

任意形状港湾に対する不規則波の港内波高分布計算法の改良

佐藤 典之*・磯部 雅彦**・泉 宮 尊 司***

1. 序 論

任意形状港湾の港内波高分布の数値計算法に関しては、種々の方法が提案されてきた。その主なものは、高山の方法¹⁾、ヘルムホルツ方程式を直接解く方法²⁾、ヘルムホルツ方程式に対するグリーン関数を導入して解く方法³⁾、3次元グリーン関数による方法⁴⁾、数値波動解析法⁵⁾、非定常緩勾配方程式による方法⁶⁾、緩勾配方程式による方法⁷⁾等である。これらの手法は、ある限られた条件での解析法として有効であるが、より一般的な解析、すなわち水深変化および壁面での任意反射率を考慮し、共振現象を含めた解析を行うためには、理論上あるいは計算時間の点で問題がある。著者らは、緩勾配方程式を基礎方程式とし、主として境界条件の与え方について改良を行い、これらの条件を同時に考慮できる計算法を提案した⁸⁾。しかし、1) 港口の主・副防波堤の形状を含めた任意形状の港に対して適用できない、2) 壁面での入射角を求めるために繰り返し計算が必要である等、一般的な条件の港に対して計算を行うにあたっていくつかの問題点があった。そこで本研究では、壁面および港口での境界条件の与え方を工夫することにより、任意形状の港に対し不規則波を用いた静穏度計算が可能となるような、より応用範囲の広い計算法を開発し、実験結果、従来の計算法と比較することによってその有用性を検証した。

2. 基礎方程式と境界条件

(1) 基礎方程式

基礎方程式としては、エネルギー減衰項を含んだ緩勾配方程式⁹⁾、

$$\nabla(CC_0\nabla\phi)+(k^2CC_0+i\omega f_D)\phi=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

を用いる。ここに、 ϕ は複素水面変動振幅、 C は波速、 C_0 は群速度、 k は波数、 ω は角周波数、 f_D はエネルギー減衰係数、 ∇ は水平2方向への微分作用素($\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$)、 $i=\sqrt{-1}$ である。ここで、

$$\phi=\sqrt{CC_0}\phi \quad \cdots\cdots(2)$$

と変数変換し、海底勾配の2次のオーダーを省略すると式(1)は、

$$\nabla^2\phi+k^2\left(1+i\frac{f_D}{n\omega}\right)\phi=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

という、ヘルムホルツ方程式に帰着される。ここに、 $n=C_0/C$ である。

一方、境界条件としては、港内の構造物前面での固定境界と、港口で外側における解と滑らかに接続するための開境界条件の2種類がある。

(2) 開境界条件

図-1において、港口においては、港外からの外力となる擾乱波(通常は入射波に対応する)および港内からの散乱波が重なり合っていると見なすことができる。それぞれに対応する ϕ の成分を ϕ^{IR} および ϕ^S とすれば、

$$\phi=\phi^{IR}+\phi^S \quad \cdots\cdots(4)$$

である。このうち、散乱波は、厳密には主・副防波堤の港外側の面での境界条件および遠方での放射条件を満足する解となる。しかし、本研究では、散乱波は港口の主・副防波堤の先端を結んだ線の延長上(図-1の Γ_1 上)において完全反射し、遠方(図-1の Γ_2 上)で放射条件を満足するものと仮定した近似的な解析を行う。この仮定による誤差は、散乱波が主・副防波堤の港外側の面で反射し回折して港内に再び侵入する分を、 Γ_1 上で反射し回折するとして見積っている点から生ずる。し

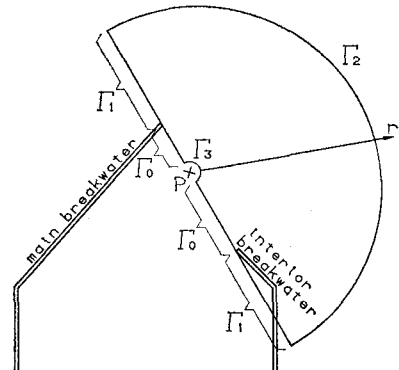


図-1 開境界条件

* 正会員 工修 東亜建設工業(株) 技術本部設計部

** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 新潟大学助手 工学部土木工学科

かし、散乱波そのもののポテンシャルが小さく、さらに反射、回折を繰り返したものであるので、全体の計算結果に及ぼすこの仮定の影響は小さいと考えられる。この仮定より、散乱波のポテンシャル ϕ^S に対しては、

$$\phi^S(P) = \frac{i}{2} \int_{r_0} H_0(kr) \frac{\partial \phi^S}{\partial n} ds \quad \dots\dots\dots (5)$$

が成り立つ⁸⁾。ここに、 H_0 は 0 次の第 1 種ハンケル関数、 n は境界の外向き法線、 s は境界の接線である。式(4)を式(5)に代入すると、港口の境界条件として、

$$\begin{aligned} \phi(P) - \frac{i}{2} \int_{r_0} H_0(kr) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \\ = \phi^{IR}(P) - \frac{i}{2} \int_{r_0} H_0(kr) \frac{\partial \phi^{IR}}{\partial n} ds \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

を得る。

擾乱波のポテンシャル ϕ^{IR} は、通常、入射波および防波堤の港外側で反射される反射波のポテンシャルがとられる。しかし、主防波堤と副防波堤が平行でない場合や、港口が主防波堤の回折波領域となる場合には、そのような与え方は不適切である。本来、 ϕ^{IR} は港外からの外力条件となる擾乱波のポテンシャルを表すものであるから、ここでは港口の主・副防波堤のどちらかを半無限堤と仮定した回折波のポテンシャルを ϕ^{IR} として与えることとする。すなわち、図-2 に示す記号を用いて、

$$\begin{aligned} \phi^{IR} = I(\lambda_1) \exp \{ ikr \cos(\alpha - \theta) \} \\ + r_0 I(\lambda_2) \exp \{ ikr \cos(\alpha + \theta) \} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$I(\lambda) = \frac{1 + S(\lambda) + C(\lambda)}{2} + i \frac{S(\lambda) - C(\lambda)}{2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$S(\lambda) = \int_0^\lambda \sin \frac{\pi \lambda^2}{2} d\lambda \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$C(\lambda) = \int_0^\lambda \cos \frac{\pi \lambda^2}{2} d\lambda \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{4kr}{\pi}} \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{4kr}{\pi}} \sin \frac{\alpha + \theta}{2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{IR}}{\partial n} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi^{IR}}{\partial \theta} \\ = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi r}} \\ \times \left(-\cos \frac{\alpha - \theta}{2} + r_0 \cos \frac{\alpha + \theta}{2} \right) \exp(ikr) \\ - ik \sin(\alpha - \theta) I(\lambda_1) \exp \{ ikr \cos(\alpha - \theta) \} \end{aligned}$$

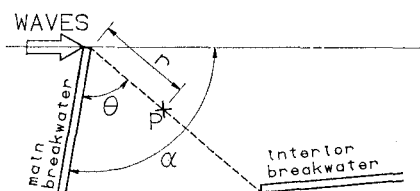


図-2 回折波のポテンシャルの与え方

$$+ r_0 ik \sin(\alpha + \theta) I(\lambda_2) \exp \{ ikr \cos(\alpha + \theta) \} \quad \dots\dots\dots (13)$$

とする。ここに、 r_0 は主または副防波堤の港外側の反射率である。これは高山の方法における港内への入射波の考え方に一致している。

(3) 固定境界条件

壁面での境界条件は、反射率があらかじめ与えられた値になるように取り扱われてきた。その際、境界条件式中に含まれる入射角については、入射角を一定値に仮定するか、あるいは繰り返し計算によって求めるといった方法がとられてきた。本研究では、図-3 に示すように壁面前面に減衰係数 f_D を持った幅 l なる減衰帯を設け、これによって部分反射を表現した。なお、この場合の境界条件は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。2次元的な斜め入射波の場合について、この減衰係数 f_D と反射率 r の関係を求めると、入射角を α として次のように表される。

$$r = \frac{\sin \alpha \cos(kl\mu) + i\mu \sin(kl\mu)}{\sin \alpha \cos(kl\mu) - i\mu \sin(kl\mu)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\mu = \sqrt{\sin^2 \alpha + i \frac{f_D}{n\omega}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

この関係を、 $l/L = 0.1$ (L は波長) のとき、 $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ について示したのが図-4 である。図-4 から、ある程度以下の減衰係数に対して、入射角が 90° より小さくなるに従って反射率が小さくなることがわかる。これは、斜め入射の方が直角入射よりも減衰帯の中

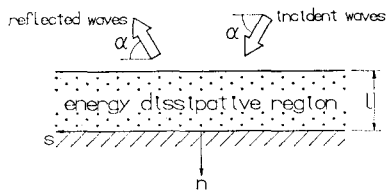


図-3 固定境界条件

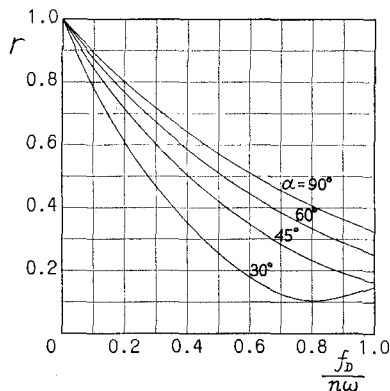


図-4 減衰係数と反射率の関係

を通る距離が長くなり、エネルギー減衰量が大きくなるためである。このことは、いかなる入射角に対しても反射率を一定とする従来の方法と異った結果を与えることになるが、その方が現実的であると言えよう。なお、反射率を減衰帯によって与えることにより、入射角を求めるための繰り返し計算は不要となる。

3. 数値計算の方法

数値計算は差分により行った。x 方向および y 方向の格子間隔を Δx および Δy とすると、基礎方程式 (3) の差分式は、

$$\frac{\phi_{i+1,j}-2\phi_{i,j}+\phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1}-2\phi_{i,j}+\phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + k_{i,j}^2 \left\{ 1 + \left(\frac{if_D}{n\omega} \right)_{i,j} \right\} \phi_{i,j} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。開境界条件式 (6) の差分式は、港口を構成する格子点数を N とすると、図-5 に示す記号を用いて、

$$\begin{aligned} \phi_{i_m,j_m} - \sum_{n=1}^N A_{m,n} \left(\frac{\phi_{i_{n+1},j_n} - \phi_{i_{n-1},j_n}}{2\Delta x} \sin \beta \right. \\ \left. - \frac{\phi_{i_n,j_{n+1}} - \phi_{i_n,j_{n-1}}}{2\Delta y} \cos \beta \right) \\ = \phi_{i_m,j_m}^{IR} - \sum_{n=1}^N B_{m,n} \quad (m=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。ここに、

$$A_{m,n} = \begin{cases} \frac{i}{2} H_0(k|r_m - r_n|)(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) & (m \neq n) \\ \left\{ \frac{i}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{k\varepsilon_n}{2} + \gamma - 1 \right) \right\} \varepsilon_n \\ + \left\{ \frac{i}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{k\varepsilon_{n+1}}{2} + \gamma - 1 \right) \right\} \varepsilon_{n+1} & (m=n) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$B_{m,n} = \begin{cases} A_{m,n} \left\{ \frac{\exp(ikr_n)}{\sqrt{r_n}} a + b \right\} & (n \neq 1) \\ A_{m,n}(ca+b) & (n=1, m \neq 1) \\ \left(\frac{i}{2} - \frac{\gamma}{\pi} \right) (ca+b)(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) - \frac{ad+be}{\pi} & (n=1, m=1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \left(-\cos \frac{\alpha-\theta}{2} + r_0 \cos \frac{\alpha+\theta}{2} \right) \\ b &= -ik \sin(\alpha-\theta) I(\lambda_1) \exp\{ikr_n \cos(\alpha-\theta)\} \\ &\quad + r_0 ik \sin(\alpha+\theta) I(\lambda_2) \exp\{ikr_n \cos(\alpha+\theta)\} \\ c &= \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}} \left(1 + ik \frac{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}{3} \right) \\ d &= p - q - 4\sqrt{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}} + \frac{ik}{3} \left\{ p(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) \right. \\ &\quad \left. - q\varepsilon_n - 4\sqrt{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}} \left(\frac{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}{3} + \varepsilon_n \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

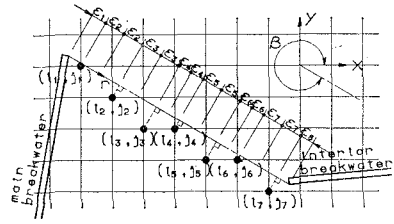


図-5 開境界条件の数値計算法

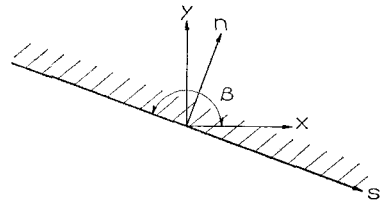


図-6 固定境界条件の数値計算法

$$\left. \begin{aligned} e &= \varepsilon_n \left(\ln \frac{k\varepsilon_n}{2} - 1 \right) + \varepsilon_{n+1} \left(\ln \frac{k\varepsilon_{n+1}}{2} - 1 \right) \\ p &= 2\sqrt{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}} \ln \frac{k\varepsilon_{n+1}}{2} \\ q &= 2\sqrt{\varepsilon_n} \ln \frac{\sqrt{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}} - \sqrt{\varepsilon_n}}{\sqrt{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}} + \sqrt{\varepsilon_n}} \\ r &= 0.57722 \quad (\text{Euler の定数}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

である。次に固定境界条件式 (14) の差分式は、図-6 に示す記号を用いて、

$$\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \sin \beta - \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \cos \beta = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。この時、減衰帯に含まれる格子点については、式 (15) において入射角 90° の場合の反射率が与えられた反射率となるような f_D を与えることとした。

数値計算においては、境界上より 1 格子分外側に拡張した領域の格子点における ϕ の値を未知数とした連立 1 次方程式を立て、これを解くことによって解を求める。この規則波による計算結果の重ね合わせによって、不規則波に対する計算を行う。この場合、一定の周波数に対しては波向にかかわらず左辺のマトリクスが一定となり、入射波向ごとに右辺ベクトルのみが増加することになる。そこで、各周波数に対してあらかじめ逆行列を求めておくことによって計算時間の短縮化を図った。

4. 計算結果および考察

(1) 実験結果との比較

図-7 は規則波による実験結果であり、港内の回折係数を等高線によって表したものである。図-8 は同一の条件で港内の反射率を 0.9 とした場合の本手法による計算結果であるが、両者は良く一致している。

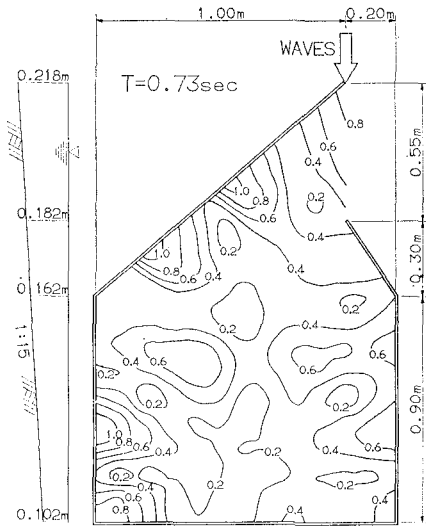


図-7 規則波による実験結果

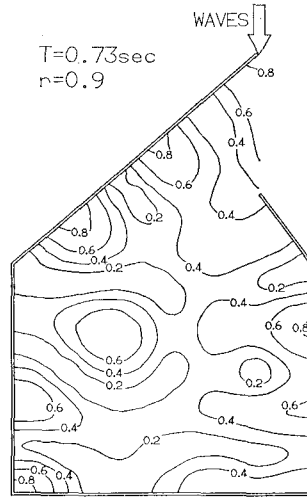


図-8 本手法による計算結果

(2) 半無限堤における回折計算結果との比較

図-9 は、半無限堤による不規則波の回折係数を本手法により計算した結果である。図中の右边および下辺で

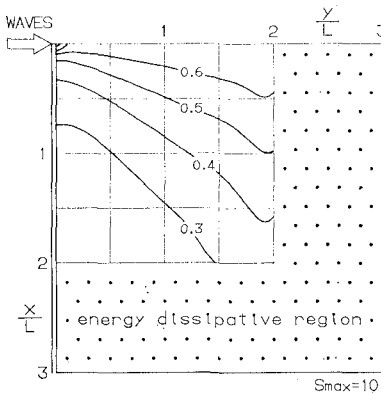


図-9 本手法による半無限堤における不規則波の回折計算結果

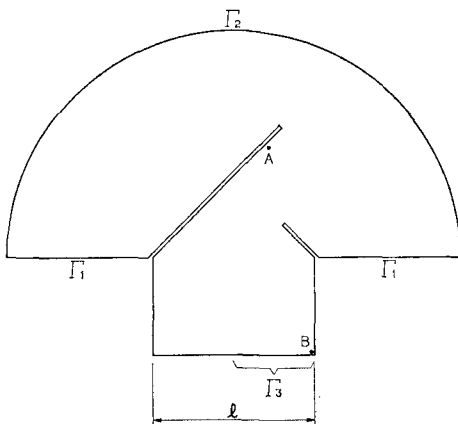
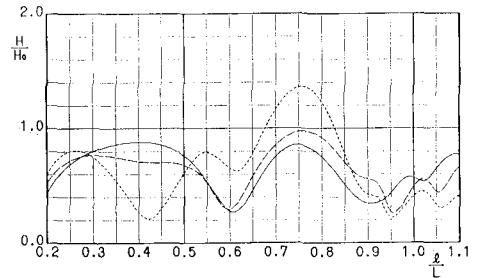
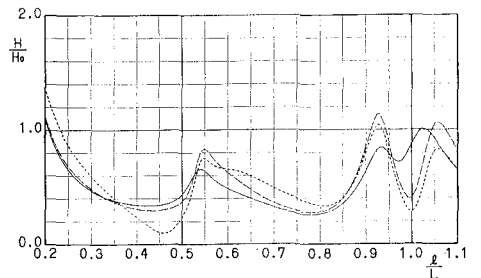
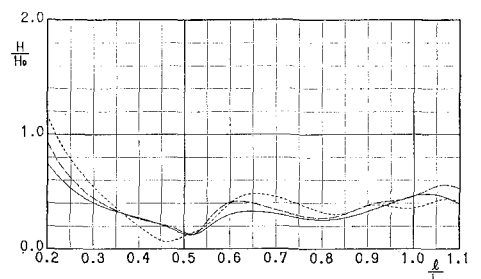


図-10 有限要素法における計算領域

は解析の都合上防波堤を設け、自由透過の境界条件に替わるものとして、 $2 \leq x/L \leq 3$, $2 \leq y/L \leq 3$ の範囲に減衰帯を設けてある。この結果と合田による半無限堤における不規則波の回折計算結果¹⁰⁾と比較したところ、良い一致を示した。

(3) 従来の計算法との比較

図-10 に示すように、港外に計算領域を若干広くとり、 Γ_2 上では入射波、反射波および半円の中心から外側に向かう散乱波の3つのポテンシャルのみが存在するとして、樫山¹¹⁾と同様な有限要素法による解析を行った。壁面における減衰係数は、

図-11 周波数応答曲線の比較 (点A, $r=0.9$ on Γ_3)図-12 周波数応答曲線の比較 (点B, $r=0.9$ on Γ_3)図-13 周波数応答曲線の比較 (点B, $r=0.3$ on Γ_3)

主・副防波堤の港外側で 0 (完全反射), 港内の壁面全てにおいて直角入射の場合に反射率が 0.9 となる値を設定した. この計算結果と, 同一の条件における本手法による計算結果の周波数応答曲線の比較を行ったものが, 図-11, 図-12, 図-13 である. 図中の実線は本手法による結果を, 破線および点線は有限要素法による結果を示しており, 破線は 図-10 に示す Γ_1 の境界における反射率をほとんど 0 にした場合, 点線は反射率を 1 にした場合である. 図-11 は港口付近の点 A, 図-12 は港奥の点 B における計算結果であるが, いずれの点においても Γ_1 上の反射率をほとんど 0 にした場合 (破線) と本手法による計算結果 (実線) とは良く一致しており, 本手法において用いた港口の開境界条件の妥当性を示している. 図-13 は港奥の Γ_3 の領域の反射率を下げた場合の点 B における結果である. 図-12 と比較すると, 当然港内の静穏性は改善されており, これに伴い各手法による解の差も小さくなっていることがわかる.

5. 結 論

緩勾配方程式を基礎方程式とし, 任意形状, 任意反射率, 水深変化を考慮した不規則波に対する港内波高分布の計算法を提案した. 計算結果を半無限堤における回折計算結果, 従来の方法による計算結果および実験結果と比較したところ, 概ね良い一致を示しており, 本手法の有効性が確かめられた.

参 考 文 献

- 1) 高山知司: 波の回折と港内波高分布に関する研究, 港湾技研資料, No. 367, 140 p., 1981.
- 2) 坂井藤一・月岡康一: 波動解析への有限要素法の適用(第 2 報), 第 21 回海岸工学講演会論文集, pp. 45~48, 1974.
- 3) Lee, J. J.: Wave-induced oscillations in harbours of arbitrary geometry, J. Fluid Mech., Vol. 45, pp. 375~394, 1971.
- 4) 井島武士・吉田明徳・奥蘭英明・北山 斉: 消波護岸を有する港湾水面変動の数値解析, 第 29 回海岸工学講演会論文集, pp. 183~187, 1982.
- 5) 伊藤喜行・谷本勝利: 数値波動解析法とその応用, 第 18 回海岸工学講演会論文集, pp. 67~70, 1971.
- 6) 渡辺 晃・丸山康樹: 屈折・回折・碎波減衰を含む波浪場の数値解析法, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 103~107, 1984.
- 7) Berkhoff, J. C. W.: Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 471~490, 1972.
- 8) 磯部雅彦・佐藤典之・杉浦 淳・泉宮尊司: 港内波高分布の数値計算における境界条件に関する研究, 第 34 回海岸工学講演会論文集, pp. 86~90, 1987.
- 9) Dalrymple, R. A., J. T. Kirby and P. A. Hwang: Wave diffraction due to areas of energy dissipation, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol. 110, pp. 67~79, 1984.
- 10) 合田良実・鈴木康正・高山知司: 不規則波に対する防波堤の回折図について, 第 23 回海岸工学講演会論文集, pp. 401~405, 1976.
- 11) 樫山和男: 計算力学における線形水面波動問題に関する基礎的研究, 博士論文, 中央大学, 316 p., 1987.