

境界要素法と離散渦法を応用した「波」と「渦」の 相互干渉過程の解析

灘岡 和夫*・増田 幹雄**・鈴木 徹**

1. はじめに

海岸工学で対象とする水理現象には、砕波後の砕けながら進む波や吹送流（風波）など、自由表面を伴う渦ありの流れが数多く存在する。これらの流れ場は、一般に「波」と「渦」の共存場としてとらえることができ（例えば灘岡ら, 1985）、自由表面近傍に大きな渦度を持った流速成分が存在することによって特徴づけられている。したがって、この種の流れの基本的なメカニズムを理解するには、「渦の運動」としての自由表面の役割は何か？、また逆に「自由表面は渦によってどのような変形を受けるか？」といったことを明らかにすること、すなわち「波」と「渦」の相互干渉過程を具体的に明らかにすることが必要になる。そのための解析手法としては、何らかの既存の乱流モデルや N-S 方程式の直接数値積分法等を適用することが考えられるが、自由表面の運動を伴う場に適用するにはかなり大がかりな計算となってしまう。

そこで本研究では、①このような相互干渉過程を扱う簡便でかつ汎用性のある解析手法を新たに開発し、②それを自由表面近傍に集中渦が存在する場合の解析に適用することによって、「波」と「渦」の基本的な相互干渉過程を明らかにすることを目的とした。

2. 解析手法

(1) 解法の基本的な考え方

上述のように、ここで対象とする場は「波」と「渦」の共存する場であるが、「波」のみの場合、すなわち純粋なポテンシャル場の場合に関しては数多くの解析手法が開発されてきている。例えば、砕波変形まで追跡可能な数値解析手法として最近一般的になりつつあるものに境界要素法に基づいた方法があげられる（例えば Kioka, 1983）。これは、考え方が簡単で境界上だけに未知数を設定すれば良いことから領域内にメッシュを切るタイプの手法に比べて計算時間が少なく済むため、波のようなポテンシャル流速場の計算には大変有効な方法といえる。しかしながらこの種の手法の適用は、これまであく

まで純粋な波動場に限られており、ここで対象とするような渦度が混在する波動場の解析に用いられた例は見あたらない。

一方、「渦」のみの流速場（正確には渦度に関連した流速場）の場合に関しても、数多くの解析手法が存在する。ここで目指している解析法の簡便さという点を満たすものとしては、最近自由せん断乱流や壁乱流中の渦の挙動をシミュレートするのによく用いられている離散渦法がある。この手法は、もともとの連続的な渦度場を離散化することにより有限個の集中渦すなわち渦素子に置き換えて渦の運動を追跡しようとするものであるが、離散化による多少の誤差を伴うものの、手法が簡便であるうえ（2次元計算程度であればパソコンで計算可能）、渦度場（場合によっては乱流場）の力学の基本的な理解に適している手法である。

そこでここでは、これらの2つの解析法を組み合わせることによって、ここで目的とする「波」と「渦」の共存場の新たな解析手法を構成することを試みた。すなわち、任意の流速場 u はポテンシャル流速場 u_p と渦に伴う流速場 u_e の重ね合わせとして $u = u_p + u_e$ と表現できる（灘岡ら, 1985）ことから、ここではこの u_p の算定に境界要素法を、一方の u_e の算定に離散渦法を応用することによって解析法を構成することを考えた。

(2) 自由表面での境界条件の取り扱い

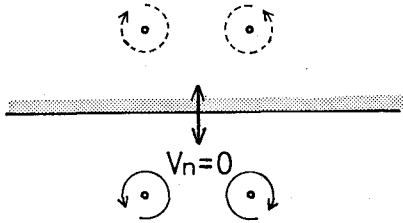
上記のような考え方に基づいて解析法を構成する上で具体的に問題となるのは、渦素子が存在する場合の自由表面での境界条件の取り扱いである。

従来の離散渦法での固定境界に関する境界条件の取り扱い方としては、図—1 (a) に示すような形で、境界面に関する各渦の鏡像を配置することにより固定壁での境界条件を満足するように通常取り扱われている。しかし、自由表面においてはこのような鏡像の考え方をう用いることが原理的に困難となるため、境界条件の別の新たな取扱いが必要になってくる。そこで、本研究では鏡像の考え方をう用いない境界条件の設定法として次のように考えた。もともと、鏡像は実像による境界面での法線方向流速を打ち消すために置かれている。鏡像をう用いないでこれと同等の取り扱いをするには、鏡像による境界で

* 正 員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 東京工業大学大学院 修士課程

(a) mirror image



(b)

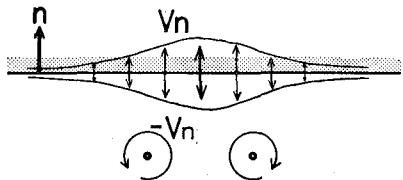


図-1

の法線方向流速を explicit な形で与えてやればよい。すなわち、図-1 (b) に示すように、仮に境界がないとした無限流体中での渦素子による境界面位置での法線方向流速 v_n に対して、それを打ち消すように境界面上で $-v_n$ の逆向きの流速を与えてそれによる領域内の流速場を求めれば、それと先の渦素子による流速場との合成流速は本来の固定壁での境界条件を満たすはずである。この $-v_n$ に伴う流速場の算定に関しては、それに対応する速度ポテンシャルを ϕ_p としたとき、 ϕ_p に関する Laplace の式を境界要素法で解けばよい。その場合の ϕ_p に対する壁面での境界条件は次のようになる。

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_e}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで ϕ_e は渦素子に対応する速度ポテンシャルである。

このように考えれば、自由表面問題に対する境界条件は、このごく自然な拡張として以下のように書くことができる。

(a) 運動学的境界条件

$$\frac{DX_s}{Dt} = \frac{\partial \phi_p}{\partial x} + \frac{\partial \phi_e}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{DZ_s}{Dt} = \frac{\partial \phi_p}{\partial z} + \frac{\partial \phi_e}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (3)$$

(b) 力学的境界条件

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_p}{Dt} = & -gZ_s + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_p}{\partial x} + \frac{\partial \phi_e}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \phi_p}{\partial z} + \frac{\partial \phi_e}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{D\phi_e}{Dt} \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} &= \frac{dx}{ds} \frac{\partial \phi_p}{\partial s} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial \phi_p}{\partial n} \\ \frac{\partial \phi_p}{\partial z} &= \frac{dz}{ds} \frac{\partial \phi_p}{\partial s} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial \phi_p}{\partial n} \end{aligned}$$

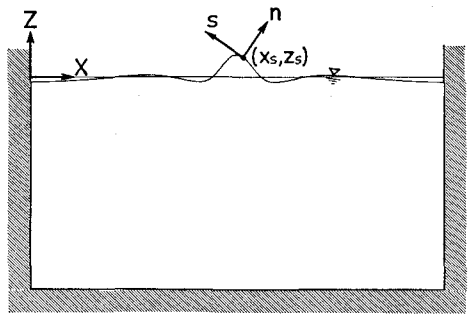


図-2 座標系の定義図

ここで、 X_s と Z_s は自由表面上の座標、 D/Dt はラグランジュ微分を示し、 n, s による微分は境界面における外向法線方向および接線方向微分を表している。このときの座標系のとり方は図-2に示すとおりである。

なお、厳密には自由表面での力学的境界条件式としてさらにせん断力ゼロの条件を付加する必要があるが、今回は簡単のためこの条件を外して取り扱っている。(せん断力条件も加味した場合の結果については別の機会に発表する予定。)

(3) 数値計算の手順

a) ポテンシャル流速成分 ϕ_p の算定

ϕ_p は、上述の境界条件のもとで基礎方程式 $\nabla^2 \phi_p = 0$ を解いて求められることになるが、そのための具体的な数値解法としては、ここでは基本的に Kioka (1983) の方法をそのベースとして用いている。

まず、各時間ステップでの流体境界上の ϕ_p と $\partial \phi_p / \partial n$ は、グリーンの公式に基づく次の境界積分方程式により求めることができる。

$$\alpha \phi_p + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial G}{\partial n} \phi_p - G \frac{\partial \phi_p}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし上式中の G は Green 関数であり、流体境界上の計算点を $P=(x, z)$ 、source 点を $Q=(\xi, \eta)$ として、

$$\left. \begin{aligned} G(P, Q) &= \ln r \\ r &= \{ (x-\xi)^2 + (z-\eta)^2 \}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。また α は P 点での内角である。

式 (5) を解くにあたっては、境界積分を離散化することにより連立一次方程式に置き換えて解くことになるが、その際に必要となる離散化された各要素内の近似関数としてはここでは一次関数を用いている。

b) 渦素子に伴う流速成分 ϕ_e の算定

ϕ_e については、各素子に伴う速度ポテンシャルの線形和として次式により簡単に求めることができる。

$$\phi_e = \sum_i \frac{\Gamma_i}{2\pi} \theta_i \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 θ_i は各素子の中心を原点とする極座標表示での計算点 P の角度を表し、 $\sum_i$ は全ての渦素子についての

合計を意味している。

c) 自由表面形状と渦素子位置の時間発展

自由表面形状 (X_s, Z_s) は、境界上のポテンシャル値 ϕ_p とともに、境界条件式 (2), (3), (4) によりその時間発展が計算されることになる。その際必要となる各境界条件式の右辺の評価には、式 (5) と (7) によって求まる ϕ_p , $\partial\phi_p/\partial n$ および ϕ_e の値が用いられる。

自由表面形状と ϕ_p の時間発展に連動して各渦素子の位置も変化していくことになるが、そのときの $\mathbf{x}$ 地点にある渦素子の移動速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ は、

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \text{grad } \phi_p + \sum \Gamma_i |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)|^{-1} \dots\dots\dots (8)$$

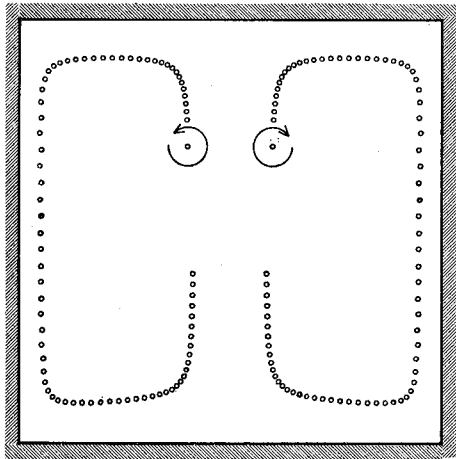
で算定される。ここに、 Γ_i は、 $\mathbf{x}_i$ 地点にある渦素子の循環であり、 $\sum$ は $\mathbf{x}$ 地点以外の渦素子についての合計を意味している。

境界条件式 (2), (3), (4) の時間差分のスキームには、ここではやはり Kioka (1983) にならって初めの

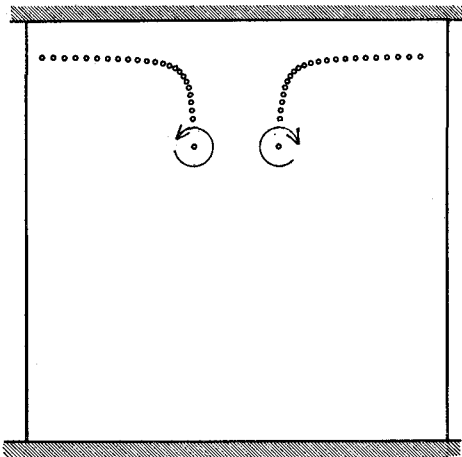
数ステップにおいては Runge-Kutta-Gill 法を用い、その後はそれを出発値として予測子修正子法の一つである Adams-Moulton 法を用いている。

3. 本計算法の妥当性の検討

まず、本計算の妥当性を検討するために、固定壁に囲まれた境界内における一対の互いに逆向きの渦の動きを計算してみた。図-3 (a) はその結果を渦素子の軌跡の形で示したものである。これを見ると、最初互いの上向きの誘起速度によって上の壁に向かって進み、壁に近づくと互いに離れて各渦が壁に沿って運動している様子がよく表されていることがわかる。図-3 (b) は、比較のため、従来の鏡像を用いた場合の計算結果を示した



(a) 本計算法による計算結果



(b) 鏡像法による計算結果

図-3 固定境界の場合の渦対の軌跡

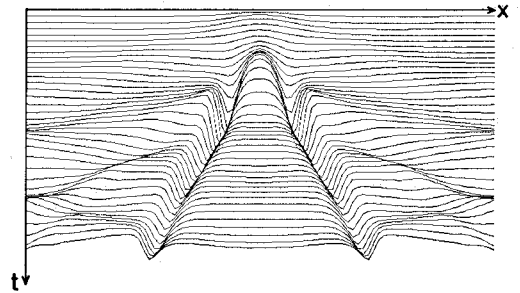


図-4 自由表面の経時変化

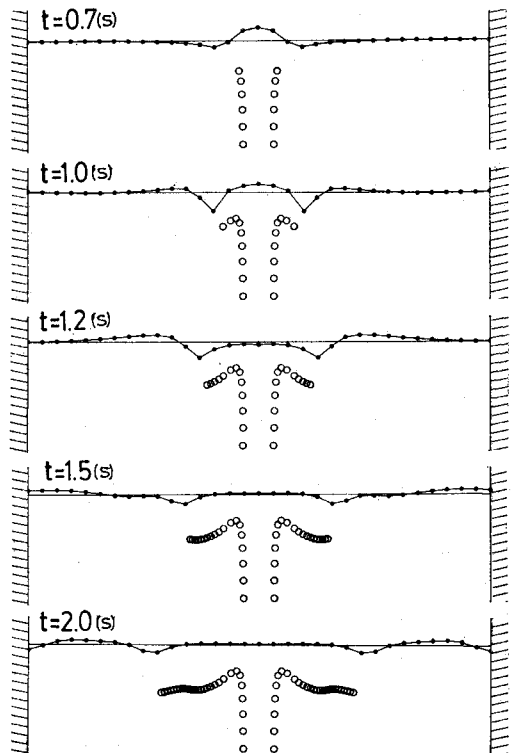


図-5 渦素子とそれに対する自由表面の挙動

ものである。ただし、閉じた固定境界内の計算だと複雑になるので、ここでは上側境界を半無限境界とした場合の計算値を示している。これらを比較すると、渦の軌跡は互いに良く一致しており、鏡像を用いない本計算方法の妥当性を示している。

4. 計算例と考察

図-4 は上側境界を自由表面とした場合の計算結果の一例で、静止水面に対して下方から強さの等しい互いに逆向きの渦対を当てたときの自由表面の挙動を示したものである。この場合には、波のみの場合と違って自由表面上の水粒子が渦によってある特定の方向にはき寄せられるため、時間の経過とともに節点間隔が極端に変化してくることになる。そこでここでは、各時間ステップごとに水表面上の節点位置を内挿によって等間隔になるように再配置している。計算条件は、計算領域の広さ: 150×100 cm, 循環の強さ: $31 \text{ cm}^2/\text{s}$, 初期渦対間隔: 10 cm, 初期渦対位置: $z = -30$ cm, である。図-4 の計算結果を見ると、最初自由表面の中央部に盛り上がりが生じ、その後、比較的伝播速度が速い波動の部分と、局所的に大きな水位変動を伴った遅い伝播速度を有する部分が左右に広がっていった様子がわかる。

図-5 は、渦対の動きと連動させて自由表面の変化を図示したものである。まず、渦素子の動きに着目してみると、渦素子は固定壁の場合に比べてさらに上昇し、そ

れに対応して水表面が上昇しており、水表面が渦運動に対していわば“ソフトな boundary”として作用していることがわかる。その後、水表面の降下とともに、渦はそれに連動した水表面の変形を伴い左右に分かれて進んでいるのがわかる。(このときの自走速度は、固定壁とした場合の約 70% となっている。) この変形は、図-4 中の伝播速度の遅い局所的な水位変動を伴った部分に対応しており、渦運動に伴った一種の forced-wave としてとらえることができる。さらにこれとは別に、最初の水表面の盛り上がり解放されて発生する free-wave の部分が観察され、渦の進行よりも早いスピードで左右に進んでいるのがわかる。図-6 は、このような渦と自由表面の挙動に対応する流速場の計算値の一例として、 $t = 1.0$ s での ϕ_p と ϕ_e に対応する流速場ならびに合成流速場を示したものである。

上記の現象をエネルギー的な観点からみると、渦が水表面に近づくにしたがい、水表面が盛り上がることによって渦の運動エネルギーの一部がポテンシャルエネルギーに変換され、さらにそれが波動エネルギーになることによって渦から波へのエネルギーの移行が生じていると解釈することができる。したがって、波動へのエネルギー移行量は初期の水面の盛り上がり量 $\eta_{\max}$ によって支配されることになるが、それは渦対中央部での代表速度を U とすると $\eta_{\max} \sim U^2/2g$ で関連づけられる。一方この U は、渦対の循環 Γ と間隔 b により $U \sim \Gamma/b$ として表すことができるので、けっきょく、 $\eta_{\max}$ は比例係数を α として次式で見積れるものと考えられる。

$$\eta_{\max} = \alpha \Gamma^2 / (gb^2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

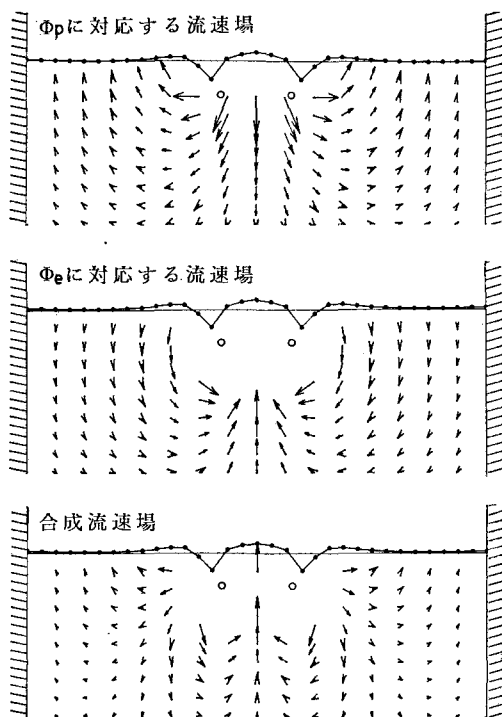


図-6 ϕ_p と ϕ_e に対応する流速場ならびに合成流速場

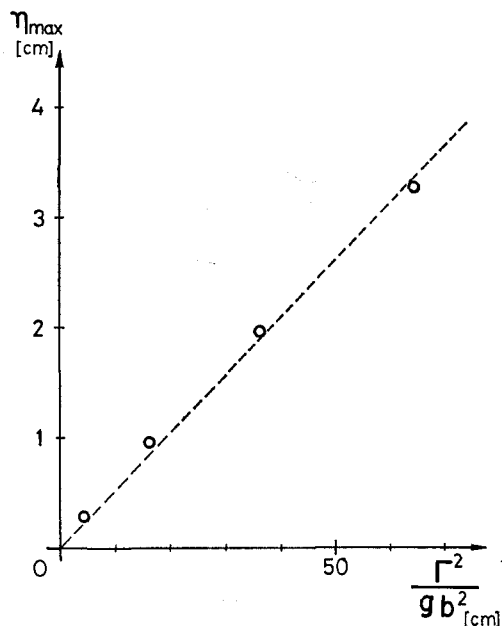


図-7 $\eta_{\max}$ と $\Gamma^2/(gb^2)$ の関係

図—7 は、この関係を確かめるために実際に循環の値を4 ケースほど変えて $\eta_{\max}$ を計算し、プロットしてみたものである。これより、式(9)で示した $\eta_{\max}$ の循環 Γ への依存性が確かめられ、このときの α の値としては $\alpha=0.25$ となることがわかる。

5. あとがき

本研究の内容をまとめると次のようになる。

(1) ここで示した考え方に基づいて、「波」と「渦」の相互干渉過程を解析するための簡便でかつ一般性のある計算法を新たに開発した。

(2) また、それによる自由表面近傍の渦対の運動の解

析等を通じて基本的な相互干渉過程の内容を明らかにすることが出来た。

この解析手法の適用例は現段階ではまだ限られているので、今後、手法の改良と並行してさまざまなケースに適用して行きたいと考えている。

参 考 文 献

- 灘岡和夫・小谷野喜二・日野幹雄(1985): 二成分光ファイバー流速計を用いた砕波帯内流速場の特性の解明, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 50~54.
- Kioka, W. (1983): Numerical analysis of breaking waves in a shallow water, Coastal Eng. in Japan, Vol. 26, pp. 11~18.