

波動場と振動流場の違いに着目したシートフローの理論解析

灘岡和夫*・上野成三**・八木 宏***

1. はじめに

海岸の漂砂を考える場合に重要となる碎波帯付近の底質移動は、主としてシートフロー状の移動形態をとる。このシートフローに関する従来の研究では、底面の水平流速に基づく底面せん断力（シーلز数 ϕ ）をその基本的外力として取り扱っており、その際ももとの波動場としての流速場を振動流場に置き換えて論じているものがほとんどである（香取ら¹⁾、樫木ら²⁾、日比・山下³⁾、Bakker⁴⁾, etc.）。その場合には、一周期後の実質的な底質移動は水平流速が正弦波である場合には生じないことになり、必然的に底面水平流速波形の非対称性のみに起因するとして Net の底質輸送が取り扱われている。

本研究は、このような従来のシートフローに関する取扱いの基本的な枠組みそのものに対する疑問に端を発している。すなわち、実際の波動場のもとにおいてはシートフローがある有限の層厚をもつことから層内にはわずかながら鉛直流速が存在するが、シートフロー層内では底質濃度が鉛直方向に急激に変化しているため、たとえわずかでも鉛直流速が存在することによって層内の底質移動形態が振動流中の場合と大きく異なってくる可能性がある。

そこで、本研究では実際の波動場におけるシートフロー層内の流速場と濃度場を Galerkin 法を用いて解析的に求めることにより、波動場におけるシートフロー状の底質移動の特性を解明することを試みた。その結果、層内の鉛直流速の効果により、たとえ対称な正弦波のもとでも波の進行方向への有意な大きさの Net の底質移動が発生することが明らかにされた。

2. 解析方法

(1) 基礎方程式ならびに無次元化

ここでは、シートフロー層のモデル化として、樫木ら²⁾や日比・山下³⁾にならってシートフロー層を底質の体積濃度 c によって変化する仮想的な粘性係数 μ^* をも

つニュートン流体と仮定した。これは実際のシートフローと比較するとかなりの簡略化であるが、底質濃度に対する底質粒子の動きやすさの依存性という現象の本質をきわめてシンプルな形でとり込んだモデルとなっている。また、流体運動は簡単のため層流状態とし、底質の時間平均濃度 $\bar{c}$ は既知として与えた（もちろんこの $\bar{c}$ の決定メカニズム自体非常に重要な問題であり、今後究明すべき重要課題である）。

基礎方程式は、水平・鉛直方向の運動方程式 (1)、(2) と、流体ならびに底質の質量保存式 (3)、(4) である。ここで用いる座標系は波速 C で波と共に進む移動座標系とし、水平方向に x 軸をとり波の進行方向を正とし、鉛直方向に z 軸をとり、時間平均濃度 $\bar{c}$ の変曲点を基準に鉛直上向きを正とした。

$$\begin{aligned} & -C \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\mu^*}{\rho} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\mu^*}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -C \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\mu^*}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\mu^*}{\rho} \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$-C \frac{\partial c}{\partial x} + u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 u は水平流速、 w は鉛直流速、 p は動圧、 ρ は密度、 c は底質の体積濃度であり、すべて x, z の関数である。また、仮想的な粘性係数 μ^* と底質の体積濃度 c の間の関係式としては、次式の Eilers の式 (5) を用いた。

$$\frac{\mu^*}{\mu_0} = \left(1 + \frac{1.25c}{1-1.35c} \right)^2 \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 μ_0 は流体のみの粘性係数である。

次に、式 (1)~(3) を以下のように無次元化する。

$$x' = kx, \quad z' = \beta z, \quad u' = u/u_0, \quad w' = w/w_0,$$

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 工修 大成建設(株)

*** 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

$$p' = p/p_0, \quad \mu' = \mu^*/\mu_0, \quad \rho' = \rho/\rho_0.$$

ここに、 k は波数、 β は時間平均濃度 $\bar{c}$ の鉛直分布の代表長さの逆数、 u_0, w_0, p_0 はそれぞれ $z=\infty$ での水平流速、鉛直流速および動圧の振幅である。また μ_0, ρ_0 は流体の粘性係数および密度を表している。

この無次元化によって、式 (1)~(3) は下記のようになる (ただし、簡単のため、 ν をとって記してある)。

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial u}{\partial x} + u_0 \frac{k}{\omega} u \frac{\partial u}{\partial x} + w_0 \frac{\beta}{\omega} w \frac{\partial u}{\partial z} \\ & = -\frac{k}{\omega} \frac{1}{\rho_0} \frac{p_0}{u_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu_0}{\omega} \nu \left(k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ & \quad + 2 \frac{k^2}{\omega} \nu_0 \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \frac{\partial \nu}{\partial z} \left(\frac{w_0}{u_0} \frac{k}{\beta} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial w}{\partial x} + u_0 \frac{k}{\omega} u \frac{\partial w}{\partial x} + w_0 \frac{\beta}{\omega} w \frac{\partial u}{\partial z} \\ & = -\frac{\beta}{\omega} \frac{1}{\rho_0} \frac{p_0}{w_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu_0}{\omega} \nu \left(k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ & \quad + \frac{\nu_0}{\omega} k^2 \frac{\partial \nu}{\partial x} \left(\frac{u_0}{w_0} \frac{\beta}{k} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + 2 \nu_0 \frac{\beta^2}{\omega} \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{u_0}{w_0} \frac{k}{\beta} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

ここで、 ω は角周波数、 $\nu = \mu'/\rho'$ 、 $\nu_0 = \mu_0/\rho_0$ である。

(2) Galerkin 法による計算

通常、シートフローの解析は、基準点濃度やシートフロー層厚という不確定な (すなわち、本来境界条件としてではなく解析の結果として定まるべき) 要素を境界条件にとり込んで行われている場合が多い。これに対して本研究では、以下に述べるように、Hermite 関数を試験関数とした Galerkin 法を用いることによって、境界条件を本来設定すべき $z=\pm\infty$ の位置で合理的な形で与えることができる。以下、具体的に Galerkin 法を用いて、式 (6)~(8) より、 u, p を求めることを考える。

まず p_0 は、式 (6) での $z=\infty$ における関係から次式のように表せる。

$$p_0 = \omega \rho_0 u_0 / k \quad (9)$$

さらに、式 (7) を z に関して偏微分し、式 (8) を用いて w を消去すると、式 (6)、(7) は結局次式となる。

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{\beta^2}{k^2} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} \\ &\quad - \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} - 3 \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ &\quad - 2 \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、上式を導出する過程で微小項は省略してある。

次に、 u, p を複素数表示して次式のように表す。

$$u = R_e \{ (u_r(z) + i u_i(z)) \exp(ix) \} \quad (12)$$

$$p = R_e \{ (p_r(z) + i p_i(z)) \exp(ix) \} \quad (13)$$

ここで、 u_r, u_i は u の z 方向分布の実部および虚部で、 p_r, p_i も同様である。

式 (12)、(13) を式 (10)、(11) に代入すると、結局次式のような連立常微分方程式を得る。

$$u_r - f_p(c) \frac{1}{\rho} p_r + \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu u_r'' + \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu' u_r' = 0 \quad (14)$$

$$-u_i + f_p(c) \frac{1}{\rho} p_i + \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu u_i'' + \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu' u_i' = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u_r - \frac{\beta^2}{k^2} \frac{1}{\rho} p_r'' - \frac{\beta^2}{k^2} \left(\frac{1}{\rho} \right)' p_r' + \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu u_r' \\ + \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu' u_r + 2 \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu' u_i + 2 \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu' u_i' = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} u_i - \frac{\beta^2}{k^2} \frac{1}{\rho} p_i'' - \frac{\beta^2}{k^2} \left(\frac{1}{\rho} \right)' p_i' - \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu u_r' \\ - 3 \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu' u_r - 2 \frac{\nu_0}{\omega} \beta^2 \nu' u_r' = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 ν は z に関する常微分を示す。また $f_p(c)$ は、以下に述べるような $\partial p/\partial x$ 項に対する補正を表す factor である。通常、底質の体積濃度が最大となる位置以深では底質粒子の流速はゼロとなるが、本解析では、シートフロー層を連続体と仮定しており、さらに底質濃度 c が最大となる位置以深でも仮想的な粘性係数 μ^* が有限な値にとどまっているため、 $\partial p/\partial x$ が作用する限り底質粒子の流速はゼロとはならない。実際の現象においては、底質粒子相互のかみあい等によってこの $\partial p/\partial x$ に抵抗しているものと考えられる。そこでここではこの問題を回避するために、底質濃度が最大となる点以深で $\partial p/\partial x$ がゼロとなるように次式で示されるような補正係数を導入した。

$$f_p(c) = 1 - \left(\frac{c}{c_{\max}} \right)^{10} \quad (18)$$

つぎに、式 (12)、(13) の u_r, u_i, p_r, p_i を式 (19) で示されるような (正規化された) Hermite 関数 $\phi^{(n)}$ を試験関数として導入することにより式 (20)、(21) のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(-1)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}} \int_0^z e^{-t^2/4} dt \\ \phi^{(n)}(z) &= e^{-z^2/4} \frac{1}{\sqrt{n! \sqrt{2\pi}}} H_n(z) \\ H_n(z) &= (-1)^n e^{z^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-z^2/2}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$u_r = \text{const.} + \sum_{n=1}^{n_{\max}} a_n \phi^{(n)}, \quad u_i = \sum_{n=0}^{n_{\max}} b_n \phi^{(n)} \quad (20)$$

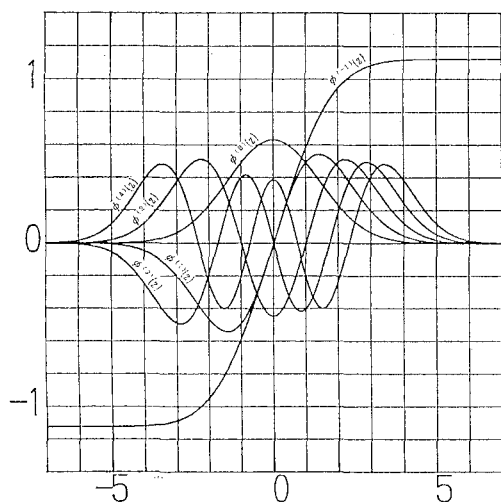


図-1 試験関数

$$p_r = \sum_{n=-1}^{n_{\max}} c_n \phi^{(n)}, \quad p_i = \sum_{n=0}^{n_{\max}} d_n \phi^{(n)} \quad \dots (21)$$

ここで、このような Hermite 関数を用いたのは、この直交関数系が 図-1 で示すような形で $(-\infty, \infty)$ 区間で定義された関数系であることから、今のシートフローの問題に適用する際に、 $z = \pm\infty$ の条件が与えやすいこと、ならびに $\phi^{(-1)}(z)$ が流速の鉛直分布の基本モードに比較的近い形になっていることによる。

そして式 (20), (21) を式 (14)~(17) にそれぞれ代入し、境界条件

$$\left. \begin{aligned} u_r &= 1, & u_i &= 0, & p_r &= 1, & p_i &= 0 & (z = \infty) \\ u_r &= 0, & u_i &= 0, & p_r &= 0, & p_i &= 0 & (z = -\infty) \end{aligned} \right\} \quad \dots (22)$$

のもとで、Galerkin 法を用いて各係数 a_n, b_n, c_n, d_n を求めて、 u, p を決定した。さらに、求められた u より、式 (8) を用いて w を求め、 u, w より式 (4) を用いて、 c を求めた。

3. 解析結果

(1) 固定床上の振動流を対象としたチェック計算

まず、この解法の妥当性をチェックするために、固定床上の振動流を対象として、理論解とこの Galerkin 法による計算結果を比較してみた。ただし、固定床の場合には z の領域が $[0, \infty)$ と半区間になるので、ここでは現象を $z=0$ に関して点対称として折り返し、領域を $(-\infty, \infty)$ 区間に広げて本解析法を適用した。結果を図-2 に示す。これを見ると、展開項数がただか5程度でかなり理論解に一致していることがわかる。

(2) シートフロー層内の流速場と濃度場の特徴

つぎにシートフローに対して本解析法を適用した結果を示す。計算条件としては、ここでは通常の室内実験において実験できる程度の値に選び、波長 200 cm, 周期

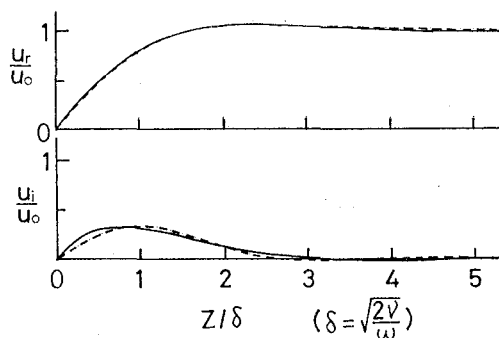


図-2 固定床上の振動流境界層の理論解(実線)と本解析法(破線)との比較

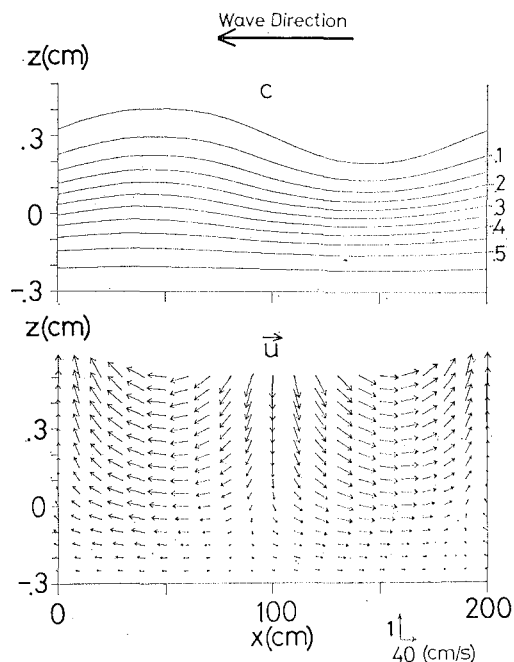
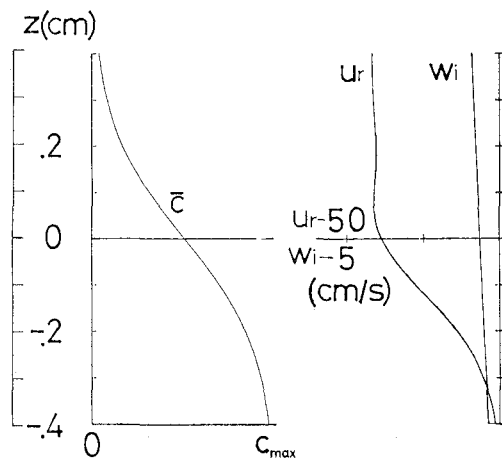


図-3 濃度のコンターと流速ベクトル

図-4 $u_r, w_i, \bar{c}$ の鉛直分布形

1.35 s の正弦波が与えられた場合の条件を設定した。計算上与えた $z=\infty$ での境界条件としては、この波の底面上 0.5 cm の位置での水平、鉛直流速振幅を用いた ($u_0=41.6$ cm/s, $w_0=0.7$ cm/s)。また既知として与えた時間平均濃度 $\bar{c}$ の鉛直分布形は 図-4 の左図で示されるような $\bar{c}=c_{\max} \cdot \tanh(5/2z)$ ($c_{\max}=0.65$) で表される分布形とした。

図-3 は、以上のような条件のもとで Galerkin 法の展開項数を $n=17$ として求められた u, w, c より算出した濃度場のコンターと流速ベクトル (固定座標系) を示したものである。なお、流速ベクトル図の鉛直成分はわかりやすくするためにかなり誇張して示してある。本解析では、濃度場の解析は流速場の移流のみを考慮した底質の質量保存式によっているため、当然ながら結果として得られた濃度場は、波動場の移流に対応して周期的に変化している。また、流速の大きさは、底質濃度の増大とともに全体的に小さくなっている。さらに詳細にみると、通常の波動・振動流境界層にみられるような先走り現象が境界層内に現れていることもわかる。

(3) シートフロー層内の底質粒子の挙動——層内の鉛直流速の効果による Net の底質移動の生成

図-4 は、水平流速振幅の実数部 u_r (実線) と鉛直流速振幅の虚数部 w_i の鉛直分布を、既知として与えた時間平均濃度 $\bar{c}$ の鉛直分布とともに示したものである。同図に示されているように、シートフロー層内では上層ほど底質濃度が小さく流体が動きやすくなっているため、当然のことながら水平流速振幅は上層ほど大きくなっているが、下層にいくに従って底質濃度が増大しやがて一定値となるため、途中で変曲点を持つ分布形となっている。この点は、振動流場におけるシートフロー層内の流速場の解析結果⁹⁾と同様である。しかし、今回着目している波動場の場合には、シートフロー層内にわずかながらも鉛直流速が存在しているため、波の位相によって底質粒子の鉛直位置が周期的に変化する。そのため、波の進行方向に進む位相と逆方向に進む位相とで底質粒子が経験する水平流速の大きさが異なり、その結果個々の底質粒子は波の 1 周期後に実質的な移動を生じる可能性がある。

このことをさらに詳しく調べてみるために、実際に層内の底質粒子の 1 周期間の運動の軌跡を Lagrange 的に追跡してみたものが 図-5 である。同図より、底質粒子が波の進行方向に進む位相では、逆方向に進む位相に比べてより上層に位置していることがわかる。このとき、底質粒子はより大きな水平流速を経験することにより、(すなわち波の進行方向に進む位相では、粒子がやや「浮いて」動きやすくなるため、) 1 周期後には、波の進行方向へ実質的な移動を生じていることがわかる。

図-6 は、この一周期後の実質的な移動距離、すなわ

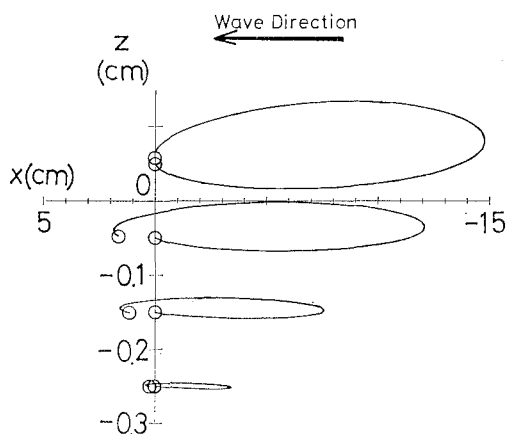


図-5 Lagrange 的に追跡した底質粒子の運動

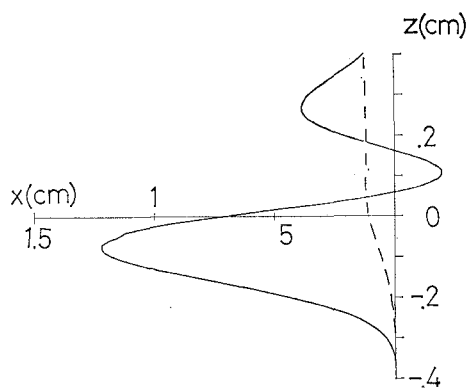


図-6 底質粒子の 1 周期残差移動距離の鉛直分布

ち残差移動距離の鉛直分布を示したもので、図中には、比較のため仮に鉛直流速 w がゼロとした場合の残差移動距離の鉛直分布 (破線) もあわせて示してある。波動場においては、波の場所的位相差の存在のため、仮に鉛直流速をゼロとした場合でも粒子の 1 周期後の残差移動距離はわずかながら存在し (Stokes drift), その鉛直分布形は水平流速振幅の鉛直分布形に対応した分布形となる。しかしながら、鉛直流速が存在する実際のシートフロー層内では、その残差移動距離は鉛直流速がないものとした場合に比べて極めて大きな値となり、さらに、水平流速振幅の変曲点あたりでピークをとる鉛直分布形となることが同図より分かる。これは、鉛直流速の存在により底質粒子の鉛直位置が変化し、水平流速振幅の変曲点、すなわち、その勾配が最も大きい位置において、底質粒子の経験する水平流速振幅の変化が最も大きくなるためである。これらのことにより、波動場におけるシートフロー層内の底質移動には、振動流場では加味できない鉛直流速の存在がその実質的な底質移動を引き起こす重要な factor となっていることが明らかとなった。

4. おわりに

従来のシートフロー状の底質移動に関する研究においては、流速場を振動流に置き換えた上で、底面せん断力をその基本的外力として解析が進められてきている。しかし、本研究において、実際の波動場におけるシートフロー層内の底質の運動を調べてみた結果、層内における鉛直流速の存在が底質の実質的な(Netの)移動に重要な役割を果たすことが明らかになった。これは、従来の研究において、底質の実質的な移動が底面での水平流速の非対称性にのみ起因するとされているのに対し、波動場では、たとえ水平流速波形が対称な正弦波であっても、実質的な底質移動が有意な大きさに生じることを示すものである。

なお、ここで用いたシートフロー層の基礎式は、粘性係数が底質濃度に依存する形の仮定の流体に置き換えた形のものであるので、今後、固-液二相系としての取扱いや透水性の効果などを取り込むことによって、より現実に近い形での解析を行っていくつもりである。

また、本論文では述べなかったが、軽量人工粒子を用

いたシートフローに関する室内実験もあわせて行っており、いくつか興味深い現象が見いだされているが、これについては近々別の機会に報告する予定である。

最後に、本研究が文部省科学研究費一般研究(B)「碎波帯内外の波・乱れ共存場の力学構造と海底地形との相互作用に関する研究」(代表者:日野幹雄)の補助を受けて行ったものであることを記し、ここに謝意を表します。

参考文献

- 1) 香取完和・渡辺 晃・堀川清司: シート・フロー状態の底質移動に関する研究, 第 27 回海岸工学講演会論文集, pp. 202~206, 1980.
- 2) 榎木 享・出口一郎・松山 章: 掃流砂の移動層厚と移動速度に関する一考察, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 277~280, 1984.
- 3) 日比康生・山下俊彦: シートフロー状漂砂の移動速度に関する一考察, 土木学会第 42 回年次学術講演会概要集, pp. 654~655, 1987.
- 4) Bakker, W. T. and Kestern, W. G. M.: The dynamics of oscillating sheetflow, Proc. 20th Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 940~954, 1986.