

内部孤立波のスペクトル変形

武 若 聡*・京 藤 敏 達**

1. 序 論

近年、海洋において振幅が数十メートルに及ぶ内部波が観測され、特に内部孤立波の存在は工学的にも重要な意味を持つ。内部波は温度成層した潮流が海山にぶつかる際に生じる Lee 波が、流れの弱まりに伴い伝播するものである (Maxworthy, 1983; 薩摩, 1986)。本研究では発生した内部波が定常的な状態に近づいた時点を想定し、理論的な考察および実験を行なう。弱非線形理論の提示およびその数値計算を通じて、従来の研究の評価および波動の振舞いを調べる。また、実験では得られた波動の時間波形、スペクトル等について検討し、理論との比較を行なう。

2. 理論的研究 (京藤ら, 1989)

内部波の理論的な研究は現象を支配するパラメータが多く、例えば、安定性や解の変調などは表面波のそれに比較して進んでいない (Yuen, 1984)。過去の理論的な研究では、Keulegan (1953) が KdV 型の孤立波が存在することを示し、その後、Ono (1975) が Benjamin-Ono 型と呼ばれる異なる種類の孤立波の存在を示した。さらに、KdV 方程式と B-O 方程式を数学的な両極限として持つ Intermediate-Long-Wave (ILW) 方程式が Joseph (1977) によって導かれた。しかしながら、いずれの理論も長波長成分のスペクトル変化しか記述できず、その適用範囲は 2 流体の水深が同じオーダーか、極端に異なる場合に限られる。これらと異なる水深比の場合には、2 次の非線形までを考慮したこれらの理論の範囲内では、孤立波の解は存在しない。

以上の議論を踏まえて、ここでは波数空間内で弱非線形の方程式を導く。この方程式は KdV, B-O, ILW 方程式を含み、全ての範囲のスペクトルの時空間発展を記述できる。これを用いて理論的に、また、スペクトル法による数値計算により、従来の理論の適用限界について議論する。

2.1 弱非線形理論

理想的な内部波を想定し、密度の異なる 2 流体は混合しないと仮定する。渦無し流れを仮定すると基礎方程式系は、ラプラスの方程式、境界における運動学的条件および界面の圧力連続条件から成る。上層流体の自由表面は固定境界で近似する。このとき、水面波の場合と同様に、内部波に対しても変分原理が成立する。運動エネルギーを K 、位置エネルギーを V とすると、

$$K = \frac{\rho_1}{2} \iint_{D_1} |\nabla \Phi^{(1)}|^2 dx dz + \frac{\rho_2}{2} \iint_{D_2} |\nabla \Phi^{(2)}|^2 dx dz \quad (1)$$

$$V = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} g \int \eta^2 dx \quad (2)$$

ここで、 Φ はポテンシャル関数、 η は界面の静止状態からの変位、 g は重力加速度、 ρ は密度で添字 1, 2 はそれぞれ下層、上層の流体に対応する。また、 D_1, D_2 は、下層および上層流体の存在範囲での積分を示し、座標系は鉛直上方を z 軸正方向、水平方向に x 軸をとる。内部波に対する Hamilton の方程式は、

$$\eta_t = \frac{\delta E}{\delta \mu}, \quad \mu_t = -\frac{\delta E}{\delta \eta} \quad (3)$$

ただし、 E は全エネルギー、 μ, η は変分原理の正準変数で、

$$E = K + V, \quad \mu = \rho_1 \phi^{(1)} - \rho_2 \phi^{(2)} \quad (4)$$

で与えられる。式 (3) は界面における運動学的条件、力学的条件に対応する。

Zakharov (1968) は 2 次の非線形性までを考慮できる波動解析手法を提案しているが、その特徴を挙げると以下ようになる。1) 長波から Stokes 波までを同一の枠組み中で議論でき、波数空間での方程式を非線形性について摂動近似する際の共振条件が孤立波の方程式に対応する。2) フーリエ空間における方程式は、正準変数を用いて Hamilton 形式で書かれているため、保存則の導出にも有用であり、この方程式系を数値計算することはスペクトル法による数値解析に相当する。ここではこの方法に従って式 (3), (4) をフーリエ変換した後、2 次の非線形性までを考慮し、波数空間における発展方程式系として次式を得る。

* 学生会員 工修 筑波大学大学院 工学研究科

** 正会員 工博 筑波大学講師 構造工学系

$$\hat{\eta}_t = P(k_0)\hat{\mu}(k_0) + Q(k_0, k_2)\hat{\eta}(k_1)\hat{\mu}(k_2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\hat{\mu}_t = -g(\rho_1 - \rho_2)\hat{\eta}(k_0) - \frac{1}{2}Q(-k_1, k_2)\hat{\mu}(k_1)\hat{\mu}(k_2) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで, P, Q は次式で与えられる.

$$P(k_0) = \frac{k_0 T_{01} T_{02}}{\rho_1 T_{02} + \rho_2 T_{01}}$$

$$Q(k_0, k_2) = \frac{k_0 k_2 (\rho_1 T_{02} T_{22} - \rho_2 T_{01} T_{21} + (\rho_2 - \rho_1) T_{01} T_{02} T_{21} T_{22})}{(\rho_1 T_{02} + \rho_2 T_{01})(\rho_1 T_{22} + \rho_2 T_{21})}$$

$$T_{ij} = \tanh(k_i h_j)$$

ただし, 上式が成立するのは空間周期的な現象のみであり, 一様流が存在するときはポテンシャル関数に一様流の成分を考慮しなければならぬ. また, フーリエ変換および非線形項 $L[p(x)q(x)]$ のフーリエ変換を

$$\hat{S}(k_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \exp(ik_0 x) dx$$

$$\widehat{L[p(x)q(x)]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{-\infty}^{\infty} r(k_1, k_2) \hat{p}(k_1) \hat{q}(k_2) \delta(k_0 - k_1 - k_2) dk_1 dk_2$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} r(k_1, k_2) \hat{p}(k_1) \hat{q}(k_2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

で定義した. ここで, $\delta(k_i)$ はディラックのデルタ関数, 非線形項に関するフーリエ変換は, その係数, デルタ関数および積分が省略されていることに注意する.

これらの方程式系は, Hamilton 形式を媒介としなくても導くことができるが, この方法がより体系的で計算も容易であり, 変分原理を用いて保存量などを求めることもできる.

2.2 一方向に伝播する内部波

本節では前に導いた時間発展方程式系を基に従来の理論の適用限界を明確にする. 式(5), (6)から $\hat{\mu}$ を消去し, 波形勾配を代表するパラメータ ε で展開する.

$$\eta \doteq \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

第1近似解 η_1 に対する方程式は,

$$\hat{\eta}_{1tt}(k_0) - \sigma(k_0)^2 \hat{\eta}_1(k_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし,

$$\sigma_i^2 = g(\rho_1 - \rho_2) \frac{k_i T_{i1} T_{i2}}{\rho_1 T_{i2} + \rho_2 T_{i1}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

同様に, 第2近似解 $\hat{\eta}_2$ の方程式は,

$$\hat{\eta}_{2tt}(k_0) - \sigma(k_0)^2 \hat{\eta}_2(k_0) = -g(\rho_1 - \rho_2) Q(k_0, k_2) \hat{\eta}_1(k_1) \hat{\eta}_1(k_2) + \left\{ \frac{Q(k_0, k_2)}{P(k_2)} - \frac{Q(-k_1, k_2) P(k_0)}{2P(k_1) P(k_2)} \right\} \times \hat{\eta}_{1t}(k_1) \hat{\eta}_{1t}(k_2) \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる.

式(9)で一方向に伝播する波動に対しては,

$$\hat{\eta}_t(k_0) - i\sigma(k_0)\hat{\eta}(k_0) = O(\varepsilon^2) \quad \dots\dots\dots (12)$$

となり, 式(11)に代入し, 式(9)を考慮すると,

$$\hat{\eta}_{tt}(k_0) \doteq -\sigma(k_0)^2 \hat{\eta}(k_0) - \left[g(\rho_1 - \rho_2) Q(k_0, k_2) + \sigma_1 \sigma_2 \left\{ \frac{Q(k_0, k_2)}{P(k_2)} - \frac{Q(-k_1, k_2) P(k_0)}{2P(k_1) P(k_2)} \right\} \right] \times \hat{\eta}(k_1) \hat{\eta}(k_2) \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる.

波形勾配が小さい波動を対象とする限り, 線形方程式(9), (11)を解けば, すべての波数を含んだ現象を解析できる. しかし, 共振条件を満たす波数の近傍では, 式(11)の解 $\hat{\eta}_2$ は, $t \exp(i\sigma_0 t)$ に比例する項(永年項)を持つ. したがって, この波数の近傍では, 摂動に際して特別の配慮を要する. 以下で示すように, この場合が孤立波の方程式を与える.

共振条件

$$\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2, \quad k_0 = k_1 + k_2 \quad \dots\dots\dots (14)$$

を満足する波数領域は, 以下の場合に限られる.

① $O(k_0(h_1 + h_2)) \ll 1$ KdV 方程式型

$$\sigma_0^2 \doteq (\rho_1 - \rho_2) \frac{gh_1 h_2 k_0^2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} \times \left\{ 1 - h_1 h_2 k_0^2 \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{3(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)} \right\} \quad \dots\dots (15)$$

② $O(k_0 h_1) \ll 1, O(h_1/h_2) \ll 1$ ILW 方程式型

$$\sigma_0^2 \doteq \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} gh_1 k_0^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} k_0 h_1 \coth k_0 h_2 \right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(15), (16)の第一項は, k_0^2 に比例し, $O(k_0 h_1) \ll 1$ となる波数領域では共振条件(14)が成立する. 式(15)は分散関係式(10)の分母が0に近づくときの展開であり, 一方, 式(16)は分母が有限値となるときの展開である. したがって, 式(15)から式(16)を, 水深比 h_1/h_2 を連続的に変えた極限として得ることはできない. 以下では, 長波長の成分のみの時間発展を扱う.

永年項を除去するために, $\hat{\eta}$ が実際の時間スケール $t = t_0$ とそれより小さい時間スケール $t_1 = \varepsilon t$ に依存するとして, 式(9)を解くと

$$\hat{\eta}(k_0) = \hat{N}(t_1) \exp(i\sigma_0 t_0) \quad \dots\dots\dots (17)$$

が得られる. また, 残りのオーダー ε^2 の方程式に上式を代入し, 共振条件(14)を考慮すれば, $\hat{N}(k_0)$ に対する方程式となる.

$$2i\sigma_L \hat{N}_{t1}(k_0) = -\{\sigma(k_0)^2 - \sigma_L(k_0)^2\} \hat{N}(k_0) - \left[g(\rho_1 - \rho_2) Q(k_0, k_2) + \sigma_1 \sigma_2 \left\{ \frac{Q(k_0, k_2)}{P(k_2)} - \frac{Q(-k_1, k_2) P(k_0)}{2P(k_1) P(k_2)} \right\} \right] \times \hat{N}(k_1) \hat{N}(k_2) \quad \dots\dots\dots (18)$$

上式は, 共振波数近傍の波数領域での η の時間発展方程式である. ここで σ_L は式(15), (16)に対応する角周

波数である。

式 (18) を, 条件 (15) のもとで近似する。

$$\textcircled{1} \quad O(k_0(h_1+h_2))=\varepsilon^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_{t1}(k_0) &= \frac{C_0 h_1 h_2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{6i(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)} k_0^3 \hat{N}(k_0) \\ &\quad + \frac{3iC_0(\rho_1 h_2^3 - \rho_2 h_1^3)}{4h_1 h_2 (\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)} k_0 \hat{N}(k_1) \hat{N}(k_2) \\ C_0 &= \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2) g h_1 h_2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

同様に, 条件 (16) のもとでは,

$$\textcircled{2} \quad O(k_0 h_1) = \varepsilon, \quad O(h_1/h_2) = \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_{t1}(k_0) &= \frac{C_0 h_1 \rho_2}{2i\rho_1} k_0^3 \coth(k_0 h_2) \hat{N}(k_0) \\ &\quad + \frac{3iC_0}{4h_1} k_0 \hat{N}(k_1) \hat{N}(k_2) \\ C_0 &= \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2) g h_1}{\rho_1} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となる。これらの式は, フーリエ逆変換すればそれぞれ KdV 方程式および ILW 方程式となる。

以上の議論から理論的には, 2 流体の水深比が 1 に近い場合に KdV 型, また非常に異なる場合に ILW 型の内部孤立波が存在することが示された。

KdV 方程式を導く際には表面的には水深比に対する条件はないが, 結果として代表波長は分散関係式から決まる。\$h_1 \ll h_2\$ の場合に, この関係を使って上層流体に対する波長水深比を計算すると,

$$\left(\frac{h_2}{\lambda} \right)^3 = \frac{\rho_1 \varepsilon}{\rho_2} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2, \quad \varepsilon = a/\lambda \dots\dots\dots (21)$$

となる。したがって, KdV 方程式の解は, ILW 方程式が適用できる水深比 (\$h_2/h_1 = \varepsilon\$) では, 長波長近似を満たさないため本来使用することができない。以上の理論の適用範囲を図示すると図-1 のようになる。ここで導びかれた方程式 (5), (6) は, 弱非線形の仮定を除いて

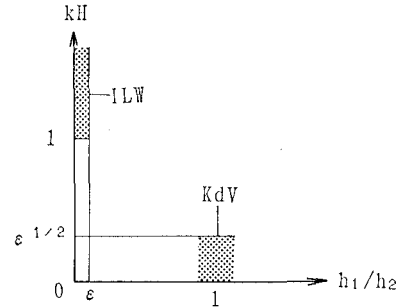


図-1 KdV, ILW 方程式の適用範囲

は波数および水深比には何の制約もない。

2.3 スペクトル法による数値計算

数値計算は前述の解析手法の自然な延長としてスペクトル法を用いて行う。解を計算領域を一波長とする空間周期的な成分に分解する。

$$\hat{\eta}(k) = (\pi/2)^{1/2} \{ a_n \delta(k - nka) + a_n^* \delta(k + nka) \} \dots\dots\dots (22)$$

$$\hat{\mu}(k) = (\pi/2)^{1/2} \{ b_m \delta(k - mka) + b_m^* \delta(k + mka) \} \dots\dots\dots (23)$$

* は複素共役を示す。同一項における添え字 \$n, m\$ は和を取ることを意味し, その定義域は正の整数である。簡単な計算により, このとき \$\eta\$ および \$\mu\$ は,

$$\eta = (1/2) \{ a_n \exp(-inkax) + a_n^* \exp(inkax) \} \dots\dots\dots (24)$$

$$\mu = (1/2) \{ b_m \exp(-imkax) + b_m^* \exp(imkax) \} \dots\dots\dots (25)$$

となる。ただし, \$ka = 2\pi/La\$, \$La\$ は \$x\$ 方向の計算領域である。式 (22), (23) を運動方程式 (5), (6) に代入し, 逆変換した後に \$\exp(-inkax)\$ の成分でまとめ, その係数を 0 と置くと \$a_n, b_m\$ に対する常微分方程式系が得られる。これらの式をルンゲ・クッタ法により解く

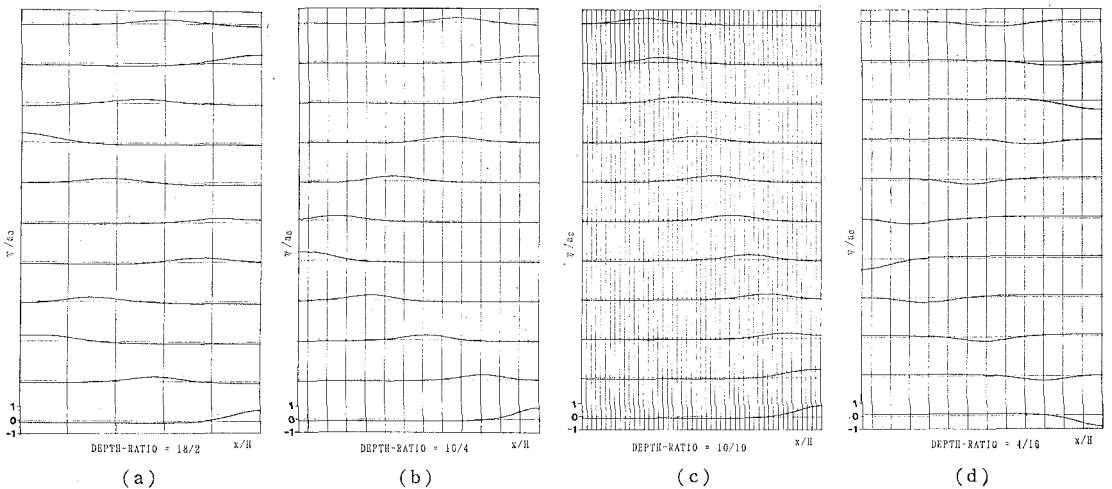


図-2 計算波形

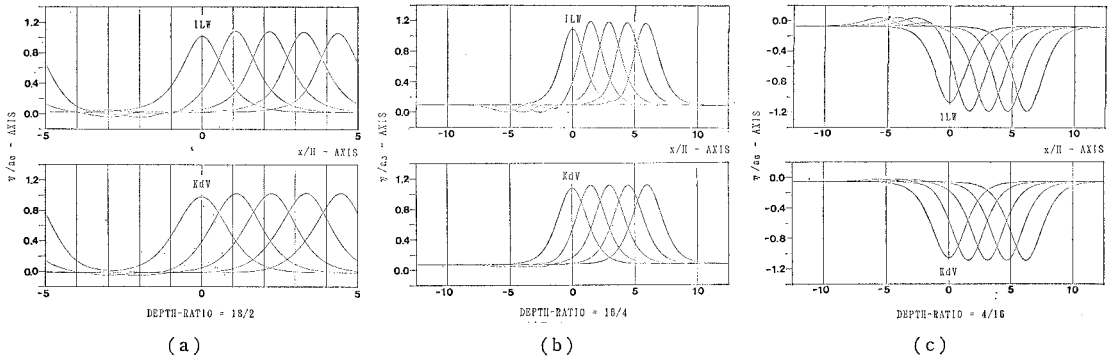


図-3 計算波形

ことにより、水深比を変化させた場合の弱非線形の孤立波の伝播を調べた。計算例として次の2つのケースを考えた。

(Case 1): 波の初速度を0とし、初期変位は ILW または KdV 方程式の解を用いる。

前節の議論により、KdV 方程式は波長が全水深 H に比べて長い場合、ILW 方程式は波長と全水深が同オーダーのときに適用できることが分かっている。図-2 (a)~(d)には、初期波形を KdV 方程式の解で与えた場合の界面波形の時間変化を示す。初期波高は浅い層の水深の1/10とした。横軸の一目盛りは全水深 H であり、水位は初期波高 a_0 で無次元化してある。ここで計算した例では上層、下層の水深比が 16/4、4/16 のときは KdV 方程式、18/2 のときは ILW 方程式や適用範囲と考えられるが、いずれの場合にも孤立波は衝突後も安定で tail の発生も見られない。このことから、対象とした水深比の範囲では水深比が変化しても孤立波は安定に存在するように推察される。一方、ILW 方程式の解を初期値として用いた場合は、孤立波は衝突の度に tail が発達した。(Case 2): 波の初速度、初期変位ともに ILW または KdV 方程式の解を用いる。ただし、 μ は容易に与えることができないため、

$$P(k_0)\dot{\mu}(k_0)=\hat{\eta}_t(k_0) \quad \text{at } t=0 \dots\dots\dots (26)$$

と近似した。また、数値計算で与える初期値は、計算領域 L_a が十分大きいとして、これらのフーリエ変換を近似したものを用いた。

このケースでは KdV、ILW 方程式が導びかれた際に省略された波数が、孤立波の伝播にどのような影響を及ぼすかを調べる。 $\eta-\mu$ の方程式系で近似的に孤立波の初速度を与えるため、安定な孤立波に速度の擾乱を与えたときの現象を追跡することになる。図-3 (a)~(c) に界面波形の時間変化を示す。初期波高は前と同じ設定とした。水深比が 16/4 と 4/16 の場合には、本計算で追跡した時間内では、KdV の解を初期値としたものは KdV 型の波形に、ILW の解を初期値としたものは ILW 型

の波形に漸近している。また、水深比が 18/2 の場合には、KdV の解を初期値としたものは ILW 型の波形に、ILW の解を初期値としたものは ILW 型の波形よりもさらに波形が尖鋭化している。

3. 実験

従来の実験的研究においては上層と下層の水深比が比較的限られた場合のみについて行なわれてきた。ここでは広範囲に水深比を変化させ、孤立波の伝播、遷移を調べた。とくに、2流体の水深比を変化させたときの内部波の発生初期のスペクトルの時間発展および分散性について考察する。

3.1 実験装置

実験は図-4に示す2次元水槽(長さ600 cm、高さ20 cm、幅10 cm)で行われた。流体には、下層に水、上層はテレピン油(比重0.875)を使用した。孤立波は箱型パドルを上下させることにより、水深の浅い側の流体を押し出すことで発生させた。容量式波高計を用いて、内部波伝播による界面の時間変位を1 m 間隔で同時に3カ所測定した。表-1に実験の水深比設定(上層水深/下層水深)を示す。

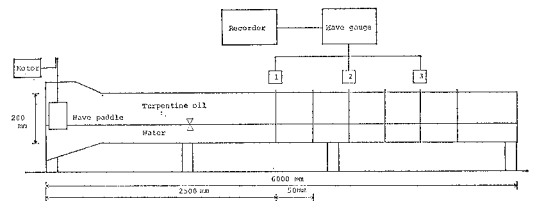


図-4 実験装置

3.2 実験結果

図-5に波高計の出力波形、表-1、2に今回の実験で造波された波の諸量が表示されている。ただし、孤立波の波長 λ_1 は、孤立波部分の面積をその振幅で割ることにより定義した。水深比が1に近づくと、造波による波の tail の発生が顕著であった。

表-1 実験諸量

水深比 (上層/下層)	波速 (cm/s)	波 長 λ_1 (cm)			振 幅 a_0 (cm)		
		1	2	3	1	2	3
2/18	11.6	9.2	9.6	8.1	1.0	0.9	0.8
3/17	12.5	11.0	11.4	11.0	1.0	0.9	0.9
4/16	13.3	13.8	13.7	13.5	1.2	1.1	1.1
6/14	14.5	17.8	19.2	21.5	1.1	0.9	0.8
8/12	15.4	23.6	37.4	30.5	0.9	0.7	0.6
12/8	14.5	17.5	23.2	21.4	1.3	1.1	0.9
14/6	14.1	14.3	16.3	17.1	1.6	1.4	1.2
16/4	13.3	9.5	9.3	11.1	1.8	1.6	1.4
17/3	12.5	7.5	8.0	8.4	1.9	1.6	1.4
18/2	10.9	3.8	4.4	5.7	1.7	1.4	1.0

表-2 波形勾配および水深比

水深比	a_0/λ_1			h/λ_1		
	1	2	3	1	2	3
2/18	0.11	0.09	0.10	0.22	0.21	0.25
3/17	0.09	0.08	0.08	0.27	0.26	0.27
4/16	0.09	0.08	0.08	0.29	0.29	0.30
6/14	0.06	0.05	0.04	0.34	0.31	0.28
8/12	0.04	0.02	0.02	0.34	0.21	0.26
12/8	0.07	0.05	0.04	0.46	0.34	0.37
14/6	0.11	0.09	0.07	0.42	0.37	0.35
16/4	0.19	0.17	0.13	0.42	0.43	0.36
17/3	0.25	0.20	0.17	0.40	0.38	0.36
18/2	0.45	0.32	0.18	0.53	0.45	0.35

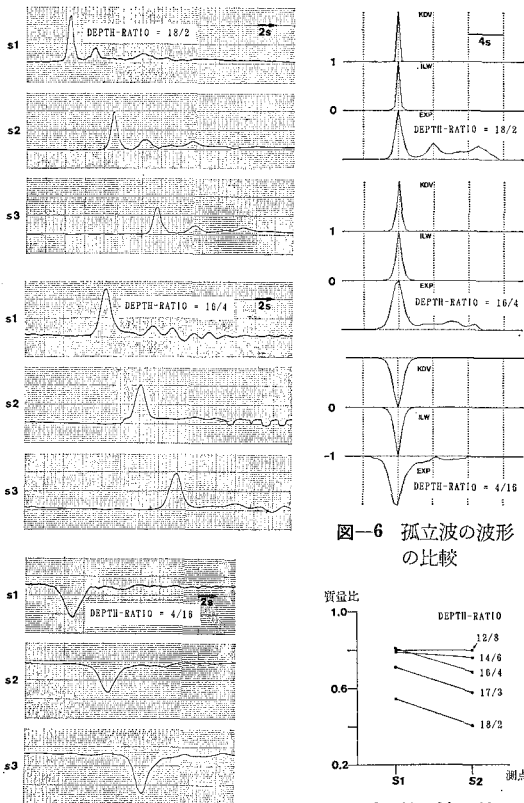
 h =(薄い層の水深)

図-5 実験波形

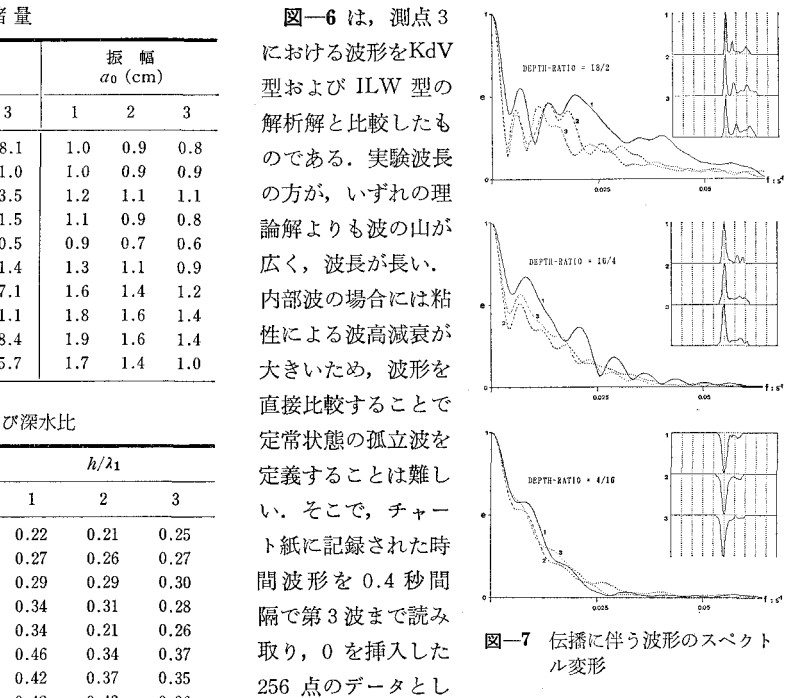


図-6 孤立波の波形の比較

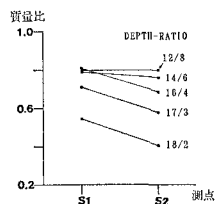


図-8 第一波の質量比の変化

図-6 は、測点 3 における波形を KdV 型および ILW 型の解析解と比較したものである。実験波長の方が、いずれの理論解よりも波の山が広く、波長が長い。内部波の場合には粘性による波高減衰が大きいため、波形を直接比較することで定常状態の孤立波を定義することは難しい。そこで、チャート紙に記録された時間波形を 0.4 秒間隔で第 3 波まで読み取り、0 を挿入した 256 点のデータとし

てフーリエ変換した (図-7)。測点 2 と 3 の間の長波長成分の変化は、水深比が 18/2 の場合にはほとんど見られず、孤立波は測点 2 で安定になったと考えられる。しかしながら、水深比が 16/4, 4/16 の場合には、測点 2 から 3 に渡って多少長波長成分の減少が見られる。

遷移波の場合には、伝播に伴う波の減衰が粘性によるのか分散性によるのか区別することは難しい。ここでは、測点 1 から測点 2 の間で孤立波部が全体に対して占める質量の割合を調べることによって分散性の指標とした (図-8)。この図から、水深比が 1 に近くなるにしたがって、第 1 波の分散性は小さくなることわかる。

謝辞: 本研究を行なうにあたり実験水路および造波装置に関して、東北大学工学部 首藤伸夫教授および山路弘人技官に御配慮頂きました。実験は筑波大学基礎工学類中村公美君の御助力を得ました。謝意を表します。

参考文献

- 京藤敏達・武若 聡・首藤伸夫 (1989): 内部ソリトンの伝播—Fourier 変換を用いた方程式の解析—, ながれ, V. 8, N. 3.
 薩摩順吉 (1986): ソリトンが油井をこわす, 科学, V. 56, N. 6352-358.
 Joseph, R. I. (1977): Solitary waves in a finite depth fluid, J. Phys. A: Math. Gen., V. 10, N. 12, pp. L225~L227.
 Keulegan, G. H. (1953): Characteristics of internal solitary waves, J. Res. Nat. Bur. Stand., V. 51, N. 3, pp. 135~140.
 Maxworthy, T. (1983): Solitary waves on density interfaces, Waves on fluid interfaces, ed. by R. E. Meyer, Academic Press, pp. 201~220.
 Ono, H. (1975): Algebraic solitary waves in stratified fluid, J. Phy. Soc. Japan, V. 39, N. 4, pp. 1082~1091.
 Yuen, H. C. (1984): Nonlinear dynamics of interfacial waves, Physica 12D, pp. 71~82.
 Zakharov, V. W. (1986): Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, J. Appl. Mech. Tech. Phys., V. 9, pp. 190~194.