

フレキシブルマウンドの反射・透過特性の解析

大山 巧*・田中正博*・清川哲志**
宇多高明***・村井 禎美****

1. はじめに

著者らは、新しいタイプの没水型波浪制御構造物として、可撓性膜の中に水を詰めた柔構造の潜堤（フレキシブルマウンド、以下 FLM と呼ぶ）を提案し、波の反射・透過特性を実験的に検討した¹⁾。そして、構造物の天端が低く、従来の剛な潜堤では防波効果が期待できない場合でも、FLM では波の透過率を低くできることを明らかにした。さらに著者らは、この現象が主に FLM の運動に伴って発生する radiation wave の効果によるものであるという仮説をたて、単純な 1 自由度振動モデル (Radiation Wave Generator) に対する数値解析結果によりそれを定性的に検証した²⁾。

本研究は、これら一連の研究に引き続き FLM の反射・透過特性を理論的に検討するものである。なお、著者ら³⁾ が先に提案した非線形波動水槽による解析では、波と膜の有限振幅性が考慮できるが、基本特性を論じるための手法としては実用的ではなかった。そこで、本研究では線形理論に基づく数値解析法を新たに提案し、模型実験結果との比較からその妥当性を検証する。そして、解析結果をもとに radiation wave の効果をより明確にするとともに、FLM 内部に付加する水圧や膜の弾性率等のパラメータが波の透過特性に及ぼす影響を論じる。

2. lumped-mass 系による可撓性膜のモデル化

図-1 に示すように、一定水深 h の海域に FLM があり、 x 軸の正の方向から波高 H_0 、角振動数 ω の微小振幅波が入射するものとする。ただし、可撓性膜の両端は回転自由の状態海底面に固定され、FLM 内部の水は密閉されているものとする。可撓性膜を連続体として取扱うことは困難なので、本理論ではこれを質点-線形バネ系に離散化する。この際、膜は伸びがない状態で等分に分割するものとし、バネ要素の初期長さ（伸びがないときの長さ） l_0 と各質点の質量 m_0 は一定とする。また、質点番号は透過側の固定点を 1 番目として順に定義

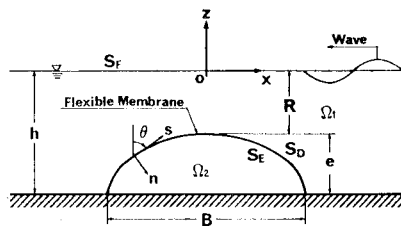


図-1 座標系と記号の定義

し、 j 番目と $j+1$ 番目質点の間のバネ要素の番号を j とする。

波による質点の運動を定常波動運動と仮定し、 j 番目質点 ($j=2 \sim N-1$, N : 質点数) の x, z 方向の複素変位を $(a_x)_j e^{-i\omega t}$, $(a_z)_j e^{-i\omega t}$ (t : 時間) とする。このとき j 番目要素の長さ l_j は、質点変位に関する級数展開により、高次の非線形項を無視すると次のように表される。

$$l_j = l_0 + \Delta l_j$$

$$\Delta l_j = \Delta \bar{l}_j + H^T \{ (a_x)_j \sin \bar{\theta}_j + (a_z)_j \cos \bar{\theta}_j \} e^{-i\omega t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} (a_x)_j^T &= ((a_x)_j \quad (a_x)_{j+1}) \\ (a_z)_j^T &= ((a_z)_j \quad (a_z)_{j+1}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$H^T = -(-1 \quad 1) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\Delta \bar{l}_j$, $\bar{\theta}_j$ は、静水時の j 番目要素の伸びおよび θ (図-1 参照) を表す。さらに、 $\sin \theta_j$, $\cos \theta_j$ についても同様な展開をすると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sin \theta_j \\ \cos \theta_j \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin \bar{\theta}_j \\ \cos \bar{\theta}_j \end{pmatrix} + \frac{1}{\bar{l}_j} \left\{ H^T (a_x)_j \begin{pmatrix} \cos^2 \bar{\theta}_j \\ -\sin \bar{\theta}_j \cos \bar{\theta}_j \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + H^T (a_z)_j \begin{pmatrix} -\sin \bar{\theta}_j \cos \bar{\theta}_j \\ \sin^2 \bar{\theta} \end{pmatrix} \right\} e^{-i\omega t} \quad \dots\dots (4) \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{l}_j$ は静水時の要素の長さ ($= l_0 + \Delta \bar{l}_j$) である。なお、 $\Delta \bar{l}_j$, $\bar{\theta}_j$ は、静水時の各質点における力の釣り合い式から決定できる³⁾。

3. 境界積分方程式

(1) 速度ポテンシャルの定義と反射率・透過率

FLM の外部および内部の流体を非圧縮、非粘性、非回転と仮定し、線形ポテンシャル理論によって流体運動を記述する。まず、図-1 に示される FLM の外部領域 Ω_1 と内部領域 Ω_2 における速度ポテンシャル Φ_1 , Φ_2 を

* 正会員 清水建設(株) 技術研究所 環境技術研究所
** 正会員 工博 清水建設(株) 大崎研究室 応用工学グループ
*** 正会員 工博 建設省土木研究所 海岸研究室長
**** 正会員 建設省土木研究所 海岸研究室

次のように定義する.

$$\begin{aligned}\phi_1(x, z, t) &= \frac{gH_0}{2\omega} \{\phi_1(x, z) + \phi_0(x, z)\} e^{-i\omega t} \\ \phi_2(x, z, t) &= \frac{gH_0}{2\omega} \phi_2(x, z) e^{-i\omega t} \\ &\dots\dots\dots (5)\end{aligned}$$

ただし, ϕ_0 は入射波ポテンシャルで次のように表される.

$$\phi_0(x, z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-ikx} \dots\dots\dots (6)$$

ここで, k は波数 ($=2\pi/L_0$, L_0 : 入射波長) である.

波の反射率 K_R , 透過率 K_T は, 線形化した圧力方程式により次のように求められる.

$$\begin{aligned}K_R &= |i\phi_1(x_{\infty}, 0)| \\ K_T &= |i\{\phi_0(x_{\infty}, 0) + \phi_1(x_{\infty}, 0)\}| \\ &\dots\dots\dots (7)\end{aligned}$$

ただし $\phi_1(x_{\infty}, 0)$ は, FLM から十分離れた水面上のポテンシャルを表しており, 計算では FLM から反射側, 透過側に 10 波長離れた位置での値を用いている.

(2) 基礎方程式と境界条件

未知ポテンシャル ϕ_1 と ϕ_2 に関する基礎方程式と境界条件は, 以下のように表される.

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots (8)$$

$$\partial \phi_1 / \partial z - \nu \phi_1 = 0 \quad (\nu = \omega_2/g) \quad (\text{on } S_F) \dots\dots (9)$$

$$\partial \phi_i / \partial z = 0 \quad (i=1, 2) \quad (z = -h) \dots\dots (10)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial |x|} - ik\phi_1 \right) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{2\omega}{gH_0} u_n - \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad (\text{on } S_D) \dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \frac{2\omega}{gH_0} u_n \quad (\text{on } S_E) \dots\dots (13)$$

ただし, 式 (12), (13) の n は可撓性膜上での法線方向 (Ω_1 から見たとき外向き), u_n は膜の法線方向速度の複素振幅である. なお本理論では, 膜は十分に薄く, 膜の内外表面の運動速度は等しいとしている.

式 (12), (13) の u_n は, θ を用いて次のように表せる.

$$\begin{aligned}u_n &= u_x \cos \theta - u_z \sin \theta \\ &= -i\omega(a_x \cos \theta - a_z \sin \theta) \dots\dots\dots (14)\end{aligned}$$

ただし, u_x, u_z は膜の x, z 方向の速度振幅である. ここで, θ は式 (4) に示したように, 膜の運動に伴って変化するが, 式 (14) よりこの変化量は 2 次以上の微小項に対応することから, 線形理論に基づく本理論では無視でき, 結局式 (14) は以下のように置き換えられる.

$$u_n = -i\omega(a_x \cos \bar{\theta} - a_z \sin \bar{\theta}) \dots\dots\dots (15)$$

$\partial \phi_0 / \partial n$ についても同様に次のように表せる.

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \cos \bar{\theta} - \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \sin \bar{\theta} \dots\dots\dots (16)$$

(3) グリーン関数法

式 (8)~(13) に示した ϕ_1, ϕ_2 に関する境界値問題は, グリーン関数とグリーンの定理を用いることにより境界積分方程式に変換できる. まず, 領域 Ω_1 に対してはグリーン関数 G_1 として, 自由表面条件, 海底面の不透過条件および放射条件を満足する関数を用いる. これにより, Ω_1 内の任意の点 P_1 におけるポテンシャル値 $\phi_1(P_1)$ は次のように表せる.

$$-\alpha_1 \phi_1(P_1) = \int_{S_D} \left\{ \phi_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} G_1 \right\} ds \dots\dots (17)$$

ただし係数 α_1 は, P_1 が海底面との交点を除く S_D 上にある場合は P_1 の両側の接線のなす角度, 海底面と S_D の交点上では海底面と S_D のなす角度の 2 倍, その他の点では 2π である. グリーン関数 G_1 は, John⁴⁾ により級数形が, Wehausen and Laitone⁵⁾ により積分形が導かれているが, 本報ではこれらの記述は省略する.

一方, 領域 Ω_2 内の任意の点 P_2 におけるポテンシャル $\phi_2(P_2)$ についても同様に次のように表せる.

$$\alpha_2 \phi_2(P_2) = \int_{S_E} \left\{ \phi_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - \frac{\partial \phi_2}{\partial n} G_2 \right\} ds \dots\dots (18)$$

ここで, グリーン関数 G_2 としては, 次式を用いる.

$$G_2 = \ln(1/r) + \ln(1/r') \dots\dots\dots (19)$$

ただし r および r' は, 点 P_2 および P_2 の海底面に対する鏡像点から S_E 上の点までの距離を表す. また, 式 (18) の係数 α_2 は, P_2 が S_E 上にある場合 $2\pi - \alpha_1$ その他の場合は 2π をとる.

式 (17), (18) に膜表面の境界条件式 (12), (13) を代入し, さらに式 (15), (16) を用いると, 次式を得る.

$$\begin{aligned}&\alpha_1 \phi_1(P_1) + \int_{S_D} \left\{ \phi_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - \frac{2i\omega^2}{gH_0} (a_x \cos \bar{\theta} \right. \\ &\quad \left. - a_z \sin \bar{\theta}) G_1 \right\} ds \\ &= - \int_{S_D} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \cos \bar{\theta} - \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \sin \bar{\theta} \right) G_1 ds \dots\dots (20) \\ &\alpha_2 \phi_2(P_2) - \int_{S_E} \left\{ \phi_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} + \frac{2i\omega^2}{gH_0} (a_x \cos \bar{\theta} \right. \\ &\quad \left. - a_z \sin \bar{\theta}) G_2 \right\} ds = 0 \dots\dots\dots (21)\end{aligned}$$

積分方程式 (20), (21) を離散化し, P_1, P_2 を膜上の質点に一致させることにより, 質点上の速度ポテンシャル $(\phi_1)_j, (\phi_2)_j$ ($j=1 \sim N$), および運動振幅 $(a_x)_j, (a_z)_j$ ($j=2 \sim N-1$) に関する $2N$ 本の連立方程式を得る. なお本解析法では, 線形要素を用いて離散化を行っているが, これについては省略する.

4. 運動方程式

図-2 は質点に作用する力を示したもので, F_j は膜内外の圧力差に伴う流体力, f_j, f_{j-1} はバネ要素に発生

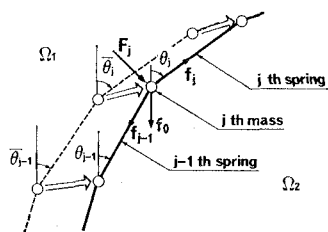


図-2 質点に作用する力

する張力, f_0 は質点の水中重量を表す. このとき, j 番目質点の x, z 方向の運動方程式は以下のように表せる.

$$\begin{aligned} -m_0\omega^2 \begin{pmatrix} (a_x)_j \\ (a_z)_j \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ = \begin{pmatrix} (F_x)_j \\ (F_z)_j \end{pmatrix} + f_j \begin{pmatrix} \sin \theta_j \\ \cos \theta_j \end{pmatrix} - f_{j-1} \begin{pmatrix} \sin \theta_{j-1} \\ \cos \theta_{j-1} \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 \end{pmatrix} \quad (j=2 \sim N-1) \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ただし, $(F_x)_j, (F_z)_j$ は F_j の x, z 成分を表す.

まず流体力 F_j については, $j-1$ 番目要素の中点から j 番目要素の中点までに作用する力を j 番目質点に作用させる. そして, 圧力方程式から求められる圧力が要素内で線形に分布するものと仮定すると, $(F_x)_j, (F_z)_j$ は結局以下のように表せる.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (F_x)_j \\ (F_z)_j \end{pmatrix} &= \frac{P_0}{2} \left\{ l_{j-1} \begin{pmatrix} -\cos \theta_{j-1} \\ \sin \theta_{j-1} \end{pmatrix} + l_j \begin{pmatrix} -\cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{pmatrix} \right\} \\ &+ \frac{i\rho g H_0}{16} \left\{ l_{j-1} (\phi_{j-1} + 3\phi_j) \begin{pmatrix} \cos \theta_{j-1} \\ -\sin \theta_{j-1} \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + l_j (3\phi_j + \phi_{j+1}) \begin{pmatrix} \cos \theta_j \\ -\sin \theta_j \end{pmatrix} \right\} e^{-i\omega t} \quad \dots\dots (23) \end{aligned}$$

$$\phi_j = (\phi_1)_j - (\phi_2)_j + (\phi_0)_j \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし, P_0 は FLM 内部の付加圧力, ρ は流体の密度である.

また, バネ要素に発生する張力 f_j は, 膜の弾性率 E および膜の厚さ ε を用いて次のように表すことができる.

$$f_j = \varepsilon E (\Delta l_j / l_0) \quad \dots\dots\dots (25)$$

さらに, 水中重量 f_0 は膜の密度 ρ_m により次のように表せる.

$$f_0 = (\rho_m - \rho) \varepsilon l_0 g \quad \dots\dots\dots (26)$$

式 (23)~(26) を運動方程式 (22) に代入し, 式中の $l_j, \sin \theta_j, \cos \theta_j$ に式 (1), (4) を代入する. このとき, t には無関係な定常項が現れるが, 静水時の力の釣り合いを考えればこれらの項は結果的に消去できる. 従って, 最終的に $(\phi_1)_j, (\phi_2)_j (j=1 \sim N), (a_x)_j, (a_z)_j (j=2 \sim N-1)$ に関する $2(N-2)$ 本の連立方程式が得られ, これと前述の境界積分方程式 (20), (21) を連立することにより全未知数が決定できる.

5. 模型実験

(1) 実験の概要

本解析法の妥当性を調べるために, 長さ 40 m, 幅 4 m の水槽を用いて模型実験を行った. 実験では, 図-3 に示すように, 模型の反射側, 透過側の 3 箇所ずつで波高を測定し, 反射率, 透過率はそれぞれから得られる値の 2 乗平均値とした. ただし, 反射率の算定には Healy の方法を用いている. 模型は, 弾性率 $E=58000.0 \text{ kN/m}^2$, 密度 $\rho_m=1.26 \text{ ton/m}^3$, 厚さ $\varepsilon=1.65 \text{ mm}$ のゴム膜製で, 模型の側膜 (水槽側壁に接した部分) にも同じ膜を用いている. そして, 模型の延長 (波の入射方向と直交する方向の長さ) は, この側膜の影響をできるだけ小さくするため, 水槽の幅に一致させた. 実験では, 水深 h を 0.8 m, 模型の幅 B を 1.6 m で一定とし, 内部の付加圧力を変化させた. 表-1 に実験条件を示す. ここで, 模型に波を作用させた時, 模型内部の圧力の定常成分は, 静水時に与えた圧力 $\bar{P}_0$ よりも大きくなった. ただし, この原因は現在のところまだ明確ではない. なお表中には, 定常圧力の $\bar{P}_0$ からの最大上昇量 ΔP_0 も示してある.

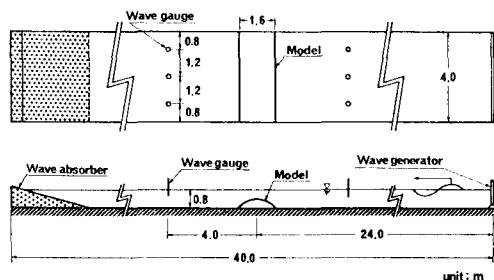


図-3 実験装置

表-1 実験条件

	$\frac{\bar{P}_0}{\rho g h}$	$\frac{R}{h}$	$\frac{\Delta P_0}{\rho g h}$
CASE-1	0.05	0.463	0.015
CASE-2	0.10	0.458	0.016
CASE-3	0.20	0.444	0.008

(2) 数値解析結果との比較

図-4 は, 透過率 K_T と反射率 K_R の B/L_0 に対する特性に関して, 実験結果と解析結果を比較したものである. なお, 解析結果に関しては P_0 として ΔP_0 を考慮した場合 ($P_0 = \bar{P}_0 + \Delta P_0$) としない場合 ($P_0 = \bar{P}_0$) の両方について示した. この図から, 解析結果では $K_T=0, K_R=1$ となる周期が複数存在するのに対して, 実験結果にも K_T が極小, K_R が極大となる現象が見られる. 理論上これらの周期では, FLM の運動に伴って発生す

る radiation wave が、透過側で、構造物を剛体したときの透過波と同じ波高で逆位相を持つため、結果的に K_T が 0 になる。また ΔP_0 を考慮するか否かは、 P_0 の小さい CASE-1, 2 の解析結果に大きな影響を及ぼしている。従って、波が作用した時の定常圧力成分の上昇が、実物でも起こり得る現象か実験上の問題から生じる現象かを見極める上で、今後その原因を究明する必要がある。ただし ΔP_0 を考慮した解析結果は、 K_R の極大値を過大に評価する点、 K_T が極小、 K_R が極大になる周期が若干長周期側にずれる点を除けば実験結果とはほぼ

一致しており、FLM の波の反射・透過特性は本解析結果によりほぼ推定できると言えよう。

6. 各パラメータによる透過特性の変化

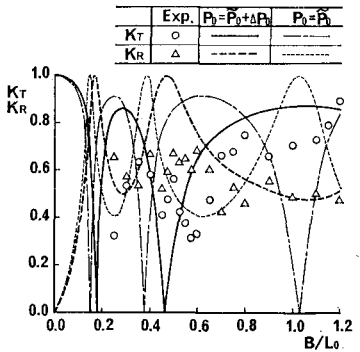
本理論によれば、 K_R , K_T は、以下に示す 7 個の無次元パラメータにより決定される。

$$K_R, K_T = F(B/L_0, B/h, R/h, E/\rho_m Bg, P_0/\rho gh, \rho_m/\rho, \varepsilon/h) \dots\dots\dots (27)$$

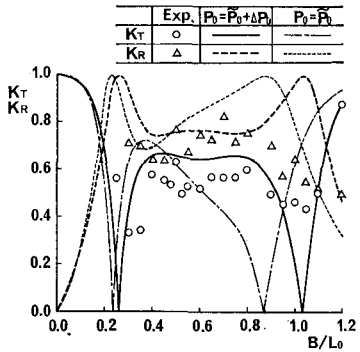
本論文では、式 (27) に示すパラメータのうち実用上特に重要と考えられる R/h , $P_0/\rho gh$, $E/\rho_m Bg$ の透過特性に及ぼす影響を検討する。なお、以下に示す計算例では B/h , ρ_m/ρ , ε/h をそれぞれ 3.0, 1.2, 0.003 で一定とし (ただし図-8 に示す計算例では $\rho_m/\rho=5.0$ としている)、質点数 N は 61 としている。また、本解析結果はエネルギー保存式 $K_R^2 + K_T^2 = 1$ を最大誤差 0.03% で満足することが確かめられたので、 K_R に関する結果は省略する。

図-5 は、 $E/\rho_m Bg=100.0$, $P_0/\rho gh=0.07$ で一定とし、 R/h を 0.3, 0.4, 0.5 としたときの特性の変化を示したものである。一般に剛潜堤では、 R/h が小さくなるほど K_T を下げられることが知られている。一方 FLM では、 K_T を小さくするメカニズムが剛潜堤とは異なり、radiation wave と入射・散乱波との干渉効果が重要になる。そして、radiation wave の周期特性が R/h により異なるため、図-5 に示すように $K_T=0$ となる B/L_0 の値や K_T の極大値も R/h により複雑に変化する。

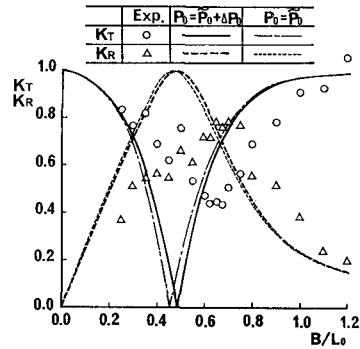
図-6 には、 $E/\rho_m Bg=100.0$, $R/h=0.4$ とし、 $P_0/\rho gh$ を 0.05, 0.10, 0.40 に変化させた結果を示している。まず、 $P_0/\rho gh$ が最も大きい 0.40 では、 $B/L_0 < 0.95$ で K_T が 0 になる B/L_0 が存在せず、この範囲の K_T はかなり大きい。また $P_0/\rho gh=0.05$ では、 $K_T=0$ となる B/L_0 が複数存在するが、それらの間の K_T は大きくなる。このように特定の周期の波に対してのみ K_T を小さくできても、波の周波数不規則性を考えれば、現実的な波浪制御は困難であると言えよう。これに対して



(a) CASE-1



(b) CASE-2



(c) CASE-3

図-4 実験結果と解析結果の比較

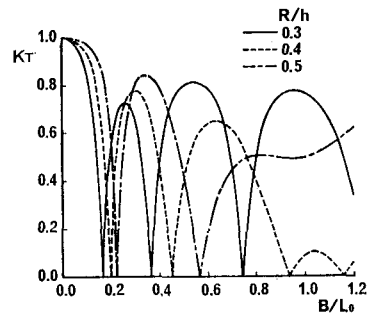


図-5 R/h による透過特性の変化

$P_0/\rho gh=0.10$ では、 K_T の極大値が $P_0/\rho gh=0.05$ の場合よりも小さくなり、広い周期帯で透過率が低くなっている。すなわち、付加圧力を適切な値に設定すれば、現実的な不規則波に対しても高い防波機能が期待できると考えられる。

図-7 は、 $R/h=0.4$ 、 $P_0/\rho gh=0.10$ とし、 $E/\rho_m Bg$ を20.0と1000.0に変化させた結果を示したものであるが、結果にはほとんど差異がない。なお、 $E/\rho_m Bg=50.0, 100.0, 500.0$ についても図-7に示す結果とほぼ同様の結果が得られた。以下、その理由について考察す

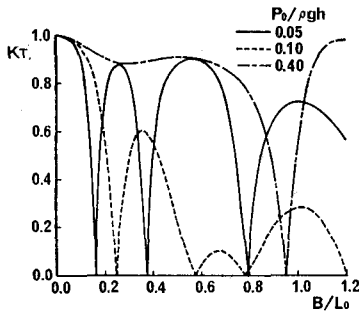


図-6 $P_0/\rho gh$ による透過特性の変化

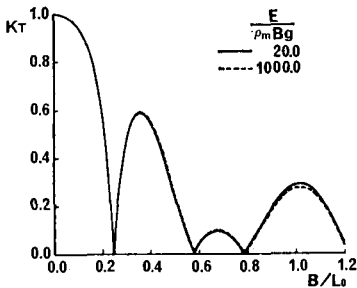


図-7 $E/\rho_m Bg$ による透過特性の変化 ($\rho_m/\rho=1.2$)

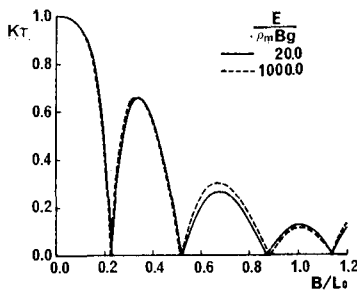


図-8 $E/\rho_m Bg$ による透過特性の変化 ($\rho_m/\rho=5.0$)

る。まず、FLM の外力である流体力は常に膜の法線方向に作用するため、膜の（接線方向の）伸び変動量は2次以上の非線形項になり、線形理論に基づく本理論では、結果的に無視されることになる。従って、静水時のFLMの形状と膜に発生する張力が、膜の弾性率によりどの程度変化するかが問題になる。ここで、静水時の力の釣り合いを考えると、 ρ_m/ρ を大きくすることにより膜の弾性率の影響が大きくなることがわかる（ ρ_m/ρ が1.0のときはFLMの形状は膜の弾性率にかかわらず円弧になり、張力も一定になる）。図-8は、 ρ_m/ρ を1.2から5.0に変えた場合の $E/\rho_m Bg=20.0$ と1000.0の特性を示したものである。両者の差異は図-7の場合に比べて大きい、実用的には無視できる程度であるのがわかる。

7. おわりに

線形理論に基づいてFLMの波の反射率・透過率を求める数値解析法を提案した。以下に主な結論を述べる。

- ① 模型実験では、波の作用時にFLM内部の圧力の定常成分が上昇するが、これを考慮した解析結果は実験結果にはほぼ一致し、解析法の妥当性が確められた。ただし、今後、圧力の上昇の原因を究明する必要がある。
- ② FLMでは、radiation waveと入射・散乱波の干渉効果で、理論上 $K_T=0$ 、 $K_R=1$ となる周期が存在する。
- ③ FLM内部の付加圧力は、反射・透過特性に大きな影響を及ぼす。そして付加圧力として適切な値を設定すれば、広い周期帯で透過率を下げる事が可能になる。
- ④ 膜の弾性率が反射・透過特性に及ぼす影響は、実用上無視できる。

参考文献

- 1) 田中正博・三俣正和・大山 巧・清川哲志・宇多高明・村井被美：フレキシブルマウンドによる透過・反射特性の実験的検討，第34回海岸工学講演会論文集，pp. 492~496, 1987.
- 2) 清川哲志・三俣正和・田中正博・大山 巧：可動板型 Radiation Wave Generatorによる波浪制御，第34回海岸工学講演会論文集，pp. 472~476, 1987.
- 3) 大山 巧・田中正博・清川哲志・三俣正和：フレキシブルマウンドによる波の変形の解析，第34回海岸工学講演会論文集，pp. 497~501, 1987.
- 4) John, F.: On the Motion of Floating Bodies II, Communication in Pure and Applied Mathematics, Vol. 3, pp. 45~101, 1951.
- 5) Wehausen, J. V. and E. V. Laitone: Surface Waves, Encyclopedia of Physics, Vol. 9, pp. 446~778, 1960.