

非線形長周期波の湾水振動

喜岡 渉*・飯田耕三**・石田 昭***

1. はじめに

外洋から来襲する長周期波によって、外洋に面した掘り込み港湾や細長い湾などでは副振動と呼ばれる共振現象が生じることがある。こうした副振動については、従来よりいくつかの理論計算の方法が提案されている。最近になって緩勾配方程式を直接解く試みりもなされているが、任意形状の港湾の共振現象の解析にあたっては、主としてヘルムホルツ方程式に2次元グリーン関数を導入して解く Hwang・Tuck²⁾の方法および Lee³⁾の方法、水深変化を考慮できる Mattioli⁴⁾の方法などが用いられている。一様水深の場合、こうした線形理論に基づいて得られる湾水応答特性は、湾の代表長に対する入射波の相対波長である回折パラメーターのみに依存し、水深や波形勾配などには無関係となる。

本研究では、狭帯域で定義されるスペクトルを持つようなうねりが来襲する場合を対象とし、波群に伴う長周期波による湾の応答特性をより適切に取り扱うことができる理論計算方法を検討するもので、ここでは後で述べるように長周期波を2次のオーダーの非線形干渉によって生じる波と考える。

2. 非線形長周期波の支配方程式の誘導

非粘性、非圧縮および非回転の流体運動を考え、座標系としては x - y 平面を図-1に示すように静止水面と一致させ、 z 軸は鉛直上向きに正とする。定式化を簡潔にするために、ここでは水深は一定で h とし、波は x 方向に入射する場合を考える。

入射波波列は角周波数 ω 、波数 k ではほぼ周期的な波動運動を行うものとし、伝播に伴って時空間においてゆっくりと変調するものとする。スケールの異なる時空間変動を取り扱うために、波形勾配 kA_0 のオーダーの微小パラメーター ε を導入し、通常の独立変数 (x, y, z, t) のほかにゆっくりと変動する $(x_1 = \varepsilon x, y_1 = \varepsilon y, t_1 = \varepsilon t)$ を定義する。これらを用いて、速度ポテンシャル ϕ お

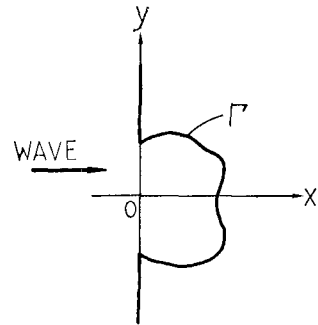


図-1 座標系の定義

および水位変動 η を次のようにせつ動展開する。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(x, y, z, t; x_1, y_1, t_1) \dots\dots\dots (1)$$

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n(x, y, t; x_1, y_1, t_1) \dots\dots\dots (2)$$

上式を波動運動を記述する基礎方程式に代入して整理すると、 ε の各オーダーにおけるラプラス方程式、自由表面における境界条件式、水底における境界条件式および流体境界 Γ における境界条件式を基礎式として得る。以上の各式を満足する ϕ_n および η_n は基本波（搬送波）の角周波数を用いて次のようにあらわすことができるものとする。

$$\phi_n = \sum_{m=-n}^n \phi_{nm}(x, y, z; x_1, y_1, t_1) e^{-im\omega t} \dots (3)$$

$$\eta_n = \sum_{m=-n}^n \eta_{nm}(x, y; x_1, y_1, t_1) e^{-im\omega t} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 $\phi_{n,-m} = (\phi_{nm})^*$ 、 $\eta_{n,-m} = (\eta_{nm})^*$ で $*$ は共役複素数を示す。

このとき、1次のオーダーの基本周波数成分 ϕ_{11} は次の各式を満足する関数として求められる。

$$\phi_{11xx} + \phi_{11yy} + \phi_{11zz} = 0 \quad (-h < z < 0) \dots (5)$$

$$\phi_{11z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_{11} = 0 \quad (z=0) \dots\dots\dots (6)$$

$$\phi_{11z} = 0 \quad (z=-h) \dots\dots\dots (7)$$

$$\phi_{11n} = 0 \quad (\text{on } \Gamma) \dots\dots\dots (8)$$

ここに、下付き添字の変数は微分をあらわし、添字 n は外向法線方向における微分を示す。入射波波群の包絡波形を A^+ とすると、式 (5)、(6) および (7) を満足する入射波の速度ポテンシャル ϕ_{11}^+ は線形理論により

* 正会員 Ph.D 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科

** 学生員 名古屋工業大学大学院 工学研究科

*** 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科

次式で与えられる。

$$\phi_{11}^s = -\frac{A^+g \cosh k(z+h)}{2\omega \cosh kh} (ie^{ikx} + *) \dots\dots (9)$$

ここに、共役複素数*が加えられることにより上式左辺の ϕ_{11}^s は実数で与えられることを示す。式(9)に対応する反射波の速度ポテンシャルを ϕ_{11}^R とすると、 $x \rightarrow -\infty$ で $\phi_{11} = \phi_{11}^L + \phi_{11}^R$ を満足しなければならない。湾境界 Γ によって生じる散乱波の速度ポテンシャルを ϕ_{11}^S として $\phi_{11} = \phi_{11}^L + \phi_{11}^R + \phi_{11}^S$ と置くと、 ϕ_{11}^S は式(5)~(7)を満たすとともに、次の境界条件と無限遠方での radiation 条件を満足する関数として与えられる。

$$\phi_{11n}^S = -(\phi_{11}^L + \phi_{11}^R)_n \quad (\text{on } \Gamma) \dots\dots (10)$$

以上で定義された ϕ_{11}^S は通常の線形境界値問題に帰着するので、従来^{2),3)}の方法によって算定することができる。水位変動は1次のオーダーでは、

$$\eta_1 = \eta_{11} e^{-i\omega t} + * = \frac{i\omega}{g} \phi_{11} e^{-i\omega t} + * \dots\dots (11)$$

として与えられ、このオーダーでは長周期波の成分はあらわれない。

入射波の包絡波形 A^+ とその反射波 A^- は遅いスケールでの独立変数に関する任意の関数と考えられるが、 ϕ_{21} についての非斉次方程式が解を持つ条件から次式を満足するものでなければならない⁵⁾。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} \pm C_g \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left(\frac{A^+}{A^-} \right) = 0 \dots\dots (12)$$

ここに、 C_g は群速度を示す。式(12)を書き換えると、

$$A^+ = A_0 f(x_1 - C_g t_1) \dots\dots (13)$$

$$A^- = A_0 f(x_1 + C_g t_1) \dots\dots (14)$$

とあらわすこともできる。散乱波成分 A' は (x_1, y_1, t_1) の関数となるが、同様に solvability condition を考えることにより次式を満足する関数として与えられる。

$$A'_{t_1} + C_g A'_{x_1} = 0 \dots\dots (15)$$

ただし、 $r_1 = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}$ である。

次に、long-scale の運動を記述する ϕ_{10} と対応する平均水位 η_{20} すなわち長周期波の水位変動を考える。ゆっくりと変動する独立変数 (x_1, y_1, t_1) の関数である ϕ_{10} は式(5)~(8)に示されたような short-scale の方程式に対しては解を持たなくなる。この場合、 ϕ_{30} に関する solvability condition を考えることによって long-scale での支配方程式を導くことができるが⁵⁾、ここでは Agnon・Mei⁶⁾の方法に従って次の連続方程式を用いることとする。

$$\eta_{20} + \left(\int_{-h}^{\eta} \phi_x dz \right)_x + \left(\int_{-h}^{\eta} \phi_y dz \right)_y = 0 \dots\dots (16)$$

上式に式(3)および(4)を代入して、 $n=3$ まで展開した上で $m=0$ に関する項を集めると次式を得る。

$$\eta_{20t_1} + h(\phi_{10x_1 x_1} + \phi_{10y_1 y_1}) + (\eta_{11}^* \phi_{11x} + *)_{x_1} = 0 \dots\dots (17)$$

また、自由表面におけるベルヌーイの式から η_{20} に関しては次式を得る。

$$\eta_{20} = -\frac{1}{g} \left[|\phi_{11x}|^2 + |\phi_{11y}|^2 + |\phi_{11z}|^2 - \frac{\omega^2}{g} (\phi_{11} \phi_{11x}^* + *) + \phi_{10t_1} \right] \quad (z=0) \dots\dots (18)$$

さらに、式(17)および(18)から η_{20} を消去すると ϕ_{10} に対する支配方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} & \phi_{10t_1 t_1} - gh(\phi_{10x_1 x_1} + \phi_{10y_1 y_1}) \\ &= g(\eta_{11}^* \phi_{11x} + *)_{x_1} - \left[|\phi_{11x}|^2 + |\phi_{11y}|^2 + |\phi_{11z}|^2 - \frac{\omega^2}{g} (\phi_{11} \phi_{11x}^* + *) \right]_{t_1} \Big|_{z=0} \dots\dots (19) \end{aligned}$$

上式で与えられる ϕ_{10} は境界条件として次式を満足しなければならない。

$$\phi_{10n} = 0 \quad (\text{on } \Gamma) \dots\dots (20)$$

式(18)によって与えられた長周期波の水位変動を計算するためには、右辺各項の ϕ_{11} および ϕ_{10} を算定する必要がある。このうち ϕ_{11} は前に述べたように通常の線形理論解として求めることができるが、 ϕ_{10} については式(19)および(20)を満足する関数としてあらたに解いてやる必要がある。式(19)の右辺は set-down 波に対する強制力をあらわす項とみなすことができ、式(12)の関係から ϕ_{10} は結局次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} \phi_{10} &= \phi_{10}^I(x_1 - C_g t_1) + \phi_{10}^R(x_1 + C_g t_1) \\ &+ \phi_{11}^S[r_1 - (gh)^{1/2} t_1] \dots\dots (21) \end{aligned}$$

上式の右辺第3項は式(19)の斉次解で、長波の波速 $(gh)^{1/2}$ で伝播する散乱波成分を示している。また、 ϕ_{10}^R は式(20)を満足することから、

$$\phi_{10n}^R = -(\phi_{10}^I + \phi_{10}^R)_n \quad (\text{on } \Gamma) \dots\dots (22)$$

が成り立たなければならない。

3. 計算方法

具体的な計算にあたっては、まず式(13)を満足する包絡波形を規定してやる必要がある。ここでは基礎資料を得ることを目的として、次式のように波数が k_0 の正弦波を仮定することとする。

$$A^+ = A_0 \cos k_0(x_1 - C_g t_1) \dots\dots (23)$$

このとき ϕ_{10}^I は式(19)から次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_{10}^I &= \frac{A_0^2}{4k_0} \left[\frac{1}{C_g^2 - gh} \left(\frac{\omega^2}{2k \tanh^2 kh} + \frac{\omega^2 C_g}{4 \sinh^2 kh} \right) \right] \sin 2k_0(x_1 - C_g t_1) \dots\dots (24) \end{aligned}$$

基本波の散乱波の速度ポテンシャル ϕ_{11}^S の算定には、Hwang・Tuck²⁾による一重層密度を利用する方法を用い

ることとする。すなわち、式(9)で示された入射波の速度ポテンシャル ϕ_{11}^I を変数分離して、

$$\phi_{11}^I = e^{ikx} \dots\dots\dots (25)$$

と置き、 ϕ_{11}^I に対応する反射成分および散乱波成分をそれぞれ ϕ_{11}^R , ϕ_{11}^S とする。このとき、 ϕ_{11}^S は次式のように流体境界 Γ に沿う線積分としてあらわすことができる。

$$\phi_{11}^S(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \sigma(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\Gamma \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 (ξ, η) はソース点を示し、 σ は強度関数である。グリーン関数は0次の第1種ハンケル関数 $H_0^{(1)}$ により次式で与えられる。

$$G = i\pi H_0^{(1)}(kR) \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 $R = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}$ である。式(26)の強度関数は Γ 上での境界条件式(10)から次式により与えられる。

$$-\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \sigma \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = -2n_x \frac{\partial}{\partial x} (\phi_{11}^I + \phi_{11}^R) \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 n_x は外向法線ベクトル $\mathbf{n}$ の x 方向成分を示す。

一方の set-down 波の ϕ_{10}^S についても、包絡波の角周波数を ω_0 として入射波の速度ポテンシャルを

$$\phi_{10}^I = \phi_{10}^I e^{-2i\omega_0 t} + * \dots\dots\dots (29)$$

と置き、 ϕ_{10}^I に対応する反射成分および散乱波成分をそれぞれ ϕ_{10}^R , ϕ_{10}^S とすると、上述の基本波と同様に取り扱うことが可能である⁷⁾。この場合、 ϕ_{10}^S は次式のように与えられる。

$$\phi_{10}^S(x_1, y_1) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \sigma_1(\xi_1, \eta_1) G_1(x_1, y_1; \xi_1, \eta_1) d\Gamma \dots\dots\dots (30)$$

ただし、 (ξ_1, η_1) はソース点を示し、グリーン関数は次式で与えられる。

$$G_1 = i\pi H_0^{(1)}(\alpha k_0 R_1) \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 $\alpha = 2C_0/(gh)^{1/2}$, $R_1 = [(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2]^{1/2}$ である。式(30)の強度関数 σ_1 は式(22)から次の積分方程式により与えられる。

$$-\sigma_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \sigma_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} d\Gamma = -2n_x \frac{\partial}{\partial x_1} (\phi_{10}^I + \phi_{10}^R) \dots\dots\dots (32)$$

式(28)および(32)は数值的に解く必要があるが、その離散化の方法については Hwang・Tuck²⁾に詳しい。

4. 計算結果と考察

計算の対象としては、図-2に示すように長さが l で幅が b であるような長方形湾を考えた。計算にあたっては、流体境界 Γ を88個の線分要素に分割して、入射波の波列に平行な海岸線部分の境界 Γ_c の長さは湾の長さ

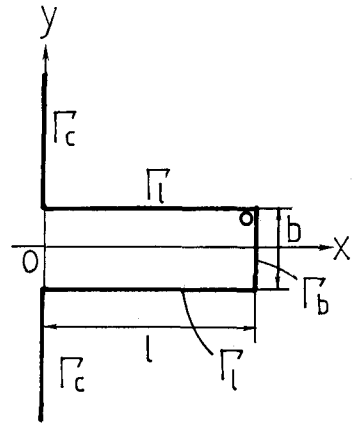


図-2 計算領域と記号の説明

Γ_l と等しくした。このとき、 Γ_c を有限な長さで打ち切ることによって生じる両端からの仮想な散乱波の影響はたかだか1%程度であった。入射波波群の包絡波形としては式(23)に示したように正弦波形を仮定し、図-2に白丸で示した Γ_b 境界上の湾奥における長周期波 η_{20} の応答特性を計算することとした。

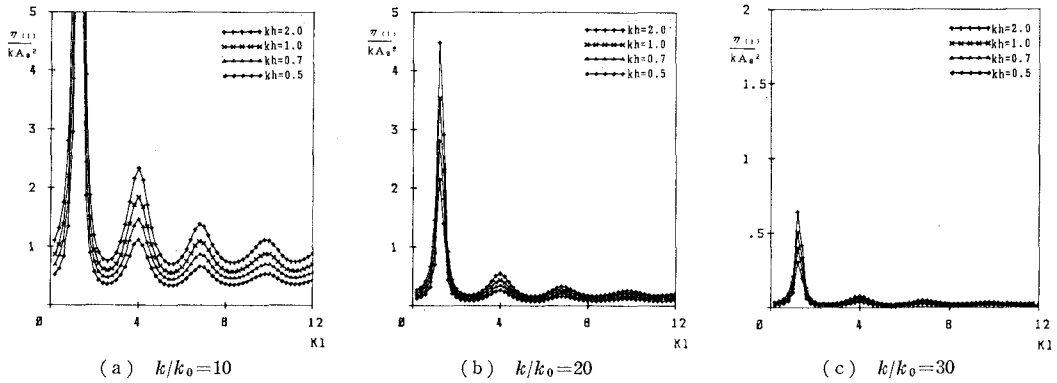
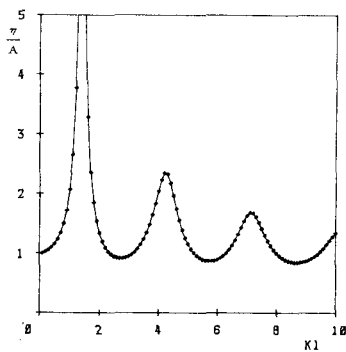
式(18)において示されたように、 η_{20} は線形の数値ポテンシャル ϕ_{11} の自己干渉項と set-down 波 ϕ_{10} による項から成り立っている。各項を支配するパラメータは異なり、共振現象を生じる波数のオーダーもその結果異なるので、ここでは次に示すようにそれぞれの項 $\eta_{(1)}$ および $\eta_{(2)}$ に分けて検討を加えることとする。

$$\eta_{(1)} = -\frac{1}{g} \left[|\phi_{11x}|^2 + |\phi_{11y}|^2 + |\phi_{11z}|^2 - \frac{\omega^2}{g} (\phi_{11} \phi_{11}^* + *) \right] \quad (z=0) \dots\dots (33)$$

$$\eta_{(2)} = -\frac{1}{g} \phi_{10\epsilon_1} \dots\dots\dots (34)$$

式(33)および(34)にそれぞれ式(9)および式(24)を代入してみるとわかるように、 $\eta_{(1)}$ および $\eta_{(2)}$ はともに kA_0^3 で割って $\eta_{(1)}/(kA_0^3)$, $\eta_{(2)}/(kA_0^3)$ とあらわすことができる。したがって、長周期波のそれぞれの成分の振幅 A_0 に対する増幅率は波形勾配 kA_0 に比例することになる。また、線形成分の自己干渉項から成る $\eta_{(1)}$ の応答特性は、基本波の波数 k についての回折パラメータ kl , 相対水深 kh および包絡波に対する波数比 k/k_0 によって変化することが示される。一方、set-down 波による $\eta_{(2)}$ は、包絡波の波数 k_0 に対する回折パラメータ $k_0 l$ と相対水深 kh によって支配され、波数比 k/k_0 には無関係となる。

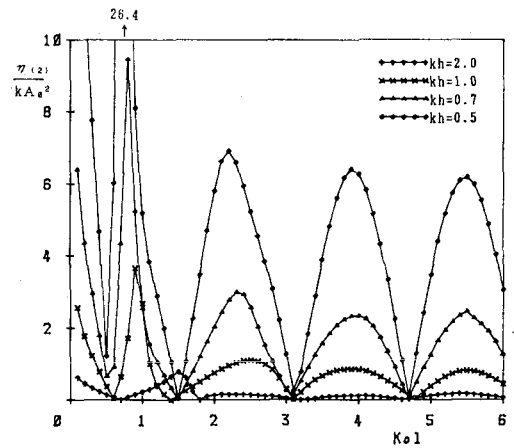
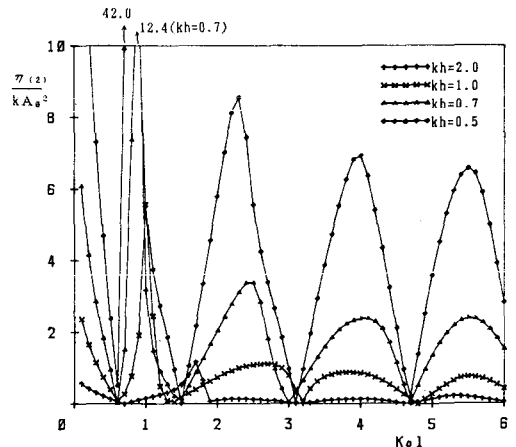
図-3(a), (b) および (c) は、 $b=0.4l$ の長方形湾に対する $\eta_{(1)}$ の最大値の変化特性を示すもので、波数比 k/k_0 をそれぞれ 10, 20 および 30 と変えた場合の計算結果を示す。第1のピークは kl がほぼ 1.5 の

図-3 長方形湾 ($b=0.4l$) における $\eta_{(1)}$ の応答特性図-4 長方形湾 ($b=0.4l$) に対する線形理論解

ときに発生しており、相対水深 kh が大きい方がむしろピーク値も大きくなっている。この1次のピークに続くいくつかのピークは、ともに図-4に示す線形理論解における共振周期と対応している。また、波数比 k/k_0 が大きくなると、 $\eta_{(1)}$ の増幅率は著しく小さくなっている(図-3(c))。このことから、線形成分の自乗項から成る長周期波の応答は、 k は波群を構成している個々の基本波の波数であることを考えると、湾のスケールが小さく、かつ波群を構成する波の数が少ない場合に限って共振現象を支配するといえよう。

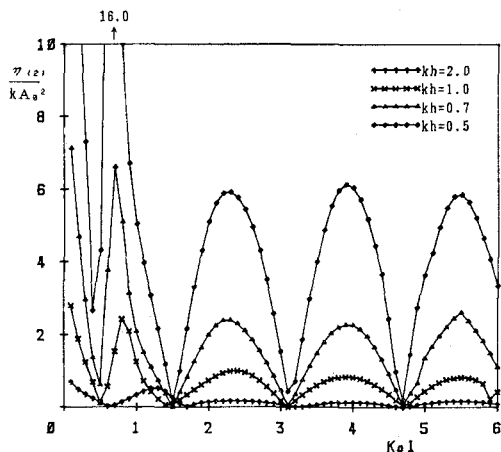
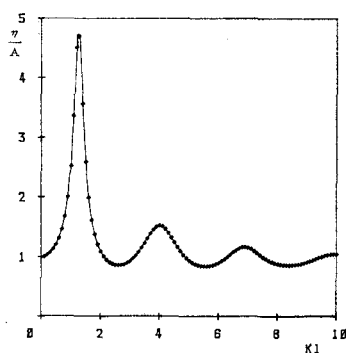
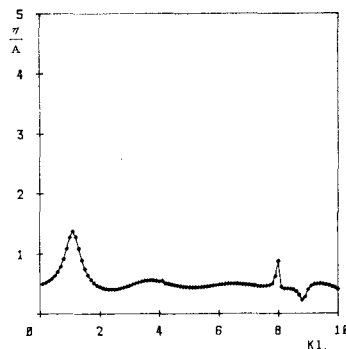
一方、set-down 波による $\eta_{(2)}$ の応答は波数比 k/k_0 には無関係で、図-5に結果を示すように kh の減少に伴ってピーク値は増加している。なお、図の枠外に示した数字は $kh=0.5$ における1次のピーク値を示す。図には4つのピークが見られるが、これら共振発生時の kol を長周期波の波数 $2k_0$ を用いて横軸を $2kol$ としてプロットしてみると、 kh の値が大きくなると少しずつ高周波数側にシフトしているものの第1のピークは図-4に示した線形理論解の1次モードにはほぼ対応していることがわかる。しかしながら、第2のピーク次降については高周波数側になるに従って線形解との差異が大きくなっている。

図-6は $b=0.2l$ とした長方形湾における $\eta_{(2)}$ の応

図-5 長方形湾 ($b=0.4l$) における $\eta_{(2)}$ の応答特性図-6 長方形湾 ($b=0.2l$) における $\eta_{(2)}$ の応答特性

答特性を示したもので、比較のため図-8に線形理論解も示す。図-5の結果に比べて、増幅率はより大きくなっているが、その傾向は第3のピークからは顕著でなくなっている。

同様に $b=0.8l$ の長方形湾における結果を図-7に示し、線形理論解を図-9に示す。線形理論解と同様に湾

図-7 長方形湾 ($b=0.8l$) における $\eta(2)$ の応答特性図-8 長方形湾 ($b=0.2l$) に対する線形理論解図-9 長方形湾 ($b=0.8l$) に対する線形理論解

幅が広がると増幅率は小さくなるが、線形理論と比べるとその減少の度合いは小さい。

5. 結 論

本研究で得た主要な結論をまとめると次のようである。

(1) 波群に伴う長周期波は、multiple-scale せつ動法を用いると分離して表示することができ、湾水振動の解析が可能になる。

(2) 長周期波は、波群を構成する基本波自体の自己干渉項から成る成分 $\eta(1)$ と set-down 波と呼ばれる成分 $\eta(2)$ に分けて取り扱うことができる。

(3) それぞれの成分 $\eta(1)$ および $\eta(2)$ の増幅率はともに入射波の波形勾配に比例して大きくなり、 $\eta(1)$ は基本波の波数についての回折パラメーター、相対水深および包絡波と基本波の波数比によって変化し、一方 $\eta(2)$ は包絡波の波数に対する回折パラメーターと相対水深によって支配される。

(4) 通常の湾のスケールでは、 $\eta(1)$ の共振はかなり低周波数側で発生することになり、set-down 波 $\eta(2)$ の応答特性がより重要となる。

(5) $\eta(2)$ の共振発生周期は相対水深により若干シフトするもの1次ピークについては線形理論解のものとはほぼ対応しているが、2次以降のピーク発生周期については線形理論解から徐々にずれる傾向が見られる。

ここで示した解析方法は任意形状の湾に対して用いることができるので、今後は現地データと比較することによって理論解の適用性を検討していきたい。

参 考 文 献

- 磯部雅彦・佐藤典之・杉浦 淳・泉谷尊司: 港内波高分布の数値計算における境界条件に関する研究, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 86~90, 1987.
- Hwang, L. S. and Tuck, E. O.: On the oscillations of harbours of arbitrary shape, J. Fluid Mech., Vol. 42, Part 3, pp. 447~464, 1970.
- Lee, J. J.: Wave-induced oscillations in harbours of arbitrary geometry, J. Fluid Mech., Vol. 45, Part 2, pp. 375~394, 1971.
- Mattioli, F.: Wave-induced oscillations in harbours of variable depth, Computers and Fluids, Vol. 9, pp. 161~172, 1978.
- Mei, C. C.: The applied dynamics of ocean surface waves, Wiley-Interscience, 740 p., 1983.
- Agnon, Y. and Mei, C. C.: Slow-drift motion of a two-dimensional block in beam seas, J. Fluid Mech., Vol. 151, pp. 279~294, 1985.
- 喜岡 渉: 波群に伴う長周期変動波力の解析, 土木学会論文集, II (投稿中).