.0×10^{-4}	***** 5.9×10^{-3} 4.8×10^{-4}				
H/h	kh	0.5	0.7	1.0	1.5	2.0				

そのまま表わす指標になっているといえる。

表—1は、このようにして初期波を1.5T時間だけ各方程式によって進ませ、その間の誤差 E_1 の最大値 $(E_1)_{\max}$ と浅水比 kh および波高水深比 H/h との関係を示したものである。各コマの上段、中段および下段の数値はそれぞれ、KdV、モデルおよびモード方程式による $(E_1)_{\max}$ を示す。なお、上段の**は $(E_1)_{\max}$ が1.0を越えていることを意味している。また、図—2は、このときの各波形の時間発展の比較の一例である。 $kh \geq 1.0$ では予想通りモデル方程式の精度が KdV 方程式のものを上回るのに対し、 $kh \leq 0.7$ ではこの関係が逆転しており、モデル方程式を KdV 方程式の大水深版と捉えることはできても、KdV 方程式の適用領域を深海域に拡張した改良版と言うことはとてもできない。これに対し、モード方程式はここで示した全域において最良の精度を保ち、図—2からも分かるようにその波形は解析解によるものとほぼ一致している。このことは、最低次の非線形干渉項しか取り込んでいなくても、ここで示した条件内であれば、2次のモード方程式によって十分な流体力学的精度が期待できることを物語っている。従って、摂動のない場での時間発展計算であれば、計算時間が2倍以上かかってもモード方程式を用いるべきと言える。

しかしながら、著者らのそもそもの目的は深海から浅海に進むうねりの実用的な波動方程式の確立にあり、その場合、水深変化などの種々の摂動の影響を評価することが要求されるが、モード方程式ではこの要求に答えることが容易ではない。図—2から、 $(E_1)_{\max}$ が0.06以下であれば、モデル方程式による波形も解析解によるものとほぼ一致していると見ることができ、モード方程式よりも精度的に劣りはするものの $(E_1)_{\max} < 0.06$ となる波の条件下ではモデル方程式の適用が十分可能と判断される。図—3は、 $(E_1)_{\max}$ が0.06以下に留まる場合の E_1



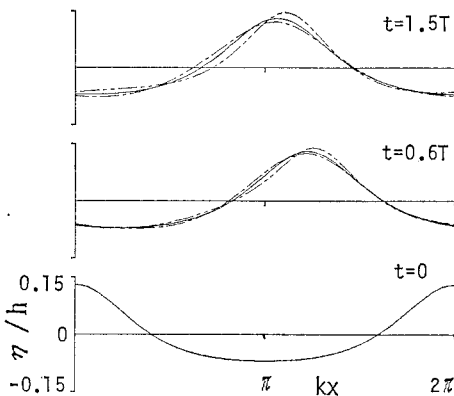
図—3 定常周期波に対するモデルおよび KdV 方程式の適用領域

の時間的変化を示したものであり、これからも $(E_1)_{\max} < 0.06$ となる場合には誤差の累積がなく、モデル方程式による長時間発展の計算が可能であることが分かる。

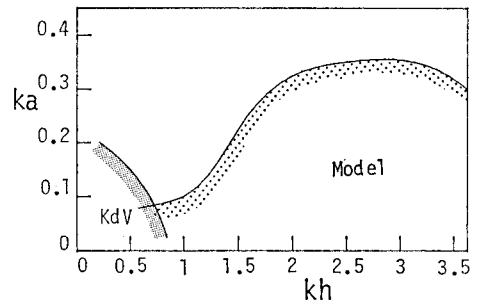
そこで、 $(E_1)_{\max} < 0.06$ をモデル方程式の適用領域と考え、その限界をパラメタ kh および ka (a は振幅であり、ここでは $H/2$ としている) との関係で表示するため、 $(E_1)_{\max}$ がほぼ0.06となるとききの kh および ka の値を計算し、その結果を図—4に示す。なお、図中には、同様に考えて求めた KdV 方程式の適用限界 ($(E_1)_{\max} < 0.06$) も併せて示してある。これより、図中の曲線よりも下側がモデル方程式および KdV 方程式のそれぞれの適用領域と言うことになる。これら両式は分散項に相違があるだけで数値計算用のプログラムは共通しているため、その併用は容易である。従って、これら両式を併用することによって、図中の適用領域内ではあるが、深海から浅海域に至るうねりの空間発展に対する記述が可能となるものと判断される。

(2) 水理実験結果との比較

モデル方程式の本来の適用対象はうねりであり、その精度には kh および ka 以外にバンド幅を表すパラメタも関係して来るはずである。このため、所定のバンド幅を持つ不規則波を水槽内 (1m×1m×54m) で伝播させ、実測波形との比較によって精度評価を行なう。この場



図—2 定常周期波の波形に関する数値解と理論解との比較 (実線は理論解、破線はモード方程式、1点鎖線は KdV 方程式、2点鎖線はモデル方程式)



図—4 誤差 E_1 の伝播過程での変化

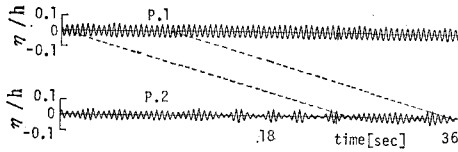


図-5 測点 P.1 および P.2 での準単色波の波形の比較

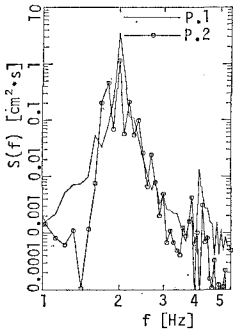


図-6 測点 P.1 および P.2 でのスペクトルの比較

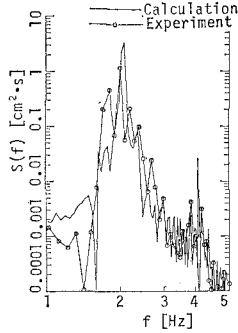


図-7 モデル方程式によって計算されたスペクトルと実験結果との比較

合、時間波形の伝播の記述では空間発展型の方程式が要求され、モード方程式は用いられない。

まず、モデル方程式によって実際の水の水の変調不安定がどこまで正確に記述できるかを明らかにするため、 $kh=2.8$ および $ka=0.16$ の準単色波の場合について検討する。図-5 および図-6 は、水槽内の 2 測点 P.1 および P.2 (P.1 からの距離 $kx=42\pi$) での実測波形とスペクトルを示す。測点 P.1 では 2 倍モードおよび 3 倍モードにピークのあるほぼ一様な波列として進んでいるが、測点 P.2 では側帯波モードの励起が進み、これに伴って波列に変調が現れており、P.1 から P.2 に進む過程で変調不安定が生じていることが分かる。図-7 は、測点 P.1 での波形をモデル方程式(空間発展型)に与え、これによって計算した P.2 でのスペクトルと比較したものである。2. で述べたことに加えて減衰を考慮していないこともあり、両者は一致しているとは言い難いが、側帯波モードの励起の様子が不十分ながらシュミレートされていることが分かる。図-8 は図-5 において破線で囲んだ部分の波形について実験結果と計算結果を比較したものである。部分的に不一致点もあるが、両者はほぼ対応しており、図-7 の結果と併せて考えれば、弱い変調不安定を伴う波列の伝播過程の記述はモデル方程式によっても可能と判断される。

ついで、スペクトルのバンド幅の影響を考慮してモデル方程式の精度評価を行なうため、スペクトル形状を Wallops 型とし、所定の kh (k はスペクトルのピーク周波数に対応した波数)、 ka (a はゼロクロス平均波高

$\bar{H}$ の 1/2 に等しい振幅) および Q_p (スペクトル尖鋭度パラメタ) を持つ不規則波列を発生させ、測点 P.1 での実測波形をモデル方程式に与えて P.2 での波形を計算し、実測波形と比較する。ここで、両測点の距離 kx が 10π 前後となるように P.2 の位置を調整している。この場合も、式 (6) に対応した精度評価のための指標として E_2 を次式のように定義する。

$$E_2(x) = \int_0^{T_0} (\eta_{ob} - \eta_{cal})^2 dt / \int_0^{T_0} \eta_{ob}^2 dt \quad \dots\dots (7)$$

ここに、 η_{ob} および η_{cal} は共に (x, t) に依存する実測および計算波形であり、 T_0 は観測時間である。図-9 は、 E_2 が 0.1 程度となるときの ka と kh の関係を Q_p をパラメタとして示したものであり、図中の曲線は前述の図-3 によるものである。2 次元的不安定が起らない条件で実験を行なっているため、 ka が小さく、適用領域内の結果となっているが、実験結果が適用限界曲線に沿って分布していることが分かる。また、 $Q_p \approx 2.0$ の方が $Q_p \geq 4.0$ のものよりも ka の値が小さくなっているが、これは、バンド幅が広くなるに従って、モデル方程式が同じ精度を保つためには ka のより小さい波に適用が限定されるようになることを示している。

ついで、誤差 E_2 とこれら波浪統計量との関係性を調べるため、 Q_p をパラメタとして kh および ka を U_r (Ursell 数) に統合し、これと E_2 との関係性を図-10 に整理する。図中には、比較のために KdV 方程式および線形方程式による結果についても示してある。また、図-11 は E_2 が 0.23 のときの波形についてモデル方程式による計算結果の比較を示したものであり、 $E_2=0.2$ 程度ではほぼ完全に一致していると見なせることが分かる。

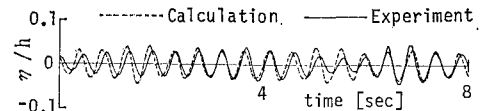


図-8 モデル方程式による伝播波形と実測波形との比較

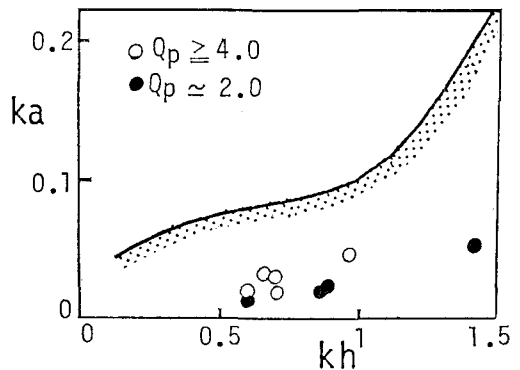
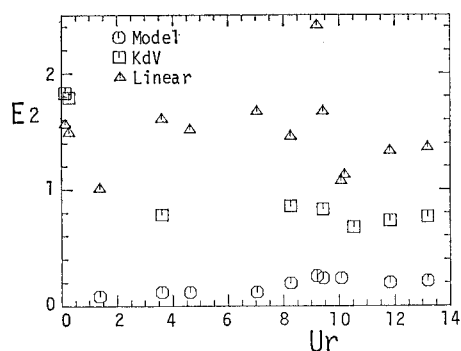
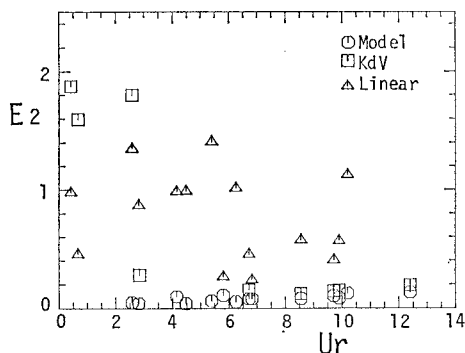


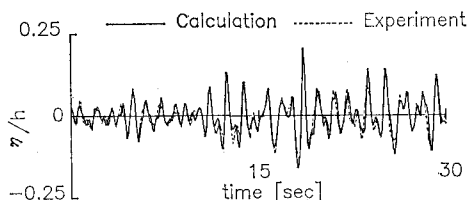
図-9 連続スペクトルを持つ不規則波に対する適用領域

(a) $Q_p \approx 2.0$ (b) $Q_p \geq 4.0$ 図—10 誤差 E_2 と Ursell 数との比較

る。これから、モデル方程式は、 $Q_p \approx 2.0$ の場合の方が若干 E_2 が大きくなっているが、KdV 方程式のものに比べればその程度ははるかに小さく、 $U_r < 14$ の範囲においてバンド幅に関係なく安定した精度を保っていることが分かる。そして、 U_r 数が増すに従って E_2 もほんの少しではあるが増大しており、定常解との比較において明らかにした傾向のあることが分かる。以上より、モデル方程式の適用領域を Ursell 数に関して言えば、バンド幅に関係なく $U_r < 14$ と言うことになる。

4. 結 語

まず、非線形項に対する長波近似および一方伝播の条件を2次のモード方程式に加えることによってモデル方程式が導かれることを示し、時間発展型のモデル方程式のより明確な位置付けを行なうと同時に、変調不安定

図—11 $E_2=0.23$ のときのシミュレーション波形と実測波形との比較

についても検討を行ない、モデル方程式の非線形項が長波近似の下での2次項でしかないにも拘らず、 $kh=1.146$ を臨界とする変調不安定を持つことを明らかにした。ついで、定常周期波解との比較によってモデル方程式の精度検証を行ない、モデル方程式および KdV 方程式が共に一定の精度を保つ kh および ka に関する適用限界を明らかにした。そして、これら両式はモード方程式に比べて精度的に劣りはするものの、その実用上の利点を考えれば、これら両式をその適用限界内で併用の方が实际的であることを示した。さらに、変調不安定を伴う一様波列および所定の統計量を持つ不規則波列を水槽内で伝播させ、これらに対するモデル方程式の適用性の検討を行なった。その結果、弱い変調不安定を伴う波列であれば、スペクトルのバンド幅に関係なくモデル方程式の適用が可能であり、これらに対しても定常周期波解に対する適用限界がほぼそのまま成立していることを示す一方、Ursell 数との関係では、バンド幅に関係なく $U_r < 14$ がモデル方程式の適用領域となることを明らかにした。

最後に、本研究は文部省科学研究費総合(A) (代表者 土屋義人京大教授) による成果であることを付記して謝意を表す。

参 考 文 献

- Hasimoto, H. and H. Ono (1972): Nonlinear modulation of gravity waves, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 33, pp. 805-811.
- Stiassnie, M. and L. Shener (1984): On modulations of the Zakharov equation for surface gravity waves, J. Fluid Mech., Vol. 143, pp. 47-67.
- 安田孝志・田中光宏・鶴飼亮行・土屋義人 (1988): 現地波浪の波群の空間変化とそのモデル方程式による記述, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 93-97.