

屈折・回折を含む波の場の解析法に関する考察

西 村 仁 嗣*

1. 結 言

平面的な波の場を求めることは海岸工学における基本的な命題の一つである。近年、数値解析によって水平2次元の波の場を求める技術が進展し、この目的でさまざまな基礎方程式、およびその数値解法が提案されるに至った。しかしながら、並存する解析手法個々の特質、とりわけ回折現象のとり扱いに関する理解の不十分さが、実際の応用の場で計算法の選択、あるいは計算結果の解釈を誤まる原因となっているように思われる。本論文はこうした視点から波の場の各種解析法を総合的に再評価し、その背景と限界、さらには発展性を論じるものである。

2. 波向線法および格子点法の基礎方程式

計算機が普及する以前の段階では、手計算もしくは図解法等によって波の場の解析が行なわれた。手回しの計算機とともに屈折図作成のための特殊な定規が用いられたのはそれほど大昔のことではない。往時の解析の基本となったのは、まず波向を規定する次の屈折法則である。

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 s は波向線に沿う距離座標、 n はこれに直交する距離座標、 α は波向線が基準線に対してなす角である。また、 C は各点における波の位相速度であり、波の周期と水深が与えられれば、分散関係式から一意的に定まる。ただし、ここでは局地的な底面地形のみから波向が計算されるため、波の回折を考慮することは困難である。構造物等による遮蔽域を含む水域の波の解析に際しては、古くは Sommerfeld の解析解を援用し、回折の効果を別途とり入れる便宜的な手段がとられたが、その合理性は大いに疑問である。

波高は波向線に沿う波動エネルギーの保存則

$$bC_g H^2 = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (2)$$

に基づいて計算される。ここに、 b は隣り合う波向線の間隔、 C_g は波の群速度、 H は波高である。上式は屈折の効果のみならず浅水変形に伴う波高変化をも同時に与えるものであり、式(1)を用いて b を含まない形とすることも可能である。

波向線法と呼ばれる上記の解析法は、計算機上でも当初そのまま用いられた。しかしながら、この方法では座標軸が波向線および波峰線そのものであり、これら一般には曲線となる。従って、あらかじめ指定された地点、例えば直交格子点上の波向および波高を求める計算には不適である。そこでは、特性曲線法におけると同様、何らかの形の内挿計算が必要となるからである。Noda ら (1974) は、波の場の解析を海浜流計算に接合する際、この点を考慮して直交座標表記による基礎方程式系の適用を提案した。

式(1)は、単純な座標変換により、次のように書き改められる。

$$\frac{\partial k \sin \alpha}{\partial x} - \frac{\partial k \cos \alpha}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 x, y は水平面内の直交座標、 k は波数 ($k = \omega/C$, ω は波の角周波数) であり、波向角 α は x 軸から反時計方向に測るものとする。波数ベクトル場の非回転性を示す上式は、式(1)とともに Fermat の原理の具体的な表現となっている。一方、波動エネルギーの保存則は次式で与えられる。

$$\frac{\partial C_g \cos \alpha \cdot H^2}{\partial x} + \frac{\partial C_g \sin \alpha \cdot H^2}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(1)と(3)は本質的には全く等価であるが、実際の数値解析ではとくに境界条件のとり扱いに関連して結果に少なからぬ差異が生じ得る。また、通常的水域を対象とする場合はともかく、防波堤先端のような特異点が存在する場合、解析の精度は式(3)および(4)の差分化の方法に大きく依存するので、注意が肝要である。この問題については4節で詳述する。

本節で述べた2つの計算方式では、各地点毎に1つの波向と波高が得られる。すなわち、水域全般で単一の進行波を想定していることになる。従って、反射境界が存

* 正会員 工博 筑波大学教授 構造工学系

在する場合には、そこで一旦計算を打ち切り、反射波については別途計算して順次重ね合わせる作業が要求される。波の重合は屈折もしくは回折の結果としても生じ得るが、そのとり扱いは一層困難である。

3. 緩勾配方程式

波の場の2次元解析に用いられる様々な方程式のうち、Berkhoff(1972)によって導かれた次の緩勾配方程式は屈折、回折、反射といった諸現象を包括し、最も汎用的なものと言えよう。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(CC_{\sigma}\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(CC_{\sigma}\frac{\partial f}{\partial y}\right)+k^2CC_{\sigma}f=0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 f は波高分布を表わす複素関数で、波の振幅を $A(x, y)$ 、位相を $\phi(x, y)$ とすれば、

$$f=Ae^{i\phi} \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。

式(5)をそのまま陰的に解くことができれば問題はないが、概して楕円型方程式の数値解を求めることは容易ではない。さらに大きな問題は、反射境界、自由透過境界等を表現する条件式設定の困難さにある。実際の解析では、部分反射あるいは入射波と透過波の重合といった煩雑な境界条件の定式化が必要となる。この問題を解決するために、式(5)を運動方程式と連続式から成る擬似非定常系に書き表わし、時間発展型の積分計算の中で境界処理を試みる方法が提起されている(渡辺ら, 1984; 西村ら, 1983)。これらの手法は数値波動解析法(伊藤ら, 1972)の延長線上に位置付けられるが、そこでも上述の難点が本質的に排除されるわけではなく、また反復計算の安定性維持の面で新たな課題が生じ勝ちである。本節においてはこうした議論から離れ、緩勾配方程式の意味について非定常系表記とは異なる視点から再考を試みることにする。

式(6)の複素表現を式(5)に代入すると、実部および虚部より次の連立系を得る。

$$\frac{1}{CC_{\sigma}A}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(CC_{\sigma}\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(CC_{\sigma}\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right]+k^2-\phi_x^2-\phi_y^2=0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial\phi_xCC_{\sigma}A^2}{\partial x}+\frac{\partial\phi_yCC_{\sigma}A^2}{\partial y}=0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ϕ_x および ϕ_y はそれぞれ x, y に関する ϕ の偏導関数であるが、これらを独立した未知量と考えるならば、さらに自明の関係式

$$\frac{\partial\phi_y}{\partial x}-\frac{\partial\phi_x}{\partial y}=0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

を補うことにより系が完備する。

直進する進行波の位相関数 $\phi=kx\cos\alpha+ky\sin\alpha$ において、 k は分散関係式から定まる波数であるが、これが x, y の弱い関数とすれば、近似的に $\phi_x=k\cos\alpha$ 、 $\phi_y=k\sin\alpha$ である。このとき式(9)および(8)は式(3)および(4)にそれぞれ符合し、上記の系が前節の系を一般化したものとなっていることがわかる。 ϕ_x および ϕ_y は見かけ上の波数ベクトルの x, y 成分であり、このベクトルの絶対値は式(7)によって規定される。同式中の振幅 A を含む項の存在は興味深い。これらはほぼ振幅の Laplacian の形をなしており、振幅の非一様性が波長変化によって緩和されることを示している。

波の屈折および反射という用語の意味するところは比較的明確であるのに対し、回折現象の理解はそれほど容易ではない。本来、回折とは複数の波源に発する波がそれぞれ異なる局所的位相を有するために生じる干渉を指す言葉であるが、殆んど教科書は「波が遮蔽物の背後に回り込む現象」と直感的に説明している。いずれにしても波向線側方へのエネルギー分散がこの現象の主要部分であり、結果として生じる波高の一様化が波向方向の調整に帰着するとは考え難い。見かけ上の波数の変化は式(7)を介して波向にも影響するが、その効果は比較的小さい。方程式自体には表われないものの、実は固定壁の存在はこれに沿う波の進行方向を拘束する。式(9)に課せられたこの境界条件が波向の広がりをもたらし、次いで式(8)ではエネルギーの分散に寄与するのである。

一様水深の水域中に置かれた半無限堤に対し、一定方向の波が入射するケース(図-1)については、Sommerfeldの解析解(Penneyら, 1952)から波の場の詳細が知られる。図-2は、直角入射という典型的な状況について、式(7)中の振幅に依存する項の相対的な重要度を評価したものである。防波堤先端付近では、[]内の2項のうちとくに第1項が卓越する。この特異点近傍以外の一般の領域では、同式中におけるこれらの項の効果は比較的小さいことがわかる。

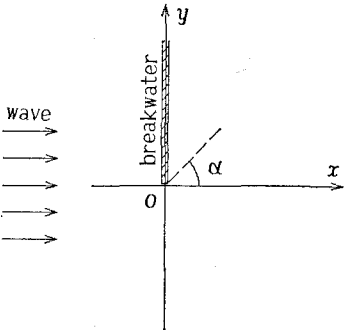
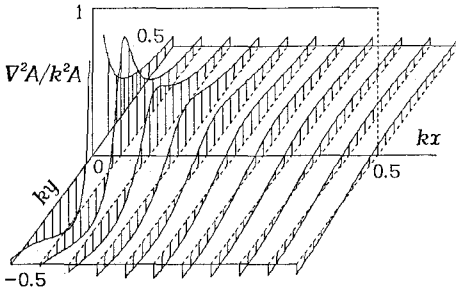
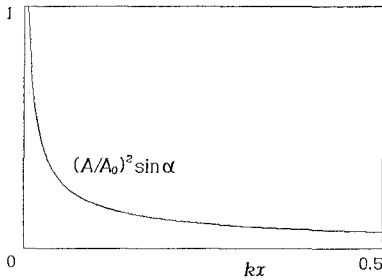


図-1 座 標 系



図—2 振幅に依存する項の相対的重要性


 図—3 x 軸を横切るエネルギー束

図—1 の x 軸を横切り、波の透過域から防波堤の後域に流れる波動エネルギー束成分を同解から計算すると、図—3 の分布が得られる。図中、 A_0 は入射波振幅である。防波堤背後域へのエネルギー供給は透過直後の段階で顕著である。そのため、回折域では波動エネルギーの環状の広がりが見られ、ほぼ放射状の波向線と距離の平方根に逆比例する波高変化が生じる。従って、波向線法系列の数値解析でこれを意図的にシミュレートすることもあながち不可能ではない。

4. 格子点法の拡張

波向線法では波向角の変化が局地的な底面地形から屈折法則のみによって算定されるので、壁面境界の影響を自動的に解析にとり入れることはできない。これに対して格子点法では、境界条件の設定形態が緩勾配方程式に基づく数値解析と類似しているため、差分化と境界条件の設定を適切に行なうことにより、回折効果の評価をも内包し得るものと推論される。

いま、見かけ上の波数 l および波向角 α を

$$\phi_x = l \cos \alpha, \quad \phi_y = l \sin \alpha \quad \dots\dots\dots (10)$$

のように定義すれば、式 (7)~(9) はそれぞれ

$$\frac{1}{CC_g A} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(CC_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] + k^2 - l^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial CC_g \cos \alpha \cdot A^2}{\partial x} + \frac{\partial CC_g \sin \alpha \cdot A^2}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial l \sin \alpha}{\partial x} - \frac{\partial l \cos \alpha}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

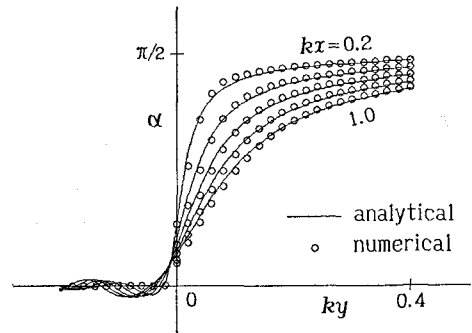
となる。

上記の系の数値解を求めるためには、 $l=k$ なる近似から出発し、2 節で述べた格子点法におけると全く同様の手順で、式 (13) から α 、式 (12) から H を算定すればよい。さらに厳密さを期するならば、式 (11) を用いて l を補正し、これらの操作を反復実行することになるが、とくに急激な波高の変化がない限りその必要は生じない。ここでは、 l および α はあくまで計算上の手段として導入されたパラメータであって、最終的には式 (10) から位相 ϕ を求めることにより現象の全容が知られる。

図—1 のケースにおいて、 y 軸上の負領域で x 軸方向、防波堤に沿って y 軸方向の波向を境界条件として与え、式 (13) を数値積分した結果を図—4 に示す。ただし、本計算では l を一様として次の差分式を用いた。

$$\begin{aligned} & \cos \alpha_{p,q} \Delta x - \sin \alpha_{p,q} \Delta y \\ &= (-\cos \alpha_{p-1,q} + \cos \alpha_{p,q-1} + \cos \alpha_{p-1,q-1}) \Delta x \\ &+ (-\sin \alpha_{p-1,q} + \sin \alpha_{p,q-1} - \sin \alpha_{p-1,q-1}) \Delta y \\ &\dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここに、添字 p, q は点 $(p\Delta x, q\Delta y)$ における値を表わしており、計算格子間隔は $k\Delta x = k\Delta y = 0.2$ とした。同図中の対応する解析解と比較すると、単純な計算で波の回り込みが十分評価されることがわかる。



図—4 防波堤背後の波向分布

5. その他の解析法

(1) 放物型方程式

Radder (1979) はほぼ進行性と見なし得る波の場を想定し、緩勾配方程式 (5) の近似表現として次の放物型方程式を得た。

$$\begin{aligned} & 2ikCC_g \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &+ \left(i \frac{\partial kCC_g}{\partial x} + 2k^2 CC_g \right) f = 0 \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ただし、 x 軸は概略波の進行方向にとるものとする。

ここで、3節におけると同様に式(6)の表記を代入すると、

$$\frac{1}{CC_g A} \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial A}{\partial y} \right) + 2k^2 - 2k\phi_x - \phi_y^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial k CC_g A^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y CC_g A^2}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

これらを緩勾配方程式に対応する式(7)および(8)と比較すると、両式で部分的に $\phi_x = k$ なる近似が用いられ、さらに式(16)では振幅の x 微分の項が脱落した結果となっている。

放物型方程式の最大の利点は、波の進行方向に順次計算を進める marching scheme を採用し得ることである。ただし、反射による逆行波が存在する場合にはもとより、屈折や回折の結果、波向線が x 軸に対して大幅に傾斜するような場合にも上述の近似は成立しない。これらの事実を前節までの議論と考え合わせると、本手法に格子点法以上の精度を期待することは困難と思われる。

なお、式(15)の骨格を調べるには、一様水深の仮定の下に単純化された同式を式(7)に対応する Helmholtz 方程式と比較するとわかり易い。放物型方程式の数値積分は通常極めて安定である。しかしながら、式(14)の場合には一次の微分項の係数が虚数であるため、 f の実数部と虚数部それぞれに関して実質的には4階の微分方程式を解くことになる。この計算はとくに複素振幅の急変に対して不安定であり、防波堤先端部のような特異点近傍の波動解析には適さない。

(2) Karlsson 方程式

Karlsson(1969)は、各地点の波が方向スペクトルを有するものとし、波向角 α を第三の独立変数として次の方程式を与えた。

$$\frac{\partial C_g \cos \alpha \cdot e}{\partial x} + \frac{\partial C_g \sin \alpha \cdot e}{\partial y} + \frac{\partial V_a e}{\partial \alpha} = 0 \quad \dots (18)$$

$$V_a = \frac{C_g}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial C}{\partial y} \cos \alpha \right)$$

ここに、 $e(x, y, \alpha)$ は点 (x, y) において波向角 α を有する波のエネルギー密度である。波の周波数帯毎の計算の独立性については、他の方程式系におけると全く同等である。

とくに単一方向、すなわち線スペクトル状の入射波を想定するならば、式(18)は式(1)および(4)の連立系と等価である。ただし、数値解析では α 軸方向の離散化に応じて、数値的なエネルギーの方向分散が計算精度上の新たな問題となる(西村, 1987)。また、ここでも x 軸方向のエネルギー移送は屈折法則のみから局地的に算定されるので、回折効果の導入の困難さに関しては波向線法と同等である。

(3) 点源法

ある点波源から周囲に伝播し、計算境界に達するまでの波の変形を求めることは最も単純かつ基本的な作業である。境界に達した波がそこで反射する場合には、これを新たな波源と考える。境界上の各波源の影響の総和が全域の波動を矛盾なく表現するように波源の分布を定めるという境界要素法的な考え方はそれなりに合理的である。この手法は、とくに点源波が解析的に与えられる一様水深領域の波動解析に際しては有用である。しかし、一般の水域をとり扱う場合には、個々の点源から発する波の素解が固有の平面分布を呈するため、数多くの波源を同時的に処理することは容易ではない。

6. 結 論

以上の各節において、平面的な波の場のさまざまな解析法をとり上げ、屈折・回折・反射といった2次元変形の総合的評価の可能性を論じてきた。またその過程で、波の回折現象の実態についても考察が加えられた。緩勾配方程式を陰的に解くという、いわば理想的な平面波解析に向けては、各種境界を表現する条件の定式化の困難さが現在最大の障害となっている。この問題を解消する手段としては、壁面境界での反射波をその都度切り離して解析し、重ね合わせるという方法がいささか煩雑ではあるが有力である。進行性の波の場の解析法としては、Noda らの提示した格子点法を一般化する方向が最も合理的と思われる。

参 考 文 献

- 伊藤善行・谷本勝利 (1972): 波向線交差領域での波の屈折——数値波動解析法の応用——, 第19回海岸工学講演会論文集, pp. 325~329.
- 西村仁嗣・丸山康樹・平口博丸 (1983): 直接数値積分による波の場の解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 123~127.
- 西村仁嗣 (1987): エネルギー平衡方程式の積分に伴う数値分散について, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 11~15.
- 渡辺 晃・丸山康樹 (1984): 屈折・回折・碎波減衰を含む波浪場の数値解析法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 103~107.
- Berhloff, J. C. W. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., pp. 471~490.
- Karlsson, T. (1969): Refraction of continuous ocean wave spectra, Proc. ASCE, Vol. 95, No. WW4, pp. 437~447.
- Noda, E. K., C. J. Sonu, V. C. Rupert and J. I. Collins (1974): Nearshore circulations under sea breeze conditions and wave-current interactions in the surf zone, Tetra Tech. Rep., No. TC-149-4, 216 p.
- Penny, W. and A. T. Price (1952): The diffraction theory of sea waves and shelter afforded by breakwater, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 244, pp. 236~253.
- Radder, A. C. (1979): On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 95, Part 1, pp. 159~176.