

数値波動解析における新しい無反射境界スキームの 平面二次元問題への適用

日 野 幹 雄*・仲 座 栄 三**

要 旨: 本論文では、まず水波および弾性波あるいは流れ場の無反射境界の数値スキームとして、種々提案されている方法を分類して紹介し、次に新スキームの一次元の場合への適用結果を引用例示した。ついで、波の場の無反射（および任意反射率）境界の数値スキームとして新に提案した方法の2次元の場合における計算手続を具体的に述べ、証明その他を行ったのち、斜入射の場合および矩形港湾の場合に応用し、その適用性を証した。

1. はじめに

著者の一人は波の場の無反射透過境界スキームとして、2つの方法を提案した。この方法の着想は、高校の物理でも習う境界での波の反射特性を応用して、(I)反射波を消すかあるいは(II)重複波を作って進行(透過)波成分のみを抽出しようとするものである(論文(a)²⁾日野 1987)。

スキーム(I)は時間ステップが一つ進むごとに、瞬間的仮想的に固体境界と静止水面境界を与えて、それぞれの境界値を重ね合わせる方法である。しかし、この方法は各格子点で水位と流速の計算をする必要があり、理論上は正確であっても数値計算上は多少面倒である。

これに対しスキーム(II)では瞬間的仮想的に固体境界を考え、その結果生じる重複波波高から透過(進行)波を求める方法で、境界値を水位 η に関して与え通常の staggered leap-frog 格子で計算をすゝめることができ、便利である。なお、長波近似法では流速成分を進行波・逆進行波成分に分離できないが、新スキームではこの区別が自動的に行われる(論文(a, b)^{2), 4)}ことがこの方法の特徴である。

前論文(b)⁴⁾(日野・仲座, 1987)では、この方法を主に種々の一次元の場合に適用して、その有効性を確めた。

2. 無反射境界に関する種々の方法の紹介

昨年、長波の無反射境界の新数値スキームを考え付いた時点では、著者らは谷本・小舟¹¹⁾(1975)の特性曲線

法と長波近似法以外の方法を知らなかったが、その後偶然のことから他の分野でも波の無反射境界の取扱い方法が色々と研究されていることを知った。それらについてのレビューは論文(c)³⁾(日野, 1988)に行った。これらの方法は次の3種に大別しうる(これら以外にもより解析性の高い方法に、Green 関数法や Mapping 法があるが省略する)。

(i) 重ね合せ法: Smith¹⁰⁾(1976)は弾性波の無反射境界として、境界を固定と自由の2種類の場合について別々に求め、解を重ね合わせる方法を提案している。Smith は全領域全時間に関して2種の境界についての解を求めてから、それらを重ね合わせているため、計算時間が掛るだけでなく、波が同じ境界で反射を繰り返すうちに、重ね合せによる波の消波が不完全となるという欠点がある。著者の方法の(I)も重ね合せ法であるが、方法(I)では、計算の時間ステップを一つ進めるたび毎に境界点で局所的に消波を行うので計算上有利である。方法(II)は仮想固定境界一種のみであるので、計算ステップが少なくてすむことの他に、計算格子網が普通の(spatially) staggered, (temporally) leap-frog 法で充分であるという利点がある。

(ii) 吸収法 (absorption): Sommerfeld の放射条件¹²⁾

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + C \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

により、微分方程式で境界条件を与える方法である。この方法は、必ずしも波の場ではない一般の hyperbolic 形の基礎式で表される流れの場について Orlanski⁹⁾(1976)により提案され、一般に吸収法といわれている。ここに、 ϕ は流れ場の変数 (u, v, w, p, T (温度), η (波高) など), C は ϕ の移流速度で流れ場の計算より逆算する。特性曲線法も吸収法の一種に分類される。

(iii) 粘性境界 (sponge layer): 境界に接して Newton 粘性による減衰項をもつ層を付加して(基礎方程式にこの項を加える)反射波を消す方法で、元々 Sommerfeld が放射型の境界値問題を定値型の境界値問題に置換えて解く方法として提案した解析問題に対する方法である。Israeli & Orszag⁶⁾(1981)は、粘性境界の外側にさら

* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 琉球大学助手 工学部土木工学科

に吸収境界を付ける方法が最も秀れていると報告しているが、また吸収境界のみの方がすべての場合について秀れているという主張もある。

3. 一次元の場合の例

著者らの新しいスキームは、前論文 (b) にいくつかのケース、特に一次元の場合について検証した。その内のシビアなケース 2 例について次に引用する。

(a) 両端が無反射境界

一様水深の水域の両端から波が入射し、それぞれの境界が無反射の場合についての計算例が図-1 である。図中の点線は入射波が他端に達し、波の伝播が定常化した場合の理論曲線である。

図-2 は長波近似

$$\eta(i_{\max}, n+1) = \sqrt{\frac{h_{BD}}{g}} u(i_{\max}-1, n) \quad \dots (2)$$

を用いた場合で、他端よりの波が境界に達する前に置いてすらすらに無反射境界とはなっていない。これは、長波近似では流速の進行波成分と逆進行成分の区別ができ

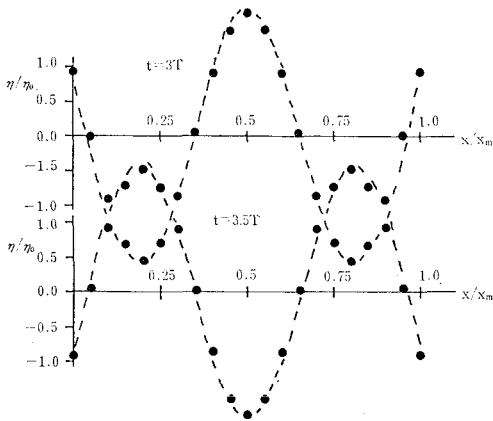


図-1 両端より互に逆向きに波が侵入する場合 (新境界スキーム)

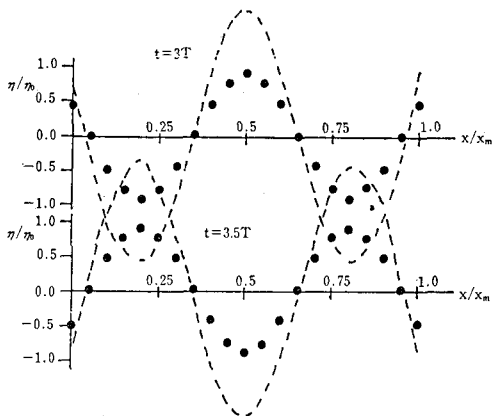
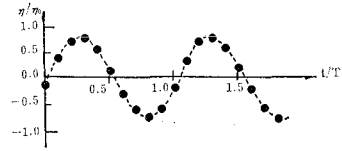
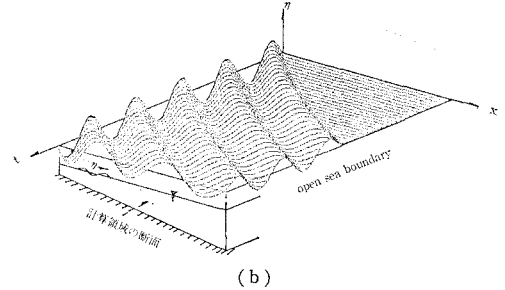


図-2 両端より互に逆向きに波が侵入する場合 (長波近似スキーム)



(a)



(b)

図-3 勾配 1/10 の水域における波の伝播 (底面摩擦を考慮)

ないためである。しかし、新しいスキームではこの判別は自動的に行われているため境界での反射は無い注1)。

(b) 水深の変化する水域

海底摩擦があり水深が変化する水域について、長さが十分長い場合の数値解と長さを半分にしてそこに無反射境界を設定した場合の同一点での数値解とを比較した例が、図-3 である。この場合にも、新スキームは満足すべき結果を与えた。

4. 2次元場での計算手続き

前報 (b) では、主に種々の 1 次元の波浪場での具体的なスキームを述べ、その適用性を検討したが、2 次元の場合についてはスキームは述べずに、単に応用例を 1 例挙げるに止めた。次に 2 次元の場合における 2 つの方法についての計算手続きを記する。

まず、基礎方程式は二次元長波方程式とする。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u(\eta+h)}{\partial x} + \frac{\partial v(\eta+h)}{\partial y} = 0 \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f \cdot u \sqrt{u^2 + v^2} \quad \dots (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + f \cdot v \sqrt{u^2 + v^2} \quad \dots (5)$$

4.1 スキーム

すでに前報 (a) で述べたように 2 種類の数値スキームの考え方がある。

スキーム (I) 局所的重ね合せ消波法

今、時間ステップ n ($t=n\Delta t$) までの計算が完了したものとし、次の $(n+1)$ 時間ステップでの x 軸 (i 軸) に垂直な (東西側の) 境界での水位の境界値 $\eta(i_{\max}, j, n)$ を無反射境界として求める。

(i) 仮想固体境界: 時間ステップ n において, 境界が瞬間的に仮想的に固体境界に置き換ったとする。このとき, 波の入射が境界に直であろうが斜めであろうが,

$$u'(i_{\max}, j, n) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

以下の上付添記号 ' は, 仮想境界による値を意味する。内側の流速 v' は, 未だ仮想境界の影響を受けないから, 仮想境界なしでの値に等しい。

$$v'(i_{\max}-1, j \pm 1, n) = v(i_{\max}-1, j \pm 1, n) \quad \dots\dots\dots (5)$$

これらの値を, 式 (1) の差分式に代入して, 瞬間的仮想固体境界に対する $(n+1)$ 時間ステップの波高を仮に求める。

$$\eta'(i_{\max}-1, j, n+1) \leftarrow \text{式 (3) の差分式} \quad \dots\dots\dots (6)$$

(ii) 仮想定水位境界: 同じく時間ステップ n において, 瞬間的仮想境界として静止水域を考え,

$$\eta'(i_{\max}, j, n) = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

として, 式 (4) より $(n+1)$ 時間ステップでの流速成分 $u'(i_{\max}-1, j, n+1)$ を求める。

また, 式 (5) より, 時間ステップ $(n+1)$ での流速成分 $v'(i_{\max}-1, j, n+1)$ を求める。

長波近似により u', v' を水位に換算する。

$$\eta'_2(i_{\max}-1, j, n+1) = \sqrt{\frac{h_{BD}}{g}} (u'^2(i_{\max}-1, j, n+1) + v'^2(i_{\max}-1, j, n+1))^{1/2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

(iia) しかし, 物理的には (ii) の通りであるが, 数値計算上は一般に staggered mesh を用いるので, むしろ次のようにするのが良い。仮想境界として水深が無限大の静止水域を考えることは, そこでの x 軸方向の流速を 2 倍とすることに相当する。

$$u'(i_{\max}, j, n) = 2 \cdot u(i_{\max}, j, n) \quad \dots\dots\dots (9)$$

いま, 簡単のために波の伝播速度と格子間隔の間に $\Delta x / \Delta t = \sqrt{gh}$ の関係があるとすれば (後述するようにこの条件は内挿法により除去する), これは時間ステップ $(n-2)$ の点 $(i_{\max}-2, j)$ の u で置き換えることができる。

$$u'(i_{\max}, j, n) = 2 \cdot u(i_{\max}-2, j, n-2) \quad \dots\dots\dots (10)$$

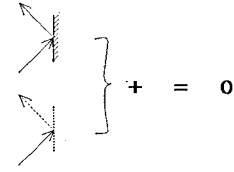
式 (10) を仮想瞬間境界として, これに対する時間ステップ $(n+1)$ での水位 η'_2 を式 (3) の差分式より求める。

$$\eta'_2(i_{\max}-1, j, n+1) \leftarrow \text{式 (3) の差分式} \quad \dots\dots\dots (11)$$

(iii) 重ね合せ消波: 2 種の仮想境界に対する水位変化を重ね合せ, これと境界外からの新たな入射波 η_{inc} を加えれば無反射境界での水位となる。

$$\begin{aligned} \eta(i_{\max}-1, j, n+1) \\ = \eta'_2(i_{\max}-1, j, n+1) + \eta'_2(i_{\max}-1, j, n+1) \\ + \eta_{inc}(n+1) \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

物理的には 特に斜め入射であることを考慮しなくて良い。



数値的には u', v' を通して, 斜め入射は自動的に考慮される。

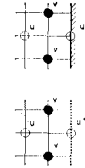


図-4

(iv) y 軸 (j 軸) に垂直な (南北側の) 境界についても, 同様な計算手続きにより, 無反射境界を設定することができる。

証明

この方法では, 波の入射方向を特に考慮する必要がないことは, 2 種の仮想境界における反射波の方向が同一であり, 符号が逆であるという物理特性から明らかである (図-4), 物理的にも解析的にも数値的にも改めて証明の必要はないであろう。

スキーム (II) 局所的仮想固体境界法

前述の方法 (I) では, 2 種の仮想境界を考えたが, この方法ではたゞ一種の仮想固体境界を考え, その結果である仮想重複波の波高の $1/2$ を元の進行波波高とする。

(i) 時間ステップ n において, 瞬間的仮想固体境界を考え,

$$u'(i_{\max}, j, n) = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

とする。境界の一つ内側の格子点では, n 時間ステップでは未だ仮想境界の影響が及んでいないので, 前の n ステップですでに求めた流速 v の成分を用いる。

$$v'(i_{\max}-1, j \pm 1, n) = v(i_{\max}-1, j \pm 1, n) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに, ' は仮想境界による値を意味する。

(ii) これらの仮想境界による流速値を, 式 (3) に代入して時間ステップ $(n+1)$ における波高 $\eta'(i_{\max}-1, j, n+1)$ を求める。

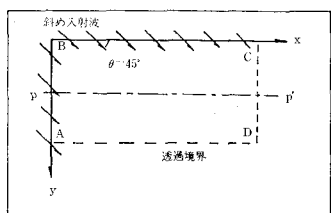
(iii) ここで求めた仮想固体境界による重複波波高 η' の $1/2$ が, 時間ステップ $(n+1)$ における進行波波高であり, これに境界外よりの入射波高 η_{inc} を加えたものが, 無反射境界の境界値である。

$$\begin{aligned} \eta(i_{\max}-1, j, n+1) \\ = \frac{1}{2} \eta'(i_{\max}-1, j, n+1) + \eta_{inc}(n+1) \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

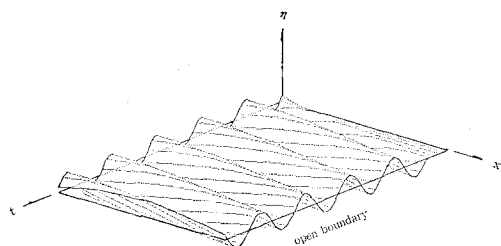
$$\begin{aligned} & \eta(i_{\max}-1, j, n+1) \\ &= \{\eta'(i_{\max}-1, j, n+1) - \eta'(i_{\max}-1, j, n-1)\} \\ &+ \eta_{\text{inc}}(n+1) \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

4.2 証明らしきもの

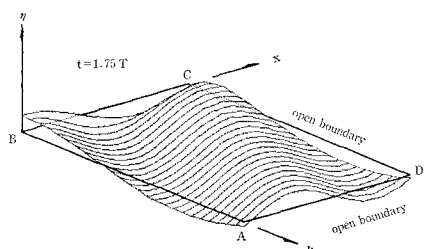
この第2の方法も、特に波の入射方向を考える必要はなく、計算は機械的に行われる。一次元の場合のこの方法の差分式の妥当性の証明は前述のように簡単である注1)。しかし、二次元の場合については、物理的解析的には問題は無いものの、差分式に依る場合の証明には波の局所的分離可能性の仮定が成立しなければならない。つまり、波高 η は局所的にみて x 方向に進行する成分 η_x と y 方向に進行する成分 η_y との和とに分解しうるとしなければならない注2)3)。



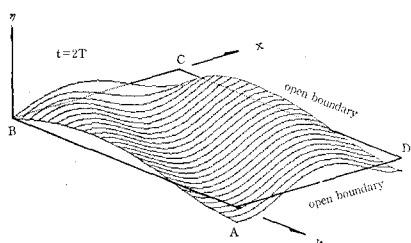
(a) 計算領域



(b) $p-p'$ 線上の η の時間変化



(c) η の空間分布 ($t=1.75T$)



(d) η の空間分布 ($t=2.0T$)

図-5 矩形水域への斜め入射波の伝播 ($\theta=45^\circ$)

4.3 格子間隔についての制約条件とその除去法

前報 (a, b) において述べたように、瞬間的仮想境界の影響が隣りの格子点に伝播するための条件として、このスキームでは次の制約が課せられる。

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \left(\text{または} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \sqrt{gh_{BD}} \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 h_{BD} : 境界での水深。

しかし、一次元の場合ならともかく、二次元の場合にはこの制約は邪魔であるので、内挿によりこれを取除く。この種の内挿法による制約条件の除去は Orlanski⁹⁾ (1976) や丸山・鹿島⁷⁾ (1985) によっても行われている。

$$\eta^{(n+1)} = [1 - C(\Delta t/\Delta x)]\eta_{i_{\max}}^{(n-1)} + C(\Delta t/\Delta x)\eta'^{(n+1)} \dots\dots\dots (18)$$

ここに $\eta'^{(n+1)}$ は式 (17) による値。

4.4 任意反射率境界

透過・無反射境界における進行波の水位 $\eta(i_{\max}-1, j, n+1)$ が以上のように求められるから、反射率が r の境界ならば、

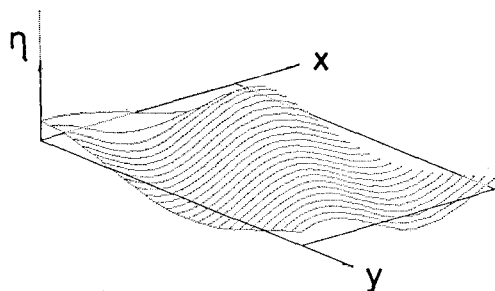
$$(1+r)\eta(i_{\max}-1, j, n+1) \dots\dots\dots (19)$$

を改めて時間ステップ $(n+1)$ での η の境界値とすれば良い。

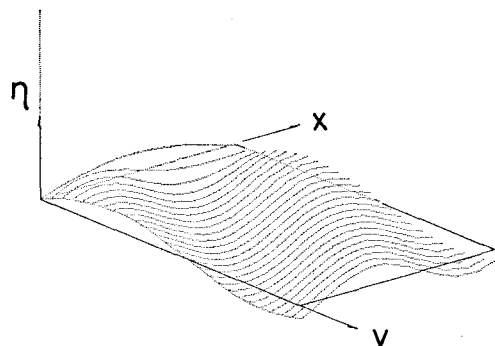
5. 2次元場での適用例

(a) 斜め入射波

矩形領域にその相隣る2辺から斜めに入射し、相対す



(a) $t=1.75T$



(b) $t=2.0T$

図-6 矩形水域への斜め入射波の伝播 ($\theta=60^\circ$)

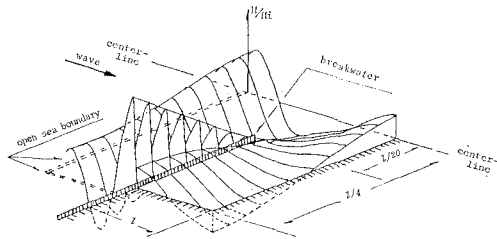


図-7 港湾内の水面振動 ($T=10$ s, $L=100$ m, $h=10.22$ m, $l/L=1.05$, $B=l/2$, $b=l/10$)

る 2 辺から波が透過して行く場合についてスキーム (II) により計算を行った。図-5 は入射角が 45° の場合、図-6 は入射角が 60° の場合で、いずれのケースでも波は完全に無反射・透過である。

(b) 矩形港湾の水面振動

コの字形の矩形港湾に波が入射する場合を、同じくスキーム (II) により計算した。この場合については、合田¹⁾(1963) の解析解や磯部・佐藤・杉浦・泉宮²⁾(1987) の数値解があり、これらと比較しうる。

図-7 は開口幅 $b=l/10$ (l : 港の長さ, $B=l/2$: 港の幅) の港湾で、 $l/L=1.05$ の場合 (第 3 番目の共振点) の時刻 $t=48T$ ($T=10.0$ s) における水面変動パターンを示す。港隅の波高比は、 $H/H_0 \approx 5.1$ で磯部・佐藤・杉浦・泉宮²⁾(1987) の結果 (彼らの論文の図-5) と一致する。ただし、磯部らの計算は定常状態に対して求められているが、本計算は非定常計算である。

謝 辞: 本研究は文部省科学研究費一般研究 (B) 「碎波帯内外の波・乱れ共存場の力学構造と海底地形との相互作用に関する研究」(代表者 日野幹雄) および奨励研究 (A) 「大環礁上の波浪特性に関する研究」(代表者 仲座栄三) の補助を受けて行われた研究成果の一部であり、深く謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 合田良実: 長方形および扇形の港の副振動について, 第 10 回海岸工学講演会論文集, pp. 53~58, 1963.
- 2) 日野幹雄: 開放境界における波の無反射透過条件の極めて簡単な計算スキームの提案, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 38, pp. 31~38, 1987.
- 3) 日野幹雄: 波の無反射境界の計算スキーム——解説, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 39, 1988.
- 4) 日野幹雄・仲座栄三: 水理計算における新しい“無反射境界”の数値的検討, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 38, pp. 39~50, 1987.
- 5) 磯部雅彦・佐藤典之・杉浦 淳・泉宮尊司: 港内波高分布の数値計算における境界条件に関する研究, 第 34 回海岸工学講演会論文集, pp. 86~90, 1987.
- 6) Israeli, M. and Orszag, S. A.: Approximation of radiation boundary conditions, J. Comp. Phys. 41, pp. 115~135, 1981.
- 7) 丸山康樹・鹿島達一: 非定常緩勾配方程式を用いた数値計算手法の解説, 電力中央研究所・土木研究所・業務資料, 14, 1985.
- 8) 大中 晋・磯部雅彦: 波・流れ共存場に拡張した非定常緩勾配方程式による波動場の数値計算, 第 34 回海岸工学講演会論文集, pp. 91~95, 1987.
- 9) Orlanski, I.: A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, J. Comp. Phys., 21, pp. 251~269, 1976.
- 10) Smith, W. D.: A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems, J. Comp. Phys., 15, pp. 492~503, 1974.
- 11) 谷本勝利・小舟浩治: 数値波動解析法における港内波高分布の計算, 第 22 回海岸工学講演会論文集, pp. 249~253, 1975.
- 12) Sommerfeld, A.: Partial Differential Equations in Physics, Academic Press, New York, 1949.

注 1) 一次元の場合の差分式の数学的証明は、東工大・土木研究報告, No. 39 の「補足」に、より詳しくは投稿中の英文論文に載せてある。

注 2) 本論文のスキーム (I) は、理論上も問題はないであろう。スキーム (II) は、入射角が小さい場合および逆に深い場合 ($\alpha \approx 0^\circ$ or 90°) は共に一次元の場合に近く同様に問題はない。入射角が中間の場合は、図-5, 6, 7 に示すように数値的には検証されたが、数学的に厳密な証明を考えた。

あるいは、入射角が α の場合に格子間隔 Δx だけ境界の内側の点の情報は、 $\Delta t = \Delta x/C \geq \Delta x \cdot \cos \alpha / C$ より大きい時間には境界点に伝わるからということで物理的には良いのかもしれない。

注 3) 従来の特性曲線法では、波率方向に沿う波高は、格子間隔のオーダーで一定ということを仮定しているが、これは許されるのだろうか。特に、入射角が大きい場合に。