

クノイド波による回折波波力の算定方法とその適用性について

喜 岡 渉*

1. ま え が き

構造物の径に比べて入射波の振幅が十分に小さく、流体のはく離による影響が無視できるときには、回折波理論に基づく作用波力の算定が行なわれる。こうした回折波力の算定には、通常、線形回折波理論が用いられるが、波の非線形性の影響を適確に評価するためには、入射波として設定した波動理論に対応する非線形回折波理論に基づく取り扱いが必要となろう。

ストークス型のせつ動法を用いた第2次近似解についてはすでに任意形状の構造物に対する算定方法が検討されているものの^{1)~3)}、長波領域においては円柱を対象とした波力算式が Isaacson^{4),5)} によって提示されているにすぎない。また、各理論解の適用性についても十分に検討されておらず、特にストークスの2次解における非線形項の計算の収束性が悪くなる長波領域での比較検討は行なわれていない。一方で、こうしたせつ動解に基づかない境界積分方程式法を利用した算定方法⁶⁾も提案されており、入射波として仮定した波動理論をそのまま初期条件として取り扱うため任意の条件下での計算が可能であるが、入射波長に比べて構造物の径がある程度以上大きくなると数値的不安定性が生じる問題が残されている。

本研究は、クノイド波理論に基づく非線形回折波理論を用いた任意形状三次元構造物に対する回折波波力の算定方法を検討するもので、Isaacson⁴⁾と同様に第1次近似解を対象とする。また、円柱および角柱の水平方向の波力係数を具体的に求めて実験値と比較することによって、理論解の適用性を調べるものである。

2. クノイド波の回折理論

速度ポテンシャル ϕ の存在する流体運動を考え、座標系としては $x-y$ 平面を水底面と一致させ、 z 軸を鉛直上向きに正となるようにとる。水深は一定で h とし、入射波の波高を H 、波長を L として次のように無次元独立変数 (x^*, y^*, z^*, t^*) を定義する。

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad z^* = \frac{z}{h}; \quad t^* = \frac{\sqrt{gh}t}{L} \quad \dots (1)$$

さらに、速度ポテンシャル ϕ 、平均水深からの水位変動 η についても次のように無次元化する。

$$\phi^* = \frac{h\phi}{HL\sqrt{gh}}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{H} \quad \dots (2)$$

次式で示される二つのパラメーター ε, δ を用いて、

$$\varepsilon = \frac{H}{h}, \quad \delta = \left(\frac{h}{L}\right)^2 \quad \dots (3)$$

ラプラス方程式、水底での境界条件式、自由表面における運動学的境界条件式および力学的境界条件式を無次元表示すれば次のように書き換えられる。

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad \dots (4)$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{at } z^* = 0 \quad \dots (5)$$

$$\delta \left[\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \varepsilon \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \right) \right] = \frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} \quad \text{at } z^* = 1 + \varepsilon \eta^* \quad \dots (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \eta^* + \frac{1}{2} \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right) \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} \right)^2 = 0 \quad \text{at } z^* = 1 + \varepsilon \eta^* \quad \dots (7) \end{aligned}$$

ここで、式 (4) および式 (5) を満足するように ϕ^* を次式のように置く。

$$\phi^* = \Phi^* - \frac{z^{*2}}{2!} \delta \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^{*2}} \right) + O(\delta^2) \quad \dots (8)$$

上式を式 (6) および式 (7) に代入して η^* を消去し、さらに式 (9) のようにせつ動展開できるものとする、 δ の0次のオーダーとして式 (10) を得る。

$$\Phi^* = \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \Phi_m^* \quad \dots (9)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Phi_0^*}{\partial y^{*2}} - \frac{\partial^2 \Phi_0^*}{\partial t^{*2}} = 0 \quad \dots (10)$$

上式を満足する解は ε の1次のオーダーで次式で与えられる。

$$\frac{\partial \Phi_0^*}{\partial x^*} = \varepsilon \left[cn^2 q - \frac{E/K - 1 + \kappa^2}{\kappa^2} \right] \quad \dots (11)$$

ここに、 cn はヤコビの楕円関数を示し、 κ は母数、 K ,

E はそれぞれ第1種および第2種完全楕円積分で、 $q = K(kx - \omega t)/\pi$ である。なお、1次のオーダーではアーセル数 U_r は母数 κ と次の関数式が成り立つ。

$$U_r = HL^2/h^3 = 16\kappa^2 K^2/3 \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(11)の楕円関数 $cn^2 q$ をフーリエ級数展開した上で x について積分して次元量に変換すると、入射波の速度ポテンシャル Φ_0^I は次式のようにあらわされる。

$$\Phi_0^I = \frac{\sqrt{gh}}{k} \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{im} e^{im(kx - \omega t)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、フーリエ係数 A_m は κ のみの関数として与えられる⁴⁾。

求めるべき散乱波ポテンシャル Φ_0^S を次のように置くと、

$$\Phi_0^S = \frac{\sqrt{gh}}{k} \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{im} \phi_m^S e^{-im\omega t} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ϕ_m^S は式(10)よりヘルムホルツの方程式(15)を満たし、かつ物体浸水表面 S 上における式(16)と無限遠方における radiation 条件を満足する関数として与えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi_m^S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_m^S}{\partial y^2} + m^2 k^2 \phi_m^S = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial \phi_m^S}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 $\mathbf{n}$ は外向法線ベクトルとする。

一旦 ϕ_m^S が求まれば、圧力方程式より ε の1次のオーダーでは次式により動水圧 p が計算される。

$$\frac{p}{\rho g H} = \frac{\eta}{H} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m (e^{imkx} + \phi_m^S) e^{-im\omega t} \quad \dots\dots\dots (17)$$

また、波力 $\mathbf{F}$ およびモーメント $\mathbf{M}$ はそれぞれ式(18)、(19)を数値積分することによって求めることができる。

$$\mathbf{F} = - \int_S p \mathbf{n} dS \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\mathbf{M} = - \int_S p (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 $\mathbf{r}$ は物体浸水面の位置ベクトルを示す。

3. 数値計算の方法

式(15)および radiation 条件を満足する ϕ_m^S はポテンシャル理論により次式のようにあらわすことができる。

$$\phi_m^S = \frac{1}{4\pi} \int_S f(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) dS \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 (x, y) 、 (ξ, η) はそれぞれ計算点とソース点を示し、グリーン関数 G は0次の第1種ハンケル関数 $H_0^{(1)}$ を用いて次式で与えられる。

$$G = i\pi H_0^{(1)}(mkR) \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 R は計算点とソース点の水平距離を示し、 $R = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$ である。強度関数 f は境界条件式(16)から次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} -f(x, y) + \frac{1}{2\pi} \int_S f(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial n}(x, y; \xi, \eta) dS \\ = -2in_\kappa e^{imkx} \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ここに、 n_κ は $\mathbf{n}$ の x 方向成分を示し、上式は z の座標点には無関係となる。

積分方程式(22)は、四辺形の一定要素 AS_j ($j=1, N$) を用いて物体表面を分割し、各要素内の重心点に節点を配置することによって、次の線形連立方程式として近似的に解くことができる。

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} f_j = b_i \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 b_i は式(22)の右辺の既知数を示し、 α_{ij} はクロネッカーデルタを δ_{ij} として次式で与えられる。

$$\alpha_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{AS_j}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial n}(x_i, y_i; \xi_j, \eta_j) \quad \dots\dots\dots (24)$$

また、任意点 (x_i, y_i) における散乱波ポテンシャルは次の数値積分により得られる。

$$\phi_m^S = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} f_j \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 β_{ij} の算定には $i=j$ のときの特異性を考えて次の各式を用いるものとする。

$$\beta_{ij} = \frac{AS_j}{2\pi} G(x_i, y_i; \xi_j, \eta_j) \quad (i \neq j) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\beta_{ii} = -\frac{AS_i}{2\pi} \left[\ln \frac{mk}{2} \left(\frac{AS_i}{\pi} \right)^{1/2} + E - 1 - i \frac{\pi}{2} \right] \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 E はオイラー定数を示す。

なお、任意平面形状を有する柱状構造物のように z 方向に形状が変化しない場合には、積分方程式(22)は z 方向の各点で成り立つことから、断面曲線 l まわりの線積分方程式としてあらわすことができる。このとき、上式中の面要素 AS_j は中点を節点とする線分要素 Al_j に置き換えることができる。また、波力およびモーメントは、物体の代表長を a として水平方向成分について無次元表示すると、それぞれ次のように表示することができる。

$$\frac{\mathbf{F}}{\rho g H a h} = - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \oint (e^{imkx} + \phi_m^S) n_x dl \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{\mathbf{M}}{\rho g H a h^2} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}}{\rho g H a h} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ただし、 y 方向にも波力成分が生じるときには式(27)の n_x を n_y と置き換えた計算が必要となる。

4. 計算結果と考察

線形解のみを算定する場合と比べると m 倍の波数に対応する散乱波ポテンシャルの計算が必要となることから、アーセル数 U_r が大きくなるに従って、解析精度上分割要素数を多くとらなければならない(図-1参照)。ここでは水深 h の水底に置かれた一辺が b の正方形断面を有する柱状構造物を対象として、 A_m は第10項までとることとし、用いる線分要素数は120とした。この場合、半径が a で $ka=3.0$ の円柱について A_m を第20

項まで展開して求めた解析解と数値解を比較したところ、 $U_r=300$ のケースに対してその差異は2%程度であった。

計算結果を最大波力が生じる位相差とともに図-2に示す。図には、比較のため、正方形断面と同一の断面積を有する半径が $b/\sqrt{\pi}$ の円柱に対する計算結果も示してある。図から明らかなように、波力係数は U_r の増加に伴って大きくなっている。ただし、円柱の場合、 kb が1.5以上で U_r がある程度以上になると、 U_r の増加に伴って波力係数はむしろ減少している。同一断面積に対する波力係数は正方形断面の方が円形断面に比べて常に大きく、両者の差異は kb および U_r が大きくなるほど著しくなっている。位相差については、 U_r が大きいほど

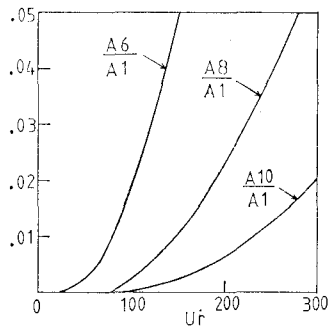
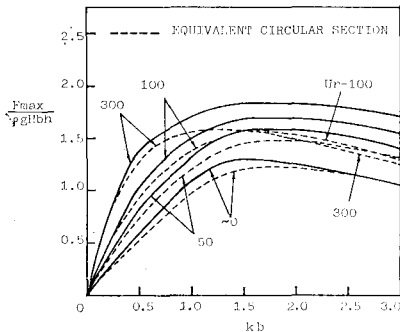
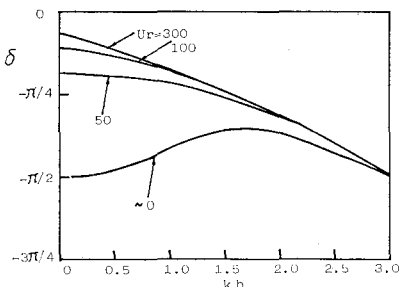


図-1 アーセル数 U_r による係数値 A_m の変化



(a) 波力係数



(b) 位相差

図-2 角柱および円柱の水平方向波力係数

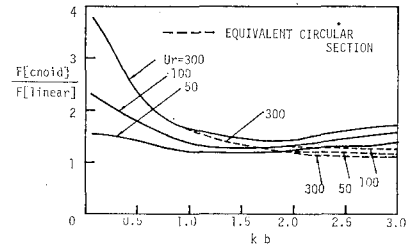


図-3 線形解に対する比率の変化

ど小さくなっており、その差異は kb が小さいほど著しい。特に $kb \approx 0$ では、線形解と比べると $\pi/2$ 近くの位相差が見られる。なお、断面形状による位相差のずれはグラフ上ではあらわれない程度である。

図-2で、 $U_r \approx 0$ の計算結果は当然のことながら線形長波解と一致するので、この値との比をとれば波力に及ぼす波の非線形性の影響の度合いを調べることができる。図-3にこうして得た計算結果を示す。 U_r の値による差異は kb の値が小さい時の方が大きくなっており、波力に対する波の非線形性は回折パラメーターが小さい領域においてより重要であるといえる。また、 kb の値が比較的大きくなると円柱よりも角柱に対する比率の方が大きくなっており、この領域では角柱の方が非線形性の影響をより強く受けることになる。

5. 実験値との比較

ここで示したクノイド波理論の第1次近似解の適用性を、ストークス波理論第の2次近似解および線形解との関連において検討するために、直立円柱および角柱に対する水平方向の波力係数の実験値を各理論解と比較した。

図-4(a), (b) は直径が D の円柱に対する結果を示したもので、図中にはストークス2次解¹⁾と Mogridge・Jamieson⁷⁾ による測定値も示してある。ただし、彼らの実験値は1周期間における二つの極値の絶対値の平均として求められているため、ここで示した理論解も二つの極値の平均をとっている。したがって、ここで比較した係数値は正の最大値よりも常に小さくなっている。両ケースともにクノイド1次解は実験値に比べてやや過大となっているが、相対水深 kh が小さいケース(a)については実験値と比較的良好一致している。

一辺が b の正方形断面を有する角柱に対する結果を図-5(a)~(f)に示す。このうちケース(c)から(f)の測定値は Mogridge・Jamieson⁸⁾ によるもので、円柱の場合と同様に波力係数は二つの極値の絶対値の平均として求められている。ストークス2次解²⁾ も数値的に求める必要があるが、 kh の値が最も小さいケース(a)については収束解を得ることができなかった。

アーセル数が比較的大きいケース (a), (b) の実験値は今回測定した結果で、波力係数は正の最大値について比較してある。実験にあたっては、一辺が 18 cm のアクリル製角柱を設置し、上端固定の片持梁形式の波力計を用いた。角柱と水槽底面とのすき間の影響をできるだけ小さくするためと波形勾配の大きい波を作用させた

め、木製のステップ型断面模型を設けて、角柱の下端が一定水深部の水平床より下になるように設置した。水平床上での水深は、ケース (a) において 8 cm, ケース (b) では 14 cm とした。また、用いた波の周期はともに 1.9 sec である。

ケース (d) における断面の波向き角 α が 45° の結果

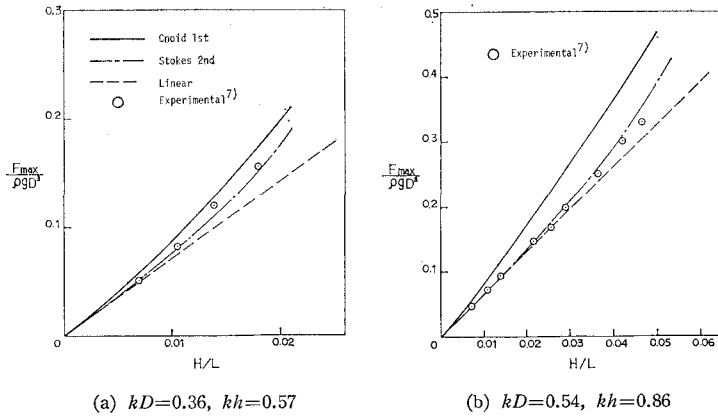


図-4 円柱の波力係数値の比較

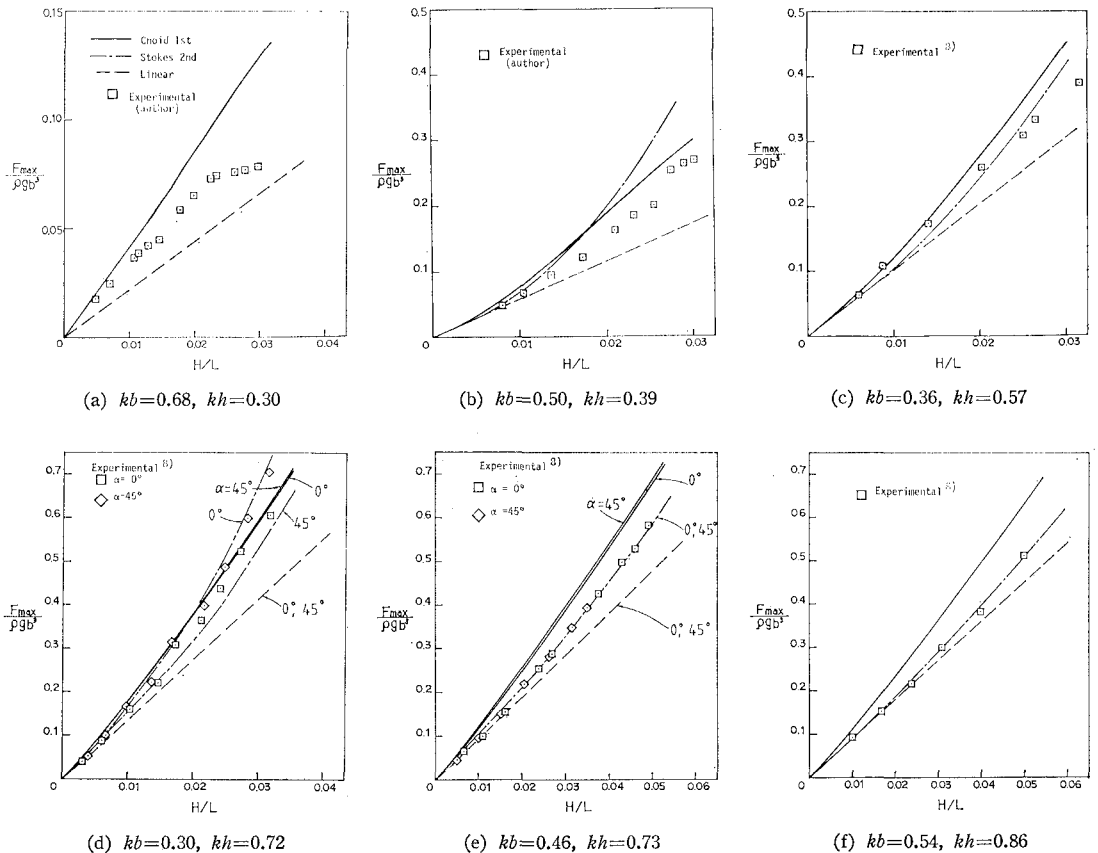


図-5 角柱の波力係数値の比較

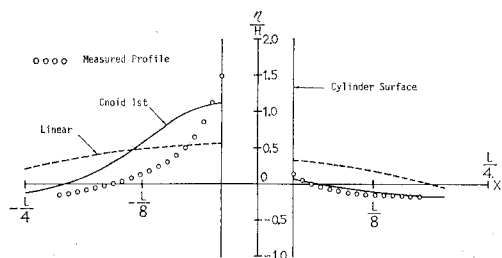


図-6 最大波力発生時における角柱付近の空間波形の比較

を除くと、円柱の結果と同様に、クノイド1次解はすべてのケースの実験値に対して過大となる傾向が見られる。相対水深 kh が比較的大きいケース (c), (f) については、ストークス2次解は実験値と良く一致しているのに対してクノイド1次解はかなり過大となっている。相対水深が小さいケース (b) では、ストークス2次解の方が実験値と比べて過大となり、クノイド1次解の適用性の方が良い。最もアーセル数が大きいケース (a) の砕波点付近の測定値に対してはクノイド1次解は著しく過大となっており、線形解の方がやや過小となるもののむしろ一致度が良い。

ここで対象としたクノイド波理論解は第1次近似解と低次オーダーであるため、波高水深比が大きくなると精度は低下する。図-6は、ケース (b) において $H/L = 0.028$ の時の空間波形を最大波力が生じた位相について比較したものである。柱体後面ではクノイド1次解は実験値と良く一致しているものの、前面については実験値の方が run-up が高く波形もやせている。線形理論値は柱体前面の run-up の測定値の半分にも満たない。こうした波形の再現性の精度は、特にケース (a) において、 H/L が 0.025 以上になり柱体前面に部分重複波性の砕波が生じるようになると著しく悪くなっている。これに伴って、波力係数の適用性も低下している。

6. 結 語

任意形状の構造物に対してクノイド波理論の第1次近似解に基づく回折波力の算定方法を提案するとともに

に、円柱および角柱の水平方向波力係数を具体的に求めることによって理論解の妥当性を検討した。ここで示した解析方法によれば、回折パラメータまたはアーセル数が大きくなると計算効率は若干悪くなるものの、ストークス波理論の第2次近似解の収束解を得られない領域においても比較的簡単に数値解を得ることができる。また、ストークス2次解における自由表面での非線形項の計算プロセスは不要となるため、線形解を求める計算プログラムに若干の修正を加えるだけで適用が可能になる。

円柱および角柱の水平方向波力係数について実験値と比較したところ、相対水深 kh がおよそ 0.6 より小さい領域ではクノイド1次解の適用性は良いことがわかった。ただし、柱体前面で部分的な砕波が生じるようになると理論値は実験値に対して過大になる傾向が見られた。

最後に、本研究は日本鋼管(株)重工研究所からの研究助成金を得て行なわれたことを付記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 喜岡 渉・石田 昭: 円柱に作用する第2次近似回折波力, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 620~624, 1984.
- 2) 喜岡 渉: 柱状構造物に作用する非線型回折波力, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 576~580, 1987.
- 3) 増田正一・永井孝志: 複数の柱状体に作用する非線形波力に関する研究(第2報), 日本造船学会論文集, 第162号, pp. 235~242, 1987.
- 4) Isaacson, M.: Shallow wave diffraction around large cylinder, Jour. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., ASCE, Vol. 103, No. WW1, pp. 69~82, 1977.
- 5) Isaacson, M.: Solitary wave diffraction around large cylinder, Jour. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., ASCE, Vol. 109, No. 1, pp. 121~127, 1982.
- 6) 喜岡 渉: 任意形状三次元構造物に作用する非線型回折波力, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 481~485, 1986.
- 7) Mogridge, G. R. and Jamieson, W. W.: Wave loads on large circular cylinders—A design method, National Research Council of Canada, Rept. No. MH-111, Hydraulics Lab., Ottawa, 1975.
- 8) Mogridge, G. R. and Jamieson, W. W.: A design method for estimating wave loads on square caissons, National Research Council of Canada, Rept. No. LTR—HY—57, Hydraulics Lab., Ottawa, 1976.